УДК 512.542

Ий Сяолан* (Чжэцзян. науч.-техн. ун-т, Китай),
О. Л. Шеметкова (Рос. экон. ун-т им. Г. В. Плеханова, Москва)

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИСТЕМОЙ SE-ДОБАВЛЯЕМЫХ ПОДГРУПП

We investigate the influence of the properties of supplemented subgroups on the structure of finite groups. The conditions under which a normal subgroup of a finite group possesses cyclic chief p-factors are obtained.

Досліджується вплив властивостей підгруп, що мають додаток, на будову скінченної групи. Отримано умови, за яких нормальна підгрупа скінченної групи має циклічні головні p-фактори.

1. Введение. В статье рассматриваются только конечные группы, G обозначает некоторую группу. Пусть A и B — такие подгруппы из G, что $G = AB$. Тогда B называют добавлением к A в G. Если, к тому же, $A \cap B = 1$, то B называется дополнением к A в G.

Группы с различными системами дополняемых подгрупп изучаются уже давно (см., например, [1, 2]). При изучении групп с системой добавляемых подгрупп, или групп с факторизациями [3], приходится вводить определенные ограничения. О. Кегель называет подгруппу S-квазинормальной в G, если она перестановочна с каждой силовской подгруппой из G (см. [4]). Подгруппа A из G называется S-квазинормально вложенной в G, если для любого простого делителя p порядка A выполняется условие: силовская p-подгруппа из A является силовской подгруппой в некоторой S-квазинормальной подгруппе из G (см. [5]). Группы с системой S-квазинормально вложенных подгрупп изучались в [5 – 7]. Согласно [7], через B_{seG} обозначается подгруппа, порожденная всеми теми подгруппами из B, которые S-квазинормально вложены в G. Следуя А. Н. Скибе [7], подгруппу B будем называть SE-добавляемой в G, если найдется такая подгруппа H, что $G = BH$ и $B \cap H \leq B_{seG}$.

В настоящей статье изучаются группы с системой SE-добавляемых подгрупп. Развивая и обобщая результаты работ [5 – 9], мы докажем следующие две теоремы.

Теорема A. *Пусть E — нормальная подгруппа из G и p — такой простой делитель $|E|$, что $(p-1, |E|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из E. Предположим, что SE-добавляемыми в G являются все максимальные подгруппы из P, не имеющие p-сверхразрешимых добавлений в G. Тогда E p-нильпотентна и все ее G-главные p-факторы циклические.*

Теорема B. *Пусть E — нормальная подгруппа из G и p — такой простой делитель $|E|$, что $(p-1, |E|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из E. Предположим, что выполнены два условия*:

1) *каждая подгруппа порядка p из P либо $Q\mathfrak{U}$-центральна в G, либо SE-добавляема в G*;

2) *если $p = 2$, то каждая кватернионная подгруппа порядка 4 из P либо Q-центральна в G, либо SE-добавляема в G.*

Тогда E p-нильпотентна и все ее G-главные p-факторы циклические.

Подгруппу L из P мы называем кватернионной в P (см. [9]), если P имеет секцию A/B, изоморфную группе кватернионов порядка 8, причем $L \leq A$ и $L \cap B = 1$. Следуя Л. А. Шеметкову, циклическую подгруппу $L = \langle x \rangle$ называет: 1) $Q\mathfrak{U}$-центральной в G, если найдется

*Поддержан грантом NNSF Китая (грант № 11101369).

такой циклический главный фактор A/B группы G, что $x \in A \setminus B$; 2) Q-центральной в G, если найдется такой главный фактор A/B группы G, что $x \in A \setminus B$ и $A/B \leq Z(G/B)$.

Отметим, что наши результаты остаются новыми и в случае $E = G$. В конце статьи мы обсудим приложения теорем A и B.

2. Предварительные сведения. Для удобства читателя в этом пункте мы приведем результаты, используемые при доказательствах теорем A и B. Мы используем стандартные обозначения [10]. $O^p(G)$ — подгруппа, порожденная всеми p'-элементами из G, H_G — ядро подгруппы H в G, т. е. наибольшая G-инвариантная подгруппа, содержащаяся в H. Группа Шмидта — это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группу называют p-сверхразрешимой, если она p-разрешима и все ее главные p-факторы циклические. Группу называют: 1) p-замкнутой, если ее силовская p-подгруппа нормальна; 2) p-нильпотентной, если ее силовская p-подгруппа имеет нормальное дополнение.

2.1. *Если G — группа Шмидта, то G является p-замкнутой $\{p, q\}$-группой для некоторых простых чисел p, q. Пусть P — нормальная силовская p-подгруппа из G. Тогда*:

(a) *если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p*;

(b) *если $p > 2$, то экспонента подгруппы P равна p; при $p = 2$ экспонента подгруппы P не превышает* 4;

(c) *$P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G и $|P/\Phi(P)| = p^n \equiv 1 \pmod q$, где n — порядок p по модулю q* (см. [10], теорема VII.6.18; [11], теоремы 26.1 и 26.2).

2.2. *Если G не p-нильпотентна, то она содержит p-замкнутую подгруппу Шмидта, порядок которой делится на p* (см. [12], теорема 7.2.4).

2.3. *Пусть p — такой простой делитель $|G|$, что $(p-1, |G|) = 1$. Тогда*:

(a) *если $M \leq G$ и $|G : M| = p$, то $M \lhd G$*;

(b) *если силовская p-подгруппа в G циклическая, то G p-нильпотентна;*

(c) *если G p-сверхразрешима, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. Утверждения (b) и (c) легко следуют из утверждений 2.1, 2.2.

Докажем утверждение (a). Случай, когда p — наименьший простой делитель $|G|$, хорошо известен (см. [13], 1A.1, следствие 5.14, [14], теорема VI.9.2). Пусть $p > 2$. Тогда G разрешима, поскольку имеет нечетный порядок. Мы можем считать, что $M_G = 1$. Тогда $G = LM$ и $L \cap M = 1$, где L — минимальная нормальная подгруппа в G. Очевидно, $|L| = p$. Поскольку $L = C_G(L)$, $|M|$ делит $p - 1$, что противоречит условию.

2.4. *Пусть $H \leq K \leq G$. Тогда*:

(a) *если H S-квазинормальна в G, то H S-квазинормальна в K*;

(b) *если H нормальна в G, то K/H S-квазинормальна в G/H тогда и только тогда, когда K S-квазинормальна в G*;

(c) *если H S-квазинормальна в G, то H субнормальна в G*;

(d) *если A и B S-квазинормальны в G, то $A \cap B$ и $\langle A, B\rangle$ S-квазинормальны в G*;

(e) *если H S-квазинормальна в G, то H/H_G нильпотентна* (см. [4, 15]).

2.5. *Если p-подгруппа H S-квазинормальна в группе G, то $H \leq O_p(G)$ и $O^p(G) \leq N_G(H)$* (см. [16]).

2.6. *Предположим, что подгруппа U S-квазинормально вложена в G. Пусть $H \leq G$ и K — нормальная подгруппа в G. Тогда*:

(a) *если $U \leq H$, то U S-квазинормально вложена в H*;

(b) *UK S-квазинормально вложена в G, а UK/K S-квазинормально вложена в G/K* (см.[5]).

2.7. *Пусть H — SE-добавляемая подгруппа в G, а N — нормальная подгруппа в G. Тогда*:

(a) *если $H \leq K \leq G$, то H SE-добавляема в K*;

(b) *если $N \leq H$, то H/N SE-добавляема в G/N*;

(c) *если $(|N|, |H|) = 1$, то HN/N SE-добавляема в G/N* (см. [7], лемма 2.8).

2.8. *Пусть $R \trianglelefteq G$ и $R/O_{p'}(R)$ не содержится в гиперцентре группы $G/O_{p'}(R)$. Тогда G имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта S со следующим свойством*: *силовская p-подгруппа $S_p \neq 1$ из S содержится в R* (см. [9], лемма 3).

2.9. *Пусть S — группа Шмидта с неабелевой нормальной силовской 2-подгруппой P. Тогда любая циклическая подгруппа порядка 4 является кватернионной в P. В частности, если $|Z(P)| = 2$, то любой элемент порядка 4 из S содержится в подгруппе, изоморфной группе кватернионов Q_8* (см. [9], лемма 4).

Следующий результат является следствием теоремы 3.1 из [17].

2.10. *Пусть $H \trianglelefteq G$, p — нечетное простое число. Если каждая подгруппа порядка p из H $Q\mathfrak{U}$-центральна в G, то H p-сверхразрешима и каждый G-главный p-фактор подгруппы H является циклическим.*

2.11. *Пусть $G = AB$, где A — циклическая 2-подгруппа, $B \neq G$. Тогда $G = AM$, где M — нормальная подгруппа индекса 2* (см. [18], лемма 3.2).

2.12. *Пусть p — такой простой делитель $|G|$, что $(p-1, |G|) = 1$. Пусть G_p — силовская p-подгруппа в G, $K \trianglelefteq G$, $P = G_p \cap K$. Если G/K — p-группа и каждая максимальная подгруппа из G_p либо содержит P, либо имеет p-нильпотентное добавление в G, то K p-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что K не p-нильпотентна. Тогда в силу [14] (теорема IV.4.7) P не содержится в $\Phi(G_p)$. Пусть M_1 — максимальная подгруппа из G_p, не содержащая P. По условию существует такая p-нильпотентная подгруппа T_1, что $G = M_1T_1$. Очевидно, $G_p = M_1(G_p \cap T_1)$, и мы можем считать, что $T_1 = N_G(H_1)$, где H_1 — p'-холлова подгруппа из K. Теперь мы замечаем, что в силу [19] любые две p'-холловы подгруппы в K сопряжены (в силу условия либо $p = 2$, либо $|G|$ — нечетное число). По лемме Фраттини $G = KT_1 = PT_1$. Следовательно, $G_p = P(G_p \cap T_1)$ и $G_p \cap T_1 < G_p$. Пусть M_2 — максимальная подгруппа в G_p, содержащая $G_p \cap T_1$. Тогда $G = M_2T_2$, где T_2 — нормализатор в G некоторой p'-холловой подгруппы H_2 из K. Поскольку $H_1^x = H_2$, $T_1^x = T_2$ для некоторого $x \in G$, то $G = M_2T_2 = M_2T_1^x = M_1T_1 = M_2T_1$. Поэтому

$$G_p = M_1(G_p \cap T_1) = M_2(G_p \cap T_1) = M_2,$$

и мы получаем противоречие.

2.13. *Пусть $E \leq G$ и $L = \langle x \rangle \leq E$. Тогда*:

(a) *если L Q-центральна в G, то L Q-центральна и в E*;

(b) *если $E \trianglelefteq G$ и L $Q\mathfrak{U}$-центральна в G, то найдется такой циклический G-главный фактор X/Y подгруппы E, что $x \in X \setminus Y$.*

Доказательство. Пункт (a) установлен в [9]. Докажем пункт (b). По условию существует такой циклический главный фактор A/B группы G, что $x \in A \setminus B$. Факторы AE/BE и $A/B(A \cap E)$ G-изоморфны. Но так как $x \in A \setminus B$, то $B \neq B(A \cap E)$. Поэтому $A = B(A \cap B)$, и мы получаем G-изоморфизм $A/B \simeq (A \cap E)/(B \cap E)$. Поскольку $x \in (A \cap E) \setminus (B \cap E)$, то фактор $(A \cap E)/(B \cap E)$ и будет искомым.

2.14. *Пусть $E \trianglelefteq G$, P — силовская 2-подгруппа из E, W — множество всех циклических кватернионных подгрупп из P. Пусть K — нормальная $2'$-подгруппа в G. Тогда $WK/K = \{LK/K \mid L \in W\}$ — множество всех циклических кватернионных подгрупп из PK/K.*

Доказательство. Пусть Q_8 обозначает группу кватернионов порядка 8. Если $H \in W$, то в P найдется секция A/B такая, что $A/B \simeq Q_8$, $H \leq A$, $H \cap B = 1$. Так как $1 = K \cap HB = (K \cap H)(K \cap B)$, то согласно [10] (лемма A.1.2) справедливо равенство $KH \cap KB = K(H \cap B) = K$. Но тогда $HK/K \cap BK/K = K(H \cap B)/K = K/K$ и

$$AK/K/BK/K \simeq AK/BK \simeq A/A \cap BK = A/B(A \cap K) \simeq A/B \simeq Q_8.$$

Значит, HK/K — кватернионная подгруппа в PK/K.

Обратно, пусть H_1/K — циклическая кватернионная подгруппа в PK/K. Это значит, что PK/K имеет такую секцию $A_1/K/B_1/K \simeq Q_8$, что $H_1/K \leq A_1/K$, $H_1/K \cap B_1/K = K/K$. Заметим, что $H_1 \trianglelefteq A_1$, $B_1 \trianglelefteq A_1$. Пусть A — силовская 2-подгруппа из A_1. Тогда $H = A \cap H_1$ — силовская 2-подгруппа в H_1, $B = A \cap B_1$ — силовская 2-подгруппа в B_1. Поэтому

$$A_1/B_1 = AK/BK \simeq A/A \cap BK = A/B(A \cap K) = A/B.$$

Поскольку $HK \cap BK = K$, получаем $H \cap B = 1$. Таким образом, $H \in W$.

3. Доказательство теоремы A. Предположим, что теорема A не верна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G| + |E|$ минимально. Мы установим справедливость нескольких утверждений, которые приведут к противоречию.

3.1. *Подгруппа P не является циклической.*

Это вытекает из утверждения 2.3.

3.2. $O_{p'}(E) = 1$.

Допустим, что $K = O_{p'}(E) \neq 1$. Любая максимальная подгруппа из PK/K имеет вид LK/K, где L — максимальная подгруппа в P. Понятно, что если L имеет p-сверхразрешимое добавление в G, то LK/K имеет p-сверхразрешимое добавление в G/K. Если же L не имеет p-сверхразрешимого добавления в G, то L SE-добавляема в G, а согласно утверждению 2.7 LK/K SE-добавляема в G/K. Таким образом, условие теоремы выполняется для пары $(G/K, E/K)$. Поэтому из минимальности выбора пары (G, E) следует, что для пары $(G/K, E/K)$ теорема справедлива, а значит, она справедлива и для (G, E).

3.3. *Если $E \neq G$, то $E = P$.*

Пусть $E \neq G$. В силу утверждения 2.7 условие теоремы выполняется для (E, E). Следовательно, E p-нильпотентна. Теперь из утверждения 3.2 следует, что $E = P$.

3.4. $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда из утверждений 3.2 и 3.3 следует $E = P$. В силу утверждения 2.7 условие теоремы выполняется для $(G/V, EV/V)$. Таким образом, вследствие минимальности (G, E) теорема для $(G/V, EV/V)$ справедлива, а значит, она справедлива и для (G, E).

3.5. $|P| > p^2$.

Допустим, что это не так. Тогда в силу утверждения 3.1 P — нециклическая группа порядка p^2. Рассмотрим сначала случай, когда $(p-1, |G|) = 1$. Из утверждения 2.3 следует, что подгруппы порядка p не имеют дополнений и p-сверхразрешимых добавлений. Применяя утверждения 2.1 – 2.3 и 2.8, находим в G p-замкнутую подгруппу Шмидта $S = PQ$, где Q — q-группа для некоторого простого $q \neq p$. Каждая подгруппа порядка p из P SE-добавляема в

G, а значит, в силу утверждения 2.7 и в S. В силу утверждения 2.4 из SE-добавляемости подгрупп порядка p из S следует их S-квазинормальность в S. Поскольку $S = O^p(S)$, то согласно утверждению 2.5 подгруппы порядка p нормальны в S, т. е. S p-сверхразрешима и согласно утверждению 2.3 p-нильпотентна, что невозможно.

Теперь предположим, что $(p-1, |G|) \neq 1$. Тогда $E \neq G$ и согласно утверждению 3.3 имеем $E = P$. Если $G = HT$, $|H| = p$ и $H \cap T = 1$, то $P \cap T$ имеет порядок p и нормальна в G. Поэтому из условия и утверждения 2.4 следует, что все подгруппы порядка p из P S-квазинормальны в G. Применяя утверждение 2.5, видим, что индекс нормализатора любой подгруппы порядка p делится на p. Значит, число всех подгрупп порядка p в P делится на p, что противоречит [14] (теорема I.7.2).

3.6. *Если $E = P$, то E не является минимальной нормальной подгруппой в G.*

Допустим, что $E = P$ — минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть L — максимальная подгруппа из P, имеющая добавление T в G. Если $T \neq G$, то из $G = LT = PT$ следует $P = L(P \cap T)$, причем $P \cap T \neq 1$ нормальна в G, что приводит к противоречию. Если $T = G$, то T не p-сверхразрешима, и по условию $L \cap T = L = L_{seG}$. Значит, в силу утверждения 2.4 все максимальные подгруппы из P будут S-квазинормальны в G. Применяя утверждения 2.5, видим, что индекс нормализатора любой максимальной подгруппы из P делится на p. Значит, число всех подгрупп индекса p в P делится на p, что противоречит [14] (теорема I.7.2).

3.7. *Если N — минимальная нормальная p-подгруппа в G и $N \leq E$, то теорема для $(G/N, E/N)$ справедлива.*

В силу утверждения 2.7 это утверждение очевидно.

3.8. $E = G$.

Предположим, что $E \neq G$. Согласно утверждению 3.3 имеем $E = P$. Если $\Phi(P) \neq 1$, то в силу утверждения 3.7 все G-главные факторы между P и $\Phi(P)$ циклические. По теореме П. Шмидта [10] (теорема IV.6.7) все G-главные факторы между $\Phi(P)$ и 1 циклические. Поэтому $\Phi(P) = 1$, т. е. P является элементарной абелевой. В силу утверждения 3.7 G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, содержащуюся в P. В силу утверждений 3.6 и 3.7 $L \neq P$ и $|L| \neq p$. Пусть M — максимальная подгруппа из P. Допустим, что M имеет p-сверхразрешимое добавление T в G. Тогда ясно, что $T \neq G$ и $T \cap P$ является неединичной нормальной подгруппой в G. Тогда $L \leq T \cap P \leq T$, а поскольку T p-сверхразрешима, то минимальная нормальная подгруппа из T, содержащаяся в $T \cap P$, будет циклической нормальной подгруппой группы G. Получили противоречие. Таким образом, мы будем иметь в виду, что максимальные подгруппы из P не имеют p-сверхразрешимых добавлений.

Пусть L_1 — максимальная подгруппа из L. Мы покажем, что L_1 S-квазинормальна в G. В P найдется, очевидно, такая максимальная подгруппа V, что $V \cap L = L_1$ (это возможно, так как P элементарная абелева). По условию V SE-добавляема в G, т. е. $G = VT$ и $V \cap T \leq V_{seG}$. Предположим сначала, что $T = G$. Тогда в силу утверждения 2.4 $V = V_{seG}$ S-квазинормальна в G. Согласно утверждению 2.4 $V \cap L = L_1$ S-квазинормальна в G. Пусть теперь $T \neq G$. Тогда $T \cap P$ — неединичная нормальная подгруппа в G. Ясно, что L содержится в $T \cap P$. Но тогда $L_1 \leq V \cap T \leq V_{seG}$, и теперь из

$$L_1 \leq L \cap V_{seG} \leq L \cap V = L_1$$

следует, в силу утверждения 2.4, что $L_1 = L \cap V_{seG}$ S-квазинормальна. Таким образом, все максимальные подгруппы из L S-квазинормальны в G. Поскольку теорема для пары (G, L) справедлива, то $|L| = p$. Полученное противоречие доказывает утверждение 3.8.

3.9. *В P содержится максимальная подгруппа, не имеющая p-сверхразрешимого добавления в G.*

Это непосредственно следует из утверждений 2.3 и 2.12.

3.10. *Если $P \leq M \leq G$, то M p-нильпотентна.*

Это следует из утверждений 2.6, 2.7 и минимальности (G, E).

3.11. *G разрешима.*

Предположим, что G не является разрешимой. Поскольку $G = E$, то по условию $(p - -1, |G|) = 1$. Если $p > 2$, то G имеет нечетный порядок. Поэтому будем считать, что $p = 2$. Если $P_G \neq 1$, то согласно утверждению 3.7 теорема для G/P_G справедлива, а значит, утверждение 3.11 верно. Рассмотрим теперь случай $P_G = 1$. В силу утверждения 2.5 неединичные подгруппы из P не являются S-квазинормальными в G.

Пусть K — минимальная нормальная подгруппа из G. В силу утверждений 3.7 и 3.10 K неабелева и $PK = G$. Ясно, что K — единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Теперь заметим, что если неединичная подгруппа из P S-квазинормально вложена в G, то она содержит $P \cap K$. Действительно, пусть $1 \neq L \leq P$ и L является силовской подгруппой в S-квазинормальной подгруппе D группы G. Если $D_G = 1$, то D нильпотентна согласно утверждению 2.4. Но тогда из утверждений 3.4 и 3.7 следует, что G разрешима. Значит, $D_G \neq 1$ и $K \leq D$. Поскольку L является силовской подгруппой в D, то $L \cap D$ — силовская подгруппа в K. Таким образом, $L \cap D = P \cap K$.

Пусть V — максимальная подгруппа из P, не содержащая $P \cap K$ и не имеющая 2-нильпотентных добавлений в G. По условию V SE-добавляема в G. Значит, найдется такая подгруппа T, что $G = VT$ и $V \cap T \leq V_{seG}$. Если $V_{seG} \neq 1$, то согласно сделанному выше замечанию в V найдется подгруппа, содержащая $P \cap K$, что невозможно. Поэтому $V_{seG} = 1$. Таким образом, T — дополнение к V в G. Так как силовская 2-подгруппа из T имеет порядок 2, то T 2-нильпотентна согласно утверждению 2.3. Получили противоречие.

Итак, мы установили, что любая максимальная подгруппа из P, не содержащая $P \cap K$, имеет 2-нильпотентное добавление в G. Согласно утверждению 2.12 K 2-нильпотентна. Тем самым утверждение 3.11 доказано.

Завершение доказательства теоремы A. По доказанному G разрешима и имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой p-нильпотентна. Таким образом, G имеет нормальную подгруппу K такую, что G/K является неединичной p-группой, а $P \cap K$ — минимальной нормальной подгруппой в G. Заметим, что $P \cap K$ не содержится в $\Phi(G)$. Кроме того, $P \cap K = C_G(P \cap K) = O_p(G)$, $G = (P \cap K)M$, где M — максимальная подгруппа в G.

Пусть V — максимальная подгруппа из P, не содержащая $P \cap K$ и не имеющая p-нильпотентных добавлений в G. По условию V SE-добавляема в G. Значит, найдется такая подгруппа T, что $G = VT$ и $V \cap T \leq V_{seG}$. Поскольку T не p-нильпотентна, то $V \cap T \neq 1$. Но тогда в V найдется подгруппа $L \neq 1$, являющаяся S-квазинормально вложенной в G. Пусть L является силовской подгруппой в S-квазинормальной подгруппе D группы G. Если $D_G \neq 1$, то $P \cap K \leq D_G \leq D$, и мы получаем $P \cap K \leq L \leq V$, что противоречит допущению. Если же $D_G = 1$, то в силу утверждения 2.4 D нильпотентна, а значит, $D = L$ — S-квазинормальная p-подгруппа. Но тогда V_{seG} — S-квазинормальная p-подгруппа, входящая в $P \cap K$ согласно утверждению 2.5. Так как по утверждению 2.5 $O^p(G) \leq N_G(V_{seG})$ и $G = PO^p(G)$, то мы приходим к следующему:

$$P \cap K \leq \langle (V_{seG})^x \mid x \in G \rangle = \langle (V_{seG})^x \mid x \in P \rangle \leq V,$$

что невозможно в силу $P \cap K \not\leq V$. Тем самым установлено, что любая максимальная подгруппа из P, не содержащая $P \cap K$, имеет p-нильпотентное добавление в G. Согласно утверждению 2.12 K p-нильпотентна.

Теорема A доказана.

4. Доказательство теоремы B. Предположим, что теорема B не верна и пара (G, E) представляет собой контрпример, для которого $|G| + |E|$ минимально. Мы установим справедливость нескольких утверждений, которые приведут к противоречию.

4.1. *Подгруппа P не является циклической.*

Это вытекает из утверждения 2.3.

4.2. $O_{p'}(E) = 1$.

Допустим, что $K = O_{p'}(E) \neq 1$. Применяя утверждения 2.7 и 2.14, видим, что условие теоремы выполняется для пары $(G/K, E/K)$. Поэтому из минимальности выбора пары (G, E) следует, что для пары $(G/K, E/K)$ теорема справедлива, а значит, она справедлива и для (G, E).

4.3. *Если $E \neq G$, то $E = P$.*

Пусть $E \neq G$. В силу утверждения 2.7 условие теоремы выполняется для (E, E). Следовательно, E p-нильпотентна. Теперь из утверждения 4.2 следует, что $E = P$.

4.4. $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда из утверждений 4.2 и 4.3 следует $E = P$. В силу утверждений 2.7 и 2.14 условие теоремы выполняется для $(G/V, EV/V)$. Таким образом, вследствие минимальности (G, E) теорема для $(G/V, EV/V)$ справедлива, а значит, она справедлива и для (G, E).

4.5. $|P| > p^2$.

Справедливость утверждения 4.5 следует из утверждения 2.13 и теоремы A.

4.6. $(p - 1, |G|) = 1$.

Предположим, что утверждение 4.6 не верно. Тогда в силу утверждения 4.3 $E = P$ и $p > 2$. Из минимальности выбора пары (G, E) получаем, что P имеет единственный нециклический G-главный фактор E/V. Рассмотрим подгруппу L порядка p из P. Допустим, что L не $Q\mathfrak{U}$-центральна в G. По условию L SE-добавляема в G, т. е. найдется такая подгруппа D, что $G = LD$ и $L \cap D \leq L_{seG}$. Если $L \cap D = 1$, то $D \cap P$ нормальна в G и имеет индекс p в P, т. е. L $Q\mathfrak{U}$-центральна в G. Остается принять, что $L \cap D = L = L_{seG}$, т. е. L S-квазинормально вложена в G. Но так как $L \leq P \trianglelefteq G$, то в силу утверждения 2.4 L S-квазинормальна в G. Итак, мы получили, что каждая подгруппа порядка p из P либо $Q\mathfrak{U}$-центральна в G, либо S-квазинормальна в G. Если $O^p(G) = G$, то в силу утверждения 2.5 все подгруппы порядка p из P будут $Q\mathfrak{U}$-центральны в G, и тогда согласно утверждению 2.10 все G-главные факторы группы P будут циклическими. Значит, $O^p(G) \neq G$. Если P не содержится в $O^p(G)$, то P не содержится и в некоторой максимальной нормальной подгруппе M группы G индекса p, и тогда $MP = G$ и $M \cap P$ является G-инвариантной подгруппой, имеющей индекс p в P. Таким образом, $P \leq O^p(G) \neq G$.

Пусть H — произведение всех тех подгрупп порядка p из P, которые S-квазинормальны, но не $Q\mathfrak{U}$-центральны в G. Учитывая утверждение 2.5, видим, что H нормальна в G и является элементарной абелевой. Так как P нециклическая и $p > 2$, то $|H| > p$. Предположим, что $H \neq P$. Поскольку для пары (G, H) теорема справедлива, то все подгруппы порядка p из P $Q\mathfrak{U}$-

центральны в G, и можно применить утверждение 2.10. Рассмотрим теперь случай, когда $P = H$ — нециклическая элементарная абелева группа. Поскольку все максимальные подгруппы из P, содержащие V, S-квазинормальны и не нормальны в G, то в силу утверждения 2.5 число всех максимальных подгрупп в P/V делится на p. Но это противоречит [14] (теорема I.7.2).

Утверждение 4.6 доказано.

Завершение доказательства теоремы B. Поскольку G не p-нильпотентна и E не гиперцентральна в G, то в силу утверждений 2.2 и 2.8 G имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта $U = P_1Q$, силовская p-подгруппа $P_1 \neq 1$ которой содержится в P. Согласно утверждению 2.1 экспонента P_1 равна либо p, либо 4. Пусть L — такая циклическая подгруппа из P_1, что $|L| \in \{p, 4\}$ и L порождена элементом $x \in P_1 \setminus \Phi(P_1)$. Если $|L| = 4$, то в силу утверждений 2.1 и 2.9 L является кватернионной в P_1.

Допустим, что L $Q\mathfrak{U}$-центральна в G. Тогда L, в силу утверждения 4.6, будет Q-центральной в G, а согласно утверждению 2.13 и в U. Но тогда из утверждений 2.1 и 4.6 следует, что U p-нильпотентна, и мы получаем противоречие. Пусть теперь L SE-добавляема в G, а значит, согласно утверждению 2.7, и в U. Тогда найдется такая подгруппа T, что $U = LT$ и $L \cap T \leq L_{seG}$. С помощью утверждений 2.3 и 2.11 убеждаемся, что случай $L \cap T \neq L$ невозможен. Значит, $L \cap T = L$, и мы приходим к тому, что L S-квазинормально вложена в U. Но тогда, в силу утверждения 2.4, L S-квазинормальна в U. Согласно утверждению 2.5 $U = O^p(U)$ нормализует L, и теперь получаем, что $L\Phi(P_1)/\Phi(P_1)$ — главный фактор в U. В силу утверждения 2.1 U сверхразрешима и, согласно утверждению 2.3 p-нильпотентна. Противоречие.

Теорема B доказана.

5. Приложения теорем A и B. Доказанные теоремы и методы их доказательства допускают многие приложения. Следствиями теорем A и B являются результаты работ [5, 6]. Отметим новые результаты, которые получаются из теорем A и B в случае $G = E$.

***Следствие* 5.1.** *Пусть p — такой простой делитель $|G|$, что $(p-1, |G|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из G. Предположим, что SE-добавляемыми в G являются все максимальные подгруппы из P. Тогда G p-нильпотентна.*

***Следствие* 5.2.** *Пусть p — такой нечетный простой делитель $|G|$, что $(p-1, |G|) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа из G. Предположим, что все подгруппы порядка p из P SE-добавляемы в G. Тогда G p-нильпотентна.*

***Следствие* 5.3.** *Пусть P — силовская 2-подгруппа группы G. Предположим, что все подгруппы порядка 2 из P и все кватернионные подгруппы порядка 4 из P SE-добавляемы в G. Тогда G 2-нильпотентна.*

Н. Ито доказал [20], что группа нечетного порядка нильпотентна, если каждая ее подгруппа простого порядка содержится в центре этой группы. В [9] установлено, что группа нильпотентна, если каждая ее подгруппа простого порядка и каждая кватернионная подгруппа порядка 4 Q-центральны. Следствие 5.4 дополняет эти результаты.

***Следствие* 5.4.** *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Следующие условия эквивалентны*:

(a) *E 2-нильпотентна и $E/O_{2'}(E)$ содержится в гиперцентре группы $G/O_{2'}(E)$*;

(b) *каждая подгруппа порядка 2 и каждая кватернионная подгруппа порядка 4 из E Q-центральны в G*;

(c) *каждая подгруппа порядка 2 и каждая кватернионная подгруппа порядка 4 из E нормальны в G.*

***Следствие* 5.5.** *Пусть E — нормальная подгруппа из G. Предположим, что для каждой нециклической силовской подгруппы P из E выполнено следующее условие: SE-добавляемыми в G являются либо все максимальные подгруппы из P, либо все подгруппы простого порядка и кватернионные подгруппы порядка 4 из P. Тогда E сверхразрешима и все ее G-главные факторы циклические.*

Если $B \leq G$, то B_{sG} — S-ядро подгруппы B в G, т. е. подгруппа, порожденная всеми теми подгруппами из B, которые S-квазинормальны в G. Ясно, что B_{sG} S-квазинормальна в G. А. Н. Скиба называет подгруппу B S-добавляемой в G (см. [8]), если найдется подгруппа T такая, что $G = BT$ и $B \cap T \leq B_{sG}$. Очевидно, S-добавляемая подгруппа является SE-добавляемой. Поэтому из следствия 5.5 вытекает следующий результат А. Н. Скибы.

***Следствие* 5.6** (см. [8], теорема А). *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что для каждой нециклической силовской подгруппы P из E выполняется следующее условие: либо все максимальные подгруппы из P, либо все циклические подгруппы из P простого порядка и порядка 4 S-добавляемы в G. Тогда каждый G-главный фактор подгруппы E является циклическим.*

1. *Группы* с ограничениями для подгрупп // Под ред. С. Н. Черникова. – Киев: Наук. думка, 1971. – 228 с.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 205 с.
4. *Kegel O.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. – 1962. – **78**. – S. 205 – 221.
5. *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* Sufficient conditions for supersolvability of finite groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 1988. – **127**. – P. 113 – 118.
6. *Al-Sharo Kh. A., Shemetkova O.* An application of the concept of a generalized central element // Algebra and Discrete Math. – 2007. – **4**. – P. 1 – 10.
7. *Skiba A. N.* On the SE-core of subgroups of a finite group // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – **4**, № 5. – С. 39 – 45.
8. *Skiba A. N.* On two questions of L.A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups // J. Group Theory. – 2010. – **13**. – P. 841 – 850.
9. *Шеметкова О. Л.* О конечных группах с Q-центральными элементами простого порядка // Труды Ин-та математики (Минск). – 2008. – **16**, № 1. – С. 97 – 99.
10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
11. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
12. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: an introduction. – New York: Springer-Verlag, 2004. – 388 p.
13. *Isaacs I. Martin* Finite group theory. – Rhode Island: Providence, 2008. – 350 p.
14. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1967. – 793 S.
15. *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. – 1963. – **82**. – S. 125 – 132.
16. *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. – 1998. – **82**. – P. 285 – 293.
17. *Shemetkova O. L.* Finite groups with a system of generalized central elements // Algebra and Discrete Math. – 2004. – **4**. – P. 59 – 71.
18. *Al-Sharo Kh. A., Molokova E. A., Shemetkov L. A.* Factorizable groups and formations // Acta Appl. Math. – 2005. – **85**. – P. 3 – 10.
19. *Gross F.* Conjugacy of odd Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. – 1987. – **19**. – P. 311 – 319.
20. *Ito N.* A note on (LM)-groups of finite orders // Kodai Math. Semin. Repts. – 1951. – **1-2**. – P. 1 – 6.

Получено 19.02.12