УДК 517.9

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДВОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

The paper deals with the Cauchy problem for singularly perturbed Korteweg – de-Vries equation with variable coefficients. The notion of manifold of the initial data under which the problem possesses an asymptotic two-phase solitonlike solution is proposed.

Описано множество начальных условий, при которых задача Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами имеет асимптотическое двухфазное солитоноподобное решение. Предложено понятие многообразия начальных значений для упомянутой задачи Коши, при которых такое решение существует.

1. Вступ. Класичні методи нелінійної механіки [1 – 3] є одним із найбільш ефективних підходів до дослідження нелінійних систем за наявності збурень. Ці методи дозволяють отримати наближені (в певному сенсі) розв'язки досліджуваних задач. Більш того, у багатьох випадках такий підхід є єдино можливим методом аналізу розв'язків. Це також стосується і нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними в сучасній теоретичній і математичній фізиці, яскравим прикладом яких є рівняння Кортевега – де Фріза.

Рівняння Кортевега – де Фріза вивчалося багатьма авторами (див., наприклад, монографії [4 – 8] та цитовану в них літературу). Значну увагу рівнянню Кортевега – де Фріза дослідники почали приділяти після появи праць [9, 10], з яких, власне, розпочався розвиток нового ефективного методу побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними — методу оберненої задачі розсіювання (метод ОЗР) [4], за допомогою якого було отримано важливий фізично змістовний клас розв'язків, так званих одно-, двота багатосолітонні розв'язки, та ін.

У період інтенсивного розвитку цього методу рівняння, що інтегруються методом ОЗР, одночасно вивчалися і у випадку наявності у них малого параметра при старших похідних. Зокрема, у [11 – 14] на нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними інтегровного типу було узагальнено класичний метод ВКБ, який свого часу був запропонований для побудови наближених розв'язків звичайних лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Це узагальнення отримало назву „нелінійний метод ВКБ" [13, с. 5].

У [15, 16] розглянуто задачу про модуляцію нелінійних хвиль, зокрема тих, що описуються рівнянням Кортевега – де Фріза. При цьому досліджувані рівняння не містили явно малий параметр ε, але наявність параметра ε у формулах для розв'язків спеціального типу проявлялася через малі деформації асоційованих з ними ріманових поверхонь.

У [17 – 22] проведено дослідження дещо іншої проблеми, що стосується знаходження границі при $\varepsilon \to 0$ розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза. При цьому у [17 – 19] суттєво використовувалося припущення про те, що початкова функція достатньо швидко прямує до нуля при $|x| \to +\infty$, є недодатною і має скінченну кількість критичних точок. Згодом клас початкових функцій було розширено [20].

Використовуючи можливість зведення масштабним перетворенням досліджуваного рівняння до класичного рівняння Кортевега – де Фріза, в [17 – 19] за допомогою методу оберненої задачі розсіювання отримано формули для розв'язків вихідної задачі Коші і знайдено слабку границю цих розв'язків при $\varepsilon \to 0$. При застосуванні методу ОЗР в [17] для знаходження власних функцій сингулярно збуреного оператора Шредінгера було використано класичний метод ВКБ.

Згадана вище проблема про знаходження границі при $\varepsilon \to 0$ розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза також досліджувалася чисельними методами [21, 22].

У низці праць розглядалося також рівняння Кортевега – де Фріза, яке залежить від малого параметра регулярним чином. Зокрема, в [23] вивчалися солітонні розв'язки рівняння вигляду

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon f[u] \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

де $f[u]$ — деяка нескінченно диференційовна функція, $u_0(x)$ — швидкоспадна функція.

Для випадку, коли $f[u]$ є поліномом вигляду

$$f[u] = \sum_{k=0}^{q} a_k \prod_{s=0}^{j_k} \left(\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right)^{p_{s_k}},$$

де $a_k \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $p_{s_k} \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\prod_{s=0}^{j_k} p_{s_k} \neq 0$, $k = \overline{0,q}$, у [23] отримано асимптотичний розв'язок рівняння (1) у вигляді малого збурення солітонного розв'язку класичного рівняння Кортевега – де Фріза ($\varepsilon = 0$ в (1)), який має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\bar{x}), \qquad \bar{x} = x - (4\kappa^2 - \varepsilon a \kappa^4)\, t - x_0,$$

де κ, a — деякі дійсні параметри, при цьому головний член асимптотики $u_0(\bar{x}) = -2\kappa^2 ch^{-2}\kappa\bar{x}$.

В [24, 25] вивчено задачу Коші для рівняння вигляду (1) з початковою умовою

$$u(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=0} = V_N(x,t)\Big|_{t=0} + \varepsilon w(x,\varepsilon), \tag{3}$$

де $V_N(x,t)$ — N-солітонний розв'язок незбуреного ($\varepsilon = 0$) рівняння; $w(x,\varepsilon)$ — деяка гладка функція, яка для всіх $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ задовольняє співвідношення $w(x,\varepsilon) = O(x^{-2})$ при $x \to \pm\infty$.

Відомо, що N-солітонний розв'язок класичного рівняння Кортевега – де Фріза, тобто функція $V_N(x,t)$, залежить від $2N$ дійсних параметрів $B_0 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)$, $S_0 = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ і при $\xi = |x| + t \to \infty$ має асимптотику вигляду [4 – 7]

$$V_N(x,t) = \sum_{j=1}^{N} 2\beta_j^2\ ch^{-2}\big[\beta_j x - 4\beta_j^3 t + s_j\big] + O\left(e^{-\delta(1+|x|+t)}\right), \tag{4}$$

де $\delta > 0$ — деяка стала; величини β_j, $j = \overline{1, N}$, задовольняють нерівність $\beta_j > \beta_{j+1} > 0$, $j = \overline{1, N-1}$, s_j, $j = \overline{1, N}$, — деякі (довільні) сталі.

Асимптотичний розв'язок рівняння вигляду (1) побудовано у [24] за допомогою узагальнення методу Крилова – Боголюбова, а саме, у вигляді

$$U(x,t,\varepsilon) = U_0(x,t;\tau,\varepsilon) + \varepsilon U_1(x,t;\tau,\varepsilon) + \varepsilon^2 U_2(x,t;\tau,\varepsilon) + \ldots, \qquad \tau = \varepsilon t. \tag{5}$$

При цьому головний член асимптотики (5) має структуру N-солітонного розв'язку класичного рівняння Кортевега – де Фріза при $\xi = |x| + t \to +\infty$, тобто аналогічно (4) зображується формулою

$$U_0(x,t;\tau,\varepsilon) = V(\sigma; B, S) + V_0(x,t;B,S), \tag{6}$$

де

$$V(\sigma; B, S) = \sum_{j=1}^{N} 2\beta_j^2 \; ch^{-2}(\beta_j \sigma_j + s_j), \qquad V_0(x,t;B,S) = O\left(e^{-\delta(1+|x|+t)}\right), \tag{7}$$

$\delta > 0$ — деяка стала, а вектор-функції $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)$, $S = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ мають асимптотичне зображення вигляду

$$B = B(\tau,\varepsilon) = B_0(\tau) + \varepsilon B_1(\tau) + \varepsilon^2 B_2(\tau) + \ldots,$$

$$S = S(\tau,\varepsilon) = S_0(\tau) + \varepsilon S_1(\tau) + \varepsilon^2 S_2(\tau) + \ldots, \qquad \tau = \varepsilon t.$$

У формулі (6) величини β_j, $j = \overline{1, N}$, є функціями повільного часу $\tau = \varepsilon t$ і малого параметра ε; швидкі змінні σ_j, $j = \overline{1, N}$, визначаються співвідношеннями

$$\sigma_j = x - \frac{4}{\varepsilon} \int_0^t \beta_j^2(\tau,\varepsilon) d\tau, \qquad j = \overline{1, N}.$$

У розвиток ідей праць [24, 25] у [26 – 28] розглянуто рівняння (1) у випадку, коли права частина в (1) має вигляд $\varepsilon^2 f(\varepsilon x) \cos\left(S(\varepsilon^2 x, \varepsilon^2 t)/\varepsilon^2\right)$. При цьому розв'язок відповідного рівняння Кортевега – де Фріза зі збуренням будувався за допомогою нелінійного методу ВКБ [12 – 14].

У всіх згаданих вище працях суттєво використовувалося те, що у випадку сингулярних збурень досліджуване рівняння було рівнянням Кортевега – де Фріза [11, 15, 17 – 20] або ж мало спеціальний вигляд [13, 14, 29], а у випадку регулярних збурень породжуюче (при $\varepsilon = 0$) рівняння було рівнянням Кортевега – де Фріза (зі сталими коефіцієнтами), широкий клас точних розв'язків якого побудовано методом оберненої задачі розсіювання. Оскільки існуючі в даний час методи дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними у випадку наявності змінних коефіцієнтів, як правило, не дають можливості знайти їх розв'язки в явному вигляді, то при наявності малих збурень у таких рівнянь практично єдиним методом для отримання наближених (аналітичних) розв'язків є асимптотичні методи. Зауважимо, що побудова асимптотичних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами на відміну від задач, що досліджені в [11– 29], потребує інших підходів.

У даній статті розглядається задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \tag{8}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = f(x,\varepsilon), \tag{9}$$

де

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k, \qquad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k, \tag{10}$$

функції $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$, $k \geq 0$.

Дослідженню задач Коші для рівняння Кортевега – де Фріза і його узагальнень присвячено значну кількість праць, зокрема у [30] розглянуто питання про існування і єдиність його розв'язку. У низці праць (див. посилання в [5 – 8, 16]) отримано розв'язок задачі Коші у випадку швидкоспадних початкових умов, у [31 – 33] вивчено задачу Коші з початковими умовами типу сходинки. Крім того, у [34, 35] розглянуто питання про існування розв'язку задачі Коші для узагальнених рівнянь Кортевега – де Фріза, зокрема для рівняння вигляду

$$u_t + u_{xxx} + a(u,u_x) = F(x,t), \qquad x \in \mathbf{R},$$

доведено існування його розв'язку у просторі швидкоспадних функцій [34], а для рівняння вигляду

$$u_t + u_{xxx} + a(u)u_x = 0, \qquad x \in \mathbf{R},$$

де $a(u)$ — деяка нескінченно диференційовна функція, що задовольняє певні умови, у випадку, коли початкова функція належить простору Соболєва H^s для деякого $s > \dfrac{3}{2}$, показано [34], що задача Коші має єдиний розв'язок у просторі $C([0,T);H^s)\cap C^1([0,T);H^{s-3})$, де значення T залежить від $||\varphi||_{H^s}$. Всі ці розв'язки в основному є регулярними, тобто гладкими і такими, що мають певну (скінченну) асимптотику при $|x| \to +\infty$, або ж належать спеціальному класу функцій.

З іншого боку, рівняння Кортевега – де Фріза має розв'язки й іншої природи, зокрема такі, що мають певну особливість на одній або кількох просторових кривих. Такі розв'язки називаються сингулярними і вивчалися, зокрема, в [36 – 38].

У [37, 38] розглянуто сингулярні розв'язки рівняння Кортевега – де Фріза як у випадку задачі Коші, так і у випадку так званих біжучих хвиль. При цьому для задачі Коші

$$u_t = uu_x - u_{xxx}, \qquad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R},$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

вказано умови, за яких її розв'язок може існувати лише на скінченному (часовому) інтервалі (див. також [35]) і „руйнується" (за скінченний час, при відповідному виборі початкової функції в умові Коші), причому таке руйнування може мати або „грубий" характер, тобто коли $|u(t,x)| \to +\infty$ при $(t,x) \to (t_*, x_*) \in \mathbf{R}^2$, або ж більш „м'який" характер типу градієнтної катастрофи, тобто коли $|u_x(t,x)| \to +\infty$ при $(t,x) \to (t_*, x_*) \in \mathbf{R}^2$, де (t_*, x_*) — деяка скінченна точка.

Питання про існування розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вивчалося в [39 – 41], де отримано умови існування узагальнених розв'язків даної задачі Коші і умови, при яких ця задача має розв'язок у просторі швидкоспадних функцій. Зокрема, в [39] доведено наступну теорему про існування розв'язку задачі Коші вигляду

$$u_t + u_{xxx} = g(t,x,u)u_x + f(t,x,u), \tag{11}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{12}$$

Теорема [39]. *Припустимо, що для деякого $T > 0$ виконуються умови*:

1) *для довільного $r > 0$ функції $g(t,x,u),\ f(t,x,u) \in C^\infty([0;T] \times \mathbf{R} \times [-r;r])$;*

2) *існують такі сталі $\beta \geq 0,\ 0 \leq p < 4$, що при всіх $(t,x,u) \in (0;T) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ виконуються умови*

$$|g(t,x,u)| \leq \beta\left(1 + |u|^p\right), |g_t(t,x,u)| \leq \beta\left(u^4 + 1\right),$$

$$|g_x(t,x,u)| \leq \beta, \qquad |g_{xx}(t,x,u)| \leq \beta\left(u^2 + 1\right),$$

$$|f_u(t,x,u)| \leq \beta, \qquad |f_{xu}(t,x,u)| \leq \beta\left(u^2 + 1\right);$$

3) *функція $u_0(x) \in S,\ f(t,x,0) \in C^\infty(0,T;S)$, де S — простір швидкоспадних функцій.*

Тоді задача Коші (11), (12) *має єдиний розв'язок у просторі $C^\infty(0,T;S)$.*

У даній статті з використанням наведеної вище теореми розглядається питання про побудову асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку [42] задачі Коші (8), (9).

Як відомо, задача Коші для рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами має двофазовий солітонний розв'язок при відповідному виборі початкових умов. Цілком природно виникає питання: за яких умов на функцію $f(x,\varepsilon)$ у початковій умові (9) задача Коші (8), (9) має асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок?

З огляду на ідеї нелінійного методу ВКБ у цій статті описано множину початкових умов, за яких згадана вище задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами має асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок. Запропоновано поняття многовиду початкових значень для даної задачі Коші, за яких такий розв'язок існує. Отримано у явному вигляді головний член асимптотичного розв'язку, знайдено диференціальні рівняння для старших членів цього розв'язку і показано їх розв'язність у просторі швидкоспадних за швидкоосцилюючими змінними функцій, доведено теореми про оцінку різниці між точним розв'язком задачі (8), (9) і побудованим асимптотичним розв'язком. Аналогічну задачу для випадку асимптотичного однофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (8), (9) розглянуто в [43].

2. Основні припущення і позначення. Нагадаємо, що простір швидкоспадних функцій $S = S(\mathbf{R})$ — це простір таких нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R}$ функцій, що для довільних цілих чисел $m, n \geq 0$ виконується умова [44]

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x^m \frac{d^n}{dx^n} u(x) \right| < +\infty.$$

Через $C^{\infty}(0, T; S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $\mathbf{R} \times [0; T]$ функцій $u(x, t)$, для яких при довільних цілих m, $k > 0$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(D_x^m D_t^k u \right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + x^2\right)^m \left(D_t^k u \right)^2 dx < \infty.$$

Аналогічно [14, 29] позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}$, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, p рівномірно щодо (x, t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$ виконуються такі дві умови:

1) справджується співвідношення

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x, t, \tau) = 0, \qquad (x, t) \in K;$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x, t)$, що

$$\lim_{\tau \to -\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \big(f(x, t, \tau) - f^-(x, t) \big) = 0, \qquad (x, t) \in K.$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ — лінійний підпростір простору $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$ таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau)$, $(x, t, \tau) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}$, що рівномірно щодо змінних (x, t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$ виконується умова

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x, t, \tau) = 0.$$

Позначимо за допомогою $G_2^0 = G_2^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$, $(x, t, \tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, для яких існують такі функції $f_1^{\pm} = f_1^{\pm}(x, t, \tau_2)$, $f_2^{\pm} = f_2^{\pm}(x, t, \tau_1) \in G_1^0$, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, q, p_1, p_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення

$$\lim_{\tau_1 \to \pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \big(f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_1^{\pm}(x, t, \tau_2) \big) = 0, \qquad (x, t) \in K,$$

$$\lim_{\tau_2 \to \pm\infty} \tau_2^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \big(f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_2^{\pm}(x, t, \tau_1) \big) = 0, \qquad (x, t) \in K.$$

Нехай $G_2 = G_2(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ — лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$, $(x, t, \tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, що існують функції $f_1^{\pm} = f_1^{\pm}(x, t, \tau_2)$, $f_2^{\pm} = f_2^{\pm}(x, t, \tau_1) \in G_1$ та такі нескінченно диференційовні функції $u_1^{\pm}(x, t)$ та $u_2^{\pm}(x, t)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел α, q, p_1, p_2, β_1, β_2 мають місце співвідношення

$$\lim_{\tau_k\to\pm\infty}\tau_k^{p_k}\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial\tau_1^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial\tau_2^{\beta_2}}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}}\left(f(x,t,\tau_1,\tau_2)-f_k^{\pm}(x,t,\tau_2)-u_k^{\pm}(x,t)\right)=0,$$

$$(x,t)\in K, \qquad k=1,\,2.$$

Означення 1 [42]. *Функція $u(x,t,\varepsilon)$ називається двофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N\geq 0$ вона має вигляд*

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right)+O(\varepsilon^{N+1}), \tag{13}$$

де

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right),\ \tau_1=\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\ \ \tau_2=\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon};$$

функції $S_k=S_k(x,t)\in C^\infty\left(\mathbf{R}\times[0;T]\right)$, *причому* $\left.\dfrac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k}\neq 0;$ $\Gamma_k=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T],$ $S_k(x,t)=0\}, k=1,2; u_j(x,t), j=\overline{1,N},$ *— нескінченно диференційовні функції;* $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)\in$ $\in G_2^0$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$.

3. Основний результат. Для отримання умов на початкову функцію в початковій умові (9) задачі Коші (8), (9) скористаємося загальним виглядом [42] асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (8)

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}), \tag{14}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right),\ \ \tau_1=\frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon},\ \tau_2=\frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon},$$

$x=\varphi_s(t)$, $t\in[0;T]$, $s=1,\,2,$ — деякі функції.

Регулярна частина $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$ асимптотики (14) визначається із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \tag{15}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x,t)u_j\frac{\partial u_0}{\partial x}+b_0(x,t)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}=F_j(x,t), j=\overline{1,N}, \tag{16}$$

де функції $F_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, знаходяться рекурентним чином за функціями $u_0(x,t), u_1(x,t),\ldots$ $\ldots,u_{j-1}(x,t)$.

Питання про існування розв'язку системи (15), (16) і алгоритм її розв'язування детально розглянуто в [45–47].

Сингулярна частина $V_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$ асимптотики (14) визначається з системи диференціальниих рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_2^3} + \left[\varphi_1'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} +$$

$$+ \left[\varphi_2'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} - b_0(x,t)V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2}\right] = 0, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_2^3} +$$

$$+ \left[\varphi_1'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \left[\varphi_2'(t)a_0(x,t) - b_0(x,t)u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2} -$$

$$-b_0(x,t)\left[V_j\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + V_j\frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} + V_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + V_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau_2}\right] = \mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2), \qquad (18)$$

де функції $\mathcal{F}_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $V_1(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $\ldots$, $V_{j-1}(x,t,\tau_1,\tau_2)$.

Рівняння (17) є квазілінійним однорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними третього порядку щодо змінних τ_1, τ_2, яке містить t в якості параметра. Аналогічно, рівняння (18) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними щодо τ_1, τ_2. Алгоритм розв'язування системи (17), (18) детально описано в [42]. Зауважимо, що якщо розв'язок рівняння (17) належить простору G_2^0, то розв'язок кожного з рівнянь (18) належить простору G_2 (див. означення 1).

При виконанні умов узгодженості [42]

$$a_0(\varphi_1(t),t) = a_0(\varphi_2(t),t) =: a_0(t), \qquad b_0(\varphi_1(t),t) = b_0(\varphi_2(t),t) =: b_0(t), \qquad (19)$$

$$u_0(\varphi_1(t),t) = u_0(\varphi_2(t),t) =: u_0(t)$$

та

$$\mathcal{F}_{k_1}(t,\tau_1,\tau_2) = \mathcal{F}_{k_2}(t,\tau_1,\tau_2), \qquad k = \overline{1,N}, \qquad (20)$$

де криві $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$ задовольняють умову $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, функції $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,N}$, можна визначити на кривих $x = \varphi_s(t)$, $s = 1,2$, як розв'язки відповідно диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_2^3} + \left[\varphi_1'(t)a_0(t) - b_0(t)u_0(t)\right]\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} +$$

$$+ \left[\varphi_2'(t)a_0(t) - b_0(t)u_0(t)\right]\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} - b_0(t)V_{0s}\left[\frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2}\right] = 0, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^3} + 3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3\frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_2^3} +$$

$$+\left[\varphi_1'(t)a_0(t)-b_0(t)u_0(t)\right]\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_1}+\left[\varphi_2'(t)a_0(t)-b_0(t)u_0(t)\right]\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_2}-$$

$$-b_0(t)\left[V_{js}\frac{\partial V_{0s}}{\partial\tau_1}+V_{js}\frac{\partial V_{0s}}{\partial\tau_2}+V_{0s}\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_1}+V_{0s}\frac{\partial V_{js}}{\partial\tau_2}\right]=\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2), \tag{22}$$

де $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)=V_0(\varphi_s(t),t,\tau_1,\tau_2)$, $V_{js}(t,\tau_1,\tau_2)=V_j(\varphi_s(t),t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, $s=1,2$; функції $\mathcal{F}_{js}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, $s=1,2$, визначаються після знаходження функцій $V_{0s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $V_{1s}(t,\tau_1,\tau_2),\ldots,V_{j-1,s}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, $s=1,2$. Зокрема, при $j=1$ маємо

$$\mathcal{F}_{1s}(t,\tau_1,\tau_2)=b_0(\varphi_s(t),t)V_0^s u_{0x}(\varphi_s(t),t)+a_0(\varphi_s(t),t)\frac{\partial V_0^s}{\partial t}+$$

$$+\left[\tau_s b_{0x}(\varphi_s(t),t)V_0^s+b_1(\varphi_s(t),t)V_0^s+\tau_s b_0'(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)+\right.$$

$$+b_1(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)+\tau_s b_0(\varphi_s(t),t)u_{0x}(\varphi_s(t),t)+$$

$$\left.+b_0(\varphi_s(t),t)u_1(\varphi_s(t),t)+a_{0x}(\varphi_s(t),t)\tau_s(-\varphi_1'(t))+a_1(\varphi_s(t),t)(-\varphi_1'(t))\right]\frac{\partial V_0^s}{\partial\tau_1}+$$

$$+\left[\tau_s b_{0x}(\varphi_s(t),t)V_0^s+b_1(\varphi_s(t),t)V_0^s+\tau_s b_{0x}(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)+\right.$$

$$+b_1(\varphi_s(t),t)u_0(\varphi_s(t),t)+\tau_s b_0(\varphi_s(t),t)u_{0x}(\varphi_s(t),t)+b_0(\varphi_s(t),t)u_1(\varphi_s(t),t)+$$

$$\left.+a_{0x}(\varphi_s(t),t)\tau_s(-\varphi_2'(t))+a_1(\varphi_s(t),t)(-\varphi_2'(t))\right]\frac{\partial V_0^s}{\partial\tau_2},\qquad s=1,2. \tag{23}$$

Зауважимо, що умова узгодженості (20) при $j=1$ виконується, наприклад, у випадку, коли [42]

$$a_{0x}(\varphi_1(t),t)=a_{0x}(\varphi_2(t),t)=0,\qquad a_1(\varphi_1(t),t)=a_1(\varphi_2(t),t),$$

$$b_{0x}(\varphi_1(t),t)=b_{0x}(\varphi_2(t),t)=0,\qquad b_1(\varphi_1(t),t)=b_1(\varphi_2(t),t),$$

$$u_{0x}(\varphi_1(t),t)=u_{0x}(\varphi_2(t),t)=0,\qquad t\in[0;T].$$

При виконанні умов узгодженості (19), (20) справджується рівність $V_{j1}(t,\tau_1,\tau_2)=V_{j2}(t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, а двосолітонний розв'язок рівняння (21) має вигляд

$$V_0(t,\tau_1,\tau_2)=\bar{V}_0(\xi,\eta)=-2\left[2\kappa_1c_1^2e^{-2\kappa_1\xi}+2\kappa_2c_2^2e^{-2\kappa_2\xi}-\right.$$

$$-2c_1^2c_2^2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{\kappa_1\kappa_2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi}-\frac{c_1^4c_2^2(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_2}{2\kappa_1^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-4\kappa_1-2\kappa_2)\xi}-$$

$$\left.-\frac{c_1^2c_2^4(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_1}{2\kappa_2^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-2\kappa_1-4\kappa_2)\xi}\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{c_1^2}{2\kappa_1}e^{-2\kappa_1\xi}+\frac{c_2^2}{2\kappa_2}e^{-2\kappa_2\xi}+\frac{c_1^2c_2^2(\kappa_1-\kappa_2)^2}{4\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi}\right]^{-2}, \tag{24}$$

де

$$\xi = \left(\frac{1}{6}b_0(t)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \qquad \eta = \left(\frac{1}{6}b_0(t)\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}. \tag{25}$$

Тут $\kappa_s(t) = \left(\frac{1}{6}b_0(t)\right)^{-1/2} \sqrt{\gamma_s(t)}$, $\gamma_s(t) = -\varphi_s'(t)a_0(t) + b_0(t)u_0(t)$, $s = 1, 2$; $c_s(\eta) = c_s(0)\exp\left(\kappa_s^3(t)\eta\right)$, де $c_s(0)$, $s = 1, 2$, — довільні додатні сталі, $b_0(t) > 0$, $\gamma_s(t) > 0$, $t \in [0; T]$, $s = 1, 2$.

Величини $\kappa_s(t)$, $s = 1, 2$, належать множині власних значень оператора Штурма – Ліувілля, що асоційований із рівнянням Кортевега – де Фріза [4]. Припускається, що $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$, $t \in [0; T]$, тобто заміна змінних (25) є невиродженою.

Для задачі про побудову головного члена асимптотики (14) задачі Коші (8), (9) формули (24), (25) дозволяють отримати достатні умови для функції в початковій умові (9) задачі Коші (8), (9). Дійсно, поклавши $t = 0$, $\tau_1 = x/\varepsilon$, $\tau_2 = x/\varepsilon$ в (24), отримаємо, що функція $u(x, 0, \varepsilon) = f(x, \varepsilon)$ повинна належати множині

$$\mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon) = \Bigg\{ -2\Bigg[2\kappa_1^0 C_1 e^{-2\kappa_1^0\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}} + 2\kappa_2^0 C_2 e^{-2\kappa_2^0\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}} -$$

$$-2C_1C_2\frac{(\kappa_1^0 - \kappa_2^0)^2}{\kappa_1^0\kappa_2^0} e^{-2(\kappa_1^0+\kappa_2^0)\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}} - \frac{C_1^2C_2(\kappa_1^0-\kappa_2^0)^2\kappa_2^0}{2(\kappa_1^0)^2(\kappa_1^0+\kappa_2^0)^2} e^{(-4\kappa_1^0-2\kappa_2^0)\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}} -$$

$$-\frac{C_1C_2^2(\kappa_1^0-\kappa_2^0)^2\kappa_1^0}{2(\kappa_2^0)^2(\kappa_1^0+\kappa_2^0)^2} e^{(-2\kappa_1^0-4\kappa_2^0)\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}}\Bigg] \times \Bigg[1 + \frac{C_1}{2\kappa_1^0} e^{-2\kappa_1^0\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{C_2}{2\kappa_2^0} e^{-2\kappa_2\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}} +$$

$$+\frac{C_1C_2(\kappa_1^0-\kappa_2^0)^2}{4\kappa_1^0\kappa_2^0(\kappa_1^0+\kappa_2^0)^2} e^{-2(\kappa_1^0+\kappa_2^0)\alpha_0\frac{x}{\varepsilon}}\Bigg]^{-2}, C_1, C_2 > 0,\ C_1 \neq C_2\Bigg\}, \tag{26}$$

де $\alpha_0 = \left(\frac{1}{6}b_0(0)\right)^{1/2}$, $\kappa_s^0 = \kappa_s(0)$, $s = 1, 2$, а функції $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$, $t \in [0; T]$, такі, що виконуються умови (19).

Множину $\mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$ можна назвати многовидом початкових умов для задачі про побудову головного члена асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (8), (9).

Наведені вище міркування та метод побудови [42] асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (8), (9) дозволяють сформулювати наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*:

1) *функції* $a_0(x,t), b_0(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$ *і такі, що* $a_0(x,t)b_0(x,t) \neq 0$, $(x,t) \in \mathbf{R}\times[0;T]$, *а функції* $x = \varphi_s(t) \in C^\infty([0;T])$, $s = 1, 2$, *і такі, що* $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$;

2) *задача Коші для квазілінійного рівняння* (15) *з початковою умовою* $u_0(x, 0) = g_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *де функція* $g_0(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, *має розв'язок* $u_0(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$;

3) *виконуються умови узгодженості* (19), *де* $b_0(t) > 0$, $t \in [0; T]$; $\gamma_s(t) > 0$, $t \in [0; T]$, $s = 1, 2$;

4) *в умові* (9) *початкова функція* $f(x, \varepsilon) = g_0(x) + f_0(x, \varepsilon)$, *де* $f_0(x, \varepsilon) \in \mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$.

Тоді головний член асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші $(8), (9)$ *має вигляд* (14) *і задовольняє задачу Коші* $(8), (9)$ *з точністю* $O(1)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*:

1) *справджуються умови теореми* 1;

2) *функції* $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ *мають вигляд* $a(x,t,\varepsilon) = a(x,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon) = b(t,\varepsilon)$ *і функція* $a(x,\varepsilon)$ *задовольняє умову* $c_1 \le a(x,\varepsilon) \le c_2$, $x \in \mathbf{R}$, *де сталі* c_1 *та* c_2 *такі, що* $c_1 c_2 > 0$;

3) *розв'язок задачі Коші для рівняння* (15) *з початковою умовою* $u_0(x,0) = g_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *де функція* $g_0(x) \in S(\mathbf{R})$, *належить простору* $C^\infty(0,T;S)$.

Тоді для точного та наближеного розв'язків задачі Коші $(8), (9)$ *має місце оцінка вигляду*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t,\varepsilon) - Y_0(x,t,\varepsilon)|^2\, dx \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h^2(x,\varepsilon) dx, \qquad t \in [0;\varepsilon T_2], \tag{27}$$

де $h(x,\varepsilon)$ — *деяка така швидкоспадна функція, що* $h(x,\varepsilon) = O(\varepsilon)$, T_2 — *деяке додатне число.*

Доведення. Не втрачаючи загальності розглянемо випадок, коли $a(x,\varepsilon) > 0$, і доведемо оцінку (27). З цією метою розглянемо різницю $\omega(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) - Y_0(x,t,\varepsilon)$, підставимо $u(x,t,\varepsilon) = \omega(x,t,\varepsilon) + Y_0(x,t,\varepsilon)$ у рівняння (8), домножимо отримане співвідношення на $\omega(x,t,\varepsilon)$ та зінтегруємо його в межах від $-\infty$ до $+\infty$. Отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(a(x,\varepsilon)\omega^2(x,t,\varepsilon)\right) dx + \frac{1}{2} b(t,\varepsilon) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Y_0}{\partial x}\, \omega^2(x,t,\varepsilon) dx +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x,t,\varepsilon)\omega(x,t,\varepsilon) dx = 0, \tag{28}$$

де

$$g(x,t,\varepsilon) = b(t,\varepsilon) Y_0 \frac{\partial Y_0}{\partial x} + a(x,\varepsilon)\frac{\partial Y_0}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 Y_0}{\partial x^3}.$$

Очевидно, що функція $g(x,t,\varepsilon)$ належить простору $C^\infty(0,T;S)$ і при цьому задовольняє асимптотичне співвідношення $g(x,t,\varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

З рівності (28), використовуючи нерівність Гельдера [48], отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}||\sqrt{a(x,\varepsilon)}\,\omega(x,t,\varepsilon)||^2 \le C_1||\sqrt{a(x,\varepsilon)}\omega(x,t,\varepsilon)||^2 + C_2||\sqrt{a(x,\varepsilon)}\,\omega(x,t,\varepsilon)||, \tag{29}$$

де позначено $||\cdot||^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\cdot|^2 dx$ і

$$C_1 = \max_{t\in[0;T]}\left(|b(t,\varepsilon)| \max_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{1}{a(x,\varepsilon)}\frac{\partial Y_0}{\partial x}\right|\right), \qquad C_2 = 2\max_{t\in[0;T]}\left|\left|\frac{g(x,t,\varepsilon)}{\sqrt{a(x,\varepsilon)}}\right|\right|.$$

Очевидно, що згідно з побудовою функції $Y_0(x,t,\varepsilon)$ для сталих C_1, C_2 мають місце асимптотичні співвідношення

$$C_1 = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad C_2 = O(1), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Нерівність (29) еквівалентна нерівності

$$\frac{dy}{dt} \le \frac{1}{2}\,C_1 y + \frac{1}{2}\,C_2, \qquad y(0) = 0, \tag{30}$$

де $y = y(t,\varepsilon) = ||\sqrt{a(x,\varepsilon)}\,\omega(x,t,\varepsilon)||$.

Як і при доведенні леми Гронуолла – Беллмана [49], домножимо обидві частини нерівності (30) на $e^{-C_1 t/2}$ і зінтегруємо в межах від 0 до t. В результаті отримаємо

$$\int\limits_0^t \frac{d}{dt}\left(ye^{-C_1 t/2}\right)dt \le -\frac{C_2}{C_1}\left(e^{-C_1 t/2} - 1\right),$$

звідки знаходимо

$$y(t) \le \frac{C_2}{C_1}\left(e^{C_1 t/2} - 1\right).$$

Отже, має місце нерівність

$$||\sqrt{a(x,\varepsilon)}\,\omega|| \le 2\varepsilon C_0\left(e^{C_1 t/2} - 1\right)\left|\left|\frac{g(x,t,\varepsilon)}{\sqrt{a(x,\varepsilon)}}\right|\right|,$$

де C_0 — деяка стала, звідки й випливає нерівність (27).

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** У теоремі 2 апріорі припускається існування розв'язку задачі Коші (8), (9) у просторі $C^\infty(0,T;S)$, де $T > 0$ — деяке число. Достатні умови існування такого розв'язку отримано в [39].

4. Старші члени асимптотичного розв'язку для задачі Коші (8), (9). Старші члени для асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (8), (9) визначаються з системи рівнянь (22), яку потрібно доповнити відповідними початковими умовами. За допомогою заміни змінних (25) кожне з рівнянь (22) зводимо до рівняння вигляду [42]

$$\frac{\partial^3 \bar V_j}{\partial \xi^3} - b_0(t)\left(\frac{\partial \bar V_0}{\partial \xi}\bar V_j + \frac{\partial \bar V_j}{\partial \xi}\bar V_0\right) + \frac{\partial \bar V_j}{\partial \eta} = \bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta), \qquad j = \overline{1,N}, \tag{31}$$

де функції $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{0,N}$, $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{1,N}$, отримано з $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{0,N}$, $\mathcal{F}_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,N}$, в результаті заміни змінних (25). Якщо функція $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{1,N}$, при кожному $\eta \ge 0$ належить простору швидкоспадних щодо ξ функцій, то рівняння (31) має розв'язок $\bar V_j(t,\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in \mathbf{R} \times [0;T_1]$, $j = \overline{1,N}$, де $T_1 > 0$ — деяке число, який належить простору швидкоспадних щодо змінної ξ функцій [39].

Розв'язок рівняння (31) належить простору швидкоспадних щодо ξ функцій, якщо початкова умова для рівняння (31) має властивість

$$\bar V_j(t,\xi,0) = f(\xi) \in S(\mathbf{R}). \tag{32}$$

Звідси випливає, що асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок задачі Коші (8), (9) існує, наприклад, у випадку, коли початкова функція в (9) має вигляд

$$f(x,\varepsilon) = f_0(x,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k f_k(x,\varepsilon), \tag{33}$$

де $f_0(x,\varepsilon) \in \mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$, $f_k(x,\varepsilon) = f_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $f_k(\eta) \in S$, $k = \overline{1,m}$.

Враховуючи заміну (25), від розв'язку задачі (31), (32) — функції $\bar{V}_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{1,N}$, повернемося до відповідного розв'язку рівняння (22). Такий розв'язок — функція $V_j(t,\tau_1,\tau_2)$, $j = \overline{1,N}$, записується у вигляді

$$V_j(t,\tau_1,\tau_2) = \bar{V}_j\left(\left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{1/2} \frac{\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{3/2} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}\right), \tag{34}$$

де функція у правій частині (34), тобто функція $\bar{V}_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{1,N}$, є розв'язком рівняння (31).

Оскільки $\bar{V}_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{1,N}$, при кожному $\eta \in [0;T_1)$, де T_1 згадано вище (див. також [39, с. 62]), належить простору швидкоспадних щодо ξ функцій, то при $\gamma_2(t)\tau_1 - \gamma_1(t)\tau_2 \neq 0$, $t \in [0;T]$, маємо

$$\lim_{\tau_1 \to \pm\infty} \tau_1^n V_j(t,\tau_1,\tau_2) = 0, \qquad \lim_{\tau_2 \to \pm\infty} \tau_2^n V_j(t,\tau_1,\tau_2) = 0, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Тут додатково припускається, що для всіх $t \in [0;T]$ виконується умова

$$0 \le \left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{3/2} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)} < T_1.$$

Враховуючи позначення для τ_1, τ_2, останню нерівність записуємо у вигляді

$$0 \le \left(\frac{1}{6}\,b_0(t)\right)^{3/2} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{\varepsilon a_0(t)(\varphi_1'(t) - \varphi_2'(t))} < T_1. \tag{35}$$

Очевидно, що існують такі функції $x = \varphi_s(t)$, $t \in [0;T]$, $s = 1, 2$, що виконуються умови узгодженості (19), і таке $T_2 > 0$, що нерівність (35) має місце для всіх $t \in [0;T_2]$. Слід зауважити, що, взагалі кажучи, $T_2 = O(\varepsilon)$.

Отже, має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови*:

1) *справджуються умови теореми* 1, *а функції* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *задовольняють умову* (35) *при* $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T_2]$;

2) *задача Коші для рівняння* (15) *з початковою умовою* $u_0(x,0) = g_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *та задача Коші для рівняння* (16) *з початковою умовою* $u_j(x,0) = g_j(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *де функція* $g_j(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $j = \overline{0,N}$, *мають розв'язки* $u_j(x,t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0;T])$, $j = \overline{0,N}$;

3) *функції* $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta)$, $j = \overline{1,N}$, *у рівнянні* (31) *для довільного* $t \in [0;T]$ *задовольняють умову* $\bar{\mathcal{F}}_j(t,\xi,\eta) \in C^\infty(0,\Theta;S)$, $j = \overline{1,N}$, *для деякого* $\Theta > 0$;

4) *початкова функція* $f(x,\varepsilon)$ *в умові* (9) *має вигляд* $f(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k g_k(x) + \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^k f_k(x,\varepsilon)$, *де* $f_0(x,\varepsilon) \in \mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$, $f_k(x,\varepsilon) = f_k\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $f_k(\eta) \in S(\mathbf{R})$, $k = \overline{1,m}$, $m \ge 0$ — *деяке ціле число.*

Тоді задача Коші $(8), (9)$ *має асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок вигляду* (14).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*:

1) *мають місце умови теореми* 3;

2) *задача Коші для рівняння* (15) *з початковою умовою* $u_0(x,0) = g_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *та задача Коші для рівняння* (16) *з початковою умовою* $u_j(x,0) = g_j(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *де функція* $g_j(x) \in S(\mathbf{R})$, $j = \overline{1,N}$, *мають розв'язки* $u_j(x,t) \in C^\infty(0,T;S)$, $j = \overline{0,N}$.

Тоді для точного і наближеного розв'язків задачі Коші $(8), (9)$ *має місце оцінка вигляду*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [u(x,t,\varepsilon) - Y_N(x,t,\varepsilon)]^2\, dx \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_N^2(x,\varepsilon)dx, \qquad t \in [0;T_2],$$

де $h_N(x,\varepsilon)$ — *швидкоспадна функція, причому* $h_N(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$, $\varepsilon \to 0$.

***Зауваження* 2.** Ці твердження можна переформулювати на мові асимптотики для многовидів для початкових функцій в умові (9) задачі Коші (8), (9). У випадку задачі про побудову N-го наближення асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (8), (9) з формули для такого наближеного розв'язку можна отримати умови на множину $\mathcal{M}^N_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$, якій має належати початкова функція в умові (9) і яку аналогічно випадку $N = 0$ (випадок головного члена асимптотики) можна назвати многовидом початкових умов для задачі про побудову N-го наближення асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (8), (9). Точками многовиду $\mathcal{M}^N_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$ є функції $f_N(x,\varepsilon)$, асимптотичні (при $|x| \to \infty$ чи при $\varepsilon \to 0$) властивості яких можна описати таким чином: оскільки $f_0(x,\varepsilon) \in S(\mathbf{R})$ і $f_N(x,\varepsilon) - f_0(x,\varepsilon) \in S(\mathbf{R})$, $N = 0,1,2,\ldots$, то як при $|x| \to \infty$, так і при $\varepsilon \to 0$, маємо $f_N(x,\varepsilon) \to 0$, $N = 0,1,2,\ldots$. При цьому $f_N(x,\varepsilon) - f_{N-1}(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \to 0$, де $f_{N-1} \in \mathcal{M}^{N-1}_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$, $f_N \in \mathcal{M}^N_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$, $N = 1,2,\ldots$.

***Зауваження* 3.** В [46, 47] детально описано процедуру розв'язування рівнянь (15), (16) за допомогою методу характеристик. Цей метод можна використати також для отримання розв'язку задачі Коші для рівнянь (15) та (16) в аналітичному вигляді.

***Зауваження* 4.** Хоча у загальному випадку задача Коші (8), (9) може мати глобальний розв'язок, проте у даній статті, як і в [39], асимптотичний розв'язок цієї задачі Коші розглядається локально, бо при побудові такого розв'язку у вигляді (14) його регулярна частина визначається з системи диференціальних рівнянь (15), (16), кожне з яких, з огляду на належність початкової функції простору $C^\infty(0,T;S)$ (див. теореми 2, 4), має розв'язок лише на скінченному інтервалі. Ця особливість побудованого розв'язку узгоджується зі специфікою загальної теорії асимптотичних розв'язків та її застосуваннями.

З іншого боку, у випадку сталих коефіцієнтів, наприклад, коли $a(x,t) = 1$, $b(x,t) = 1$, за спеціальних початкових умов як розв'язок задачі Коші (8), (9), так і її асимптотичний розв'язок, що побудований за описаним вище алгоритмом, визначені для всіх $(x,t) \in \mathbf{R}^2$. В якості таких початкових умов можна розглянути функцію вигляду $f(x,\varepsilon) = f_0(x,\varepsilon) \in \mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2}$, де многовид $\mathcal{M}^0_{\varphi_1,\varphi_2}$ визначено формулою (26). При цьому незбурене рівняння (8), рівняння переносу (15), має глобальний розв'язок, а асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок задачі Коші (8), (9) містить лише головний член сингулярної частини і збігається з точним двосолітонним розв'язком рівняння Кортевега – де Фріза, що узгоджується з результатами праць [17 – 19].

Висновки. Описано множину початкових умов, для яких задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами має асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок. Запропоновано поняття многовиду початкових значень для задачі Коші, при яких такий розв'язок існує.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 407 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний: Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
4. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
5. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 696 с.
6. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
7. *Солитоны* / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
8. *Blacmore D., Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. Hr.* Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and integrability analysis. – Singapore: World Sci., 2011. – 564 p.
9. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240 – 243.
10. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095 – 1097.
11. *Miura R. M., Kruskal M. D.* Application of nonlinear WKB-method to the Korteweg – de Vries equation // SIAM Appl. Math. – 1974. – **26**, № 2. – P. 376 – 395.
12. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
13. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях // Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1980. – **15**. – С. 3 – 94.
14. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып. 3 (219). – С. 63 – 124.
15. *Flaschka H., Forest M. G., McLaughlin D. W.* Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg – de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math. – 1980. – **33**, № 6. – P. 739 – 784.
16. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н.(мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
17. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. I // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 3. – P. 253 – 290.
18. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. II // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 5. – P. 571 – 593.
19. *Lax P. D., Levermore C. D.* The small dispersion limit of the Korteweg – de Vries equation. III // Communs Pure and Appl. Math. – 1983. – **36**, № 6. – P. 809 – 829.
20. *Venakides S.* The Korteweg – de Vries equation with small dispersion: higher order Lax – Levermore theory // Communs Pure and Appl. Math. – 1990. – **43**, № 3. – P. 335 – 361.
21. *McLaughlin D. W., Strain J. A.* Computing the weak limit of KdV // Communs Pure and Appl. Math. – 1994. – **47**, № 10. – P. 1319 – 1364.
22. *Grava T., Klein C.* Numerical solution of the small dispersion limit of Korteweg – de Vries and Whitham equations // Communs Pure and Appl. Math. – 2007. – **60**, № 11. – P. 1623 – 1664.
23. *de Kerf F.* Asymptotic analysis of a class of perturbed Korteweg – de Vries initial value problems. – Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1988. – **50**. – 180 p.
24. *Калякин Л.А.* Возмущение солитона Кортевега – де Фриза // Теор. и мат. физика. – 1992. – **92**, № 1. – С. 62 – 76.
25. *Ильин А. М., Калякин Л. А.* Возмущение конечносолитонных решений уравнения Кортевега – де Фриса // Докл. Академии наук. – 1994. – **336**, № 5. – С. 595 – 598.
26. *Glebov S. G., Kiselev O. M., Lazarev V. A.* Birth of solitons during passage through local resonance // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. – 2003. – **1**. – P. 84 – 90.

27. *Glebov S. G., Kiselev O. M., Lazarev V. A.* Slow passage through resonance for a weakly nonlinear dispersive wave // SIAM J. Appl. Math. – 2005. – **65**, № 6. – P. 2158 – 2177.
28. *Glebov S. G., Kiselev O. M.* The stimulated scattering of solitons on a resonance // J. Nonlinear Math. Phys. – 2005. – **12**, № 3. – P. 330 – 341.
29. *Maslov V. P., Omel'yanov G. A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: Amer. Math. Soc., 2001. – 243 p.
30. *Sjoberg A.* On the Korteweg – de Vries equation: existence and uniqueness // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – **29**, № 3. – P. 569 – 579.
31. *Хруслов Е. Я.* Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Мат. сб. – 1976. – **99(141)**, № 2. – С. 261 – 281.
32. *Egorova I., Grunert K., Teschl G.* On Cauchy problem for the Korteweg – de Vriea equation with step-like finite gap initial data I. Schwartz-type perturbations // Nonlinearity. – 2009. – **22**. – P. 1431 – 1457.
33. *Баранецкий В. Б., Котляров В. П.* Асимптотическое поведение в области заднего фронта решения уравнения КдФ с начальным условием "типа ступеньки" // Теор. и мат. физика. – 2001. – **126**, № 2. – С. 214 – 227.
34. *Kato T.* On the Korteweg – de Vries equation // Manuscr. math. – 1979. – **28**. – P. 89 – 99.
35. *Якупов В. М.* О задаче Коши для уравнения Кортевега – де Фриса // Дифференц. уравнения. – 1976. – **11**, № 3. – С. 556 – 561.
36. *Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К.* Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи // Дифференц. геометрия, группы Ли и механика. IV: Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1984. – **133**. – С. 17 – 37.
37. *Похожаев С. И.* О сингулярных решениях уравнения Кортевега – де Фриза // Мат. заметки. – 2010. – **88**, вып. 5. – С. 770 – 777.
38. *Похожаев С. И.* Об отсутствии глобальных решений уравнения Кортевега – де Фриза // Совр. математика. Фундам. направления. – 2011. – **39**. – С. 141 – 150.
39. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Кортевега – де Фриза и его обобщений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1988. – Вып.13. – С. 56 – 105.
40. *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза // Мат. сб. – 1983. – **120**, № 3. – С. 396 – 425.
41. *Faminskii A. V., Bashlykova I. Yu.* Weak solutions to one initial-boundary value problem with three boundary conditions for quasilinear evolution equations of the third order // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 1. – P. 83 – 98.
42. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 378 – 387.
43. *Самойленко Ю. І.* Однофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами (випадок спеціальних початкових умов) // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 327 – 340.
44. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
45. *Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами (загальний випадок) // Мат. вісн. НТШ. – 2010. – **7**. – С. 227 – 242.
46. *Самойленко Ю. І.* Існування розв'язку задачі Коші для рівняння Хопфа зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 1. – С. 293 – 300.
47. *Самойленко Ю. І.* Існування розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку зі змінними коефіцієнтами у просторі швидко спадних функцій // Буковин. мат. журн. – 2013. – **1**, № 1-2. – С. 118 – 122.
48. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Київ: Вища шк., 1990. – 600 с.
49. *Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П.* Диференціальні рівняння. – Львів: Львів. нац. ун-т ім. Франка, 2011. – 470 с.

Одержано 01.11.12,
після доопрацювання — 25.08.13