УДК 515.12

Л. І. Карчевська (Львів. нац. ун-т ім. Ів. Франка)

ПРО ВІДКРИТІСТЬ ФУНКТОРІВ k-НЕРОЗТЯГУЮЧИХ ТА СЛАБКОАДИТИВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

We investigate the property of openness of the functors of k-nonexpanding and weakly additive functionals. In particular, it is shown that these functors preserve the openness of mappings between finite compact sets, but they are not open.

Исследована открытость функторов k-нерастягивающих и слабоаддитивных функционалов. В частности, установлено, что данные функторы сохраняют открытость отображений между конечными компактами, однако они не являются открытыми.

Вступ. У рамках загальної теорії функторів у категорії компактів упродовж останніх десятиліть досить детально вивчаються топологічні властивості різних функторів. Зокрема, досліджуються питання щодо таких властивостей просторів вигляду $\mathsf{F}X$, де $X \in \mathrm{Comp}$ і F — деякий функтор у категорії Comp, як бути абсолютним ретрактом, чи бути гомеоморфним тихоновському кубу, який є одним із основних об'єктів у топології неметризовних компактів. Основою дослідження згаданих задач є вивчення спектральних властивостей просторів $\mathsf{F}X$, при якому необхідними є як хороші категорні властивості функтора (зазвичай досліджувані функтори є близькими до нормального в сенсі [1]), так і така властивість функтора, як збереження ним відкритих відображень (відкритість функтора).

Питання відкритості досліджувалось для випадку таких відомих функторів, як функтор імовірнісних мір P, функтори гіперпростору exp, гіперпростору компактних опуклих підмножин cc, гіперпросторів включення G, функтори, що зберігають порядок функціоналів O, та інших (див., наприклад, [2, 4, 6]). Існують також деякі загальні результати, що стосуються відкритості нормальних функторів [6], випадок слабконормальних функторів менш вивчений.

У цій роботі ми досліджуватимемо відкритість функторів слабкоадитивних (EA) та k-нерозтягуючих (E_k) функціоналів, які містять згадані вище функтори як підфунктори, і узагальнимо результат, отриманий у роботі [5].

Означення та основні факти. Нагадаємо, що Comp позначає категорію компактних хаусдорфових просторів (компактів) та неперервних відображень між ними.

Для довільного простору $X \in \mathrm{Comp}$ через $C(X)$ позначимо тихоновський простір усіх неперервних дійснозначних функцій, наділений стандартною нормою $\|\varphi\| = \sup\big\{|\varphi(x)| \mid x \in \in X\big\}$. Ця норма породжує метрику на $C(X)$: $d(\varphi, \psi) = \sup \|\varphi - \psi\|$. Також через c_X позначимо сталу функцію, яка набуває значення $c \in \mathbb{R}$ у всіх точках простору X.

У цій роботі ми розглядатимемо функтори k-нерозтягуючих та слабкоадитивних функціоналів, які ми зараз визначимо.

Кажемо, що функціонал $\nu\colon C(X) \to \mathbb{R}$

зберігає константи, якщо для довільного $c \in \mathbb{R}$ виконується умова $\nu(c_X) = c$;

є *k-ліпшицевим* для деякого $k \in [1, \infty)$, якщо для двох довільних функцій $\varphi, \psi \in C(X)$ виконується умова $\big|\nu(\varphi) - \nu(\psi)\big| \le k \cdot d(\varphi, \psi)$;

є *слабкоадитивним*, якщо для довільного $c \in \mathbb{R}$ та довільної функції $\varphi \in C(X)$ виконується умова $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c$.

Нехай $X \in \mathrm{Comp}$ — довільний простір. Тоді для кожного $k \in [1, \infty)$ через $\mathsf{E}_k X$ позначимо множину всіх зберігаючих константи k-ліпшицевих функціоналів (далі просто k-нерозтягуючі функціонали), через $\mathsf{EA}X$ — множину всіх 1-ліпшицевих (або просто нерозтягуючих) слабкоадитивних зберігаючих константи функціоналів (надалі просто слабкоадитивні функціонали). Ці множини розглядаємо з топологією підпростору, індукованою топологією добутку на $\prod_{\varphi \in C(X)} [\min \varphi, \max \varphi]$. Можна перевірити, що утворені таким чином простори є компактами для довільного компакта X.

Нехай $\mathsf{F} \in \{\mathsf{E}_k, \mathsf{EA}\}$. Розглянемо довільне відображення $f \colon X \to Y$. Визначимо відображення $\mathsf{F}f$ таким чином. Для довільних функціонала $\nu \in \mathsf{F}X$ і функції $\varphi \in C(Y)$ покладемо $\mathsf{F}f(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f)$. Визначена таким чином конструкція F утворює коваріантний функтор у категорії Comp. Більш того, отриманий функтор є слабконормальним.

Введемо деякі позначення. Кажемо, що множина $B \subset C(X)$ є

C-підмножиною в $C(X)$, якщо вона містить всі сталі функції;

CA-підмножиною в $C(X)$, якщо для довільної функції $\varphi \in B$ вона містить всі функції вигляду $\varphi + c_X$, де $c \in \mathbb{R}$.

Наступні леми стосуються продовження k-нерозтягуючих та слабкоадитивних функціоналів та є незначним узагальненням аналогічного твердження для випадку нерозтягуючих функціоналів, яке було доведено в [3].

Лема 1. *Нехай A — C-підмножина в $C(X)$, $k \in [1, \infty)$ — довільне число і $\mu_0 \colon A \to \mathbb{R}$ — k-нерозтягуючий функціонал на A. Тоді існує k-нерозтягуючий функціонал $\mu \colon C(X) \to \mathbb{R}$ такий, що $\mu|_A = \mu_0$.*

Лема 2. *Нехай A — CA-підмножина в $C(X)$ і $\mu_0 \colon A \to \mathbb{R}$ — слабкоадитивний нерозтягуючий функціонал на A. Існує слабкоадитивний нерозтягуючий функціонал $\mu \colon C(X) \to \mathbb{R}$ такий, що $\mu|_A = \mu_0$.*

Дотримуючись позначень із [6], через $\pi^2(X)$ для довільного простору X позначатимемо діаграму

$$\begin{tikzcd} X^4 \arrow[r, "\mathrm{pr}_{13}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{12}"'] & X^2 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ X^2 \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] & X \end{tikzcd} .$$

Кажемо, що діаграма

$$\begin{tikzcd} X_1' \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "q_1"'] & X_2' \arrow[d, "q_2"] \\ X_3' \arrow[r, "g_2"'] & X_4' \end{tikzcd}$$

є *ретрактом* діаграми

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d, "p_2"] \\
X_3 \arrow[r, "f_2"'] & X_4
\end{tikzcd},
$$

якщо для довільного $i = \overline{1,4}$ простір X_i' є ретрактом простору X_i і діаграми

$$
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "r_j"'] & X_{j+1} \arrow[d, "r_{j+1}"] \\
X_j' \arrow[r, "g_j"'] & X_{j+1}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "f_j"] & X_{j+1} \\
X_j' \arrow[r, "g_j"'] \arrow[u, "i_j"] & X_{j+1}' \arrow[u, "i_{j+1}"']
\end{tikzcd}
$$

та

$$
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "r_j"] \arrow[d, "p_j"'] & X_j' \arrow[d, "q_j"] \\
X_{j+2} \arrow[r, "r_{j+2}"'] & X_{j+2}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[d, "p_j"'] & X_j' \arrow[l, "i_j"'] \arrow[d, "q_j"] \\
X_{j+2} & X_{j+2}' \arrow[l, "i_{j+2}"]
\end{tikzcd},
$$

де $j = \overline{1,2}$, комутативні. Через $r_j\colon X_j \to X_j'$ позначимо відповідні ретракції, через $i_j\colon X_j' \to X_j$, $j = \overline{1,4}$, — вкладення.

Нагадаємо, що комутативна діаграма

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"] & T
\end{tikzcd}
$$

називається бікомутативною, якщо її *характеристичне відображення* $\chi\colon X \to Y \times_T Z = \big\{(y,z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\big\}$, що діє за правилом $\chi(x) = \big(p(x), q(x)\big)$, є сюр'єктивним.

Лема 3 [5]. *Ретракт бікомутативної діаграми є бікомутативним.*

Нарешті, нагадаємо, що функтор називається (скінченно) відкритим, якщо він зберігає відкриті відображення (між скінченними просторами).

Бікомутативність та відкритість функторів E_k та EA. Наступне твердження можна довести за допомогою тих самих міркувань, що і у випадку відповідного твердження з роботи [5].

Теорема 1. *Функтори E_k та EA скінченно відкриті.*

Далі ми використовуватимемо ту ж саму схему, що і в роботі [5]. Ми покажемо, що функтори, які ми розглядаємо, не зберігають бікомутативність певних діаграм, і використаємо цей факт, щоб довести, що вони не відкриті.

Почнемо з випадку функторів E_k.

Лема 4. *Функціонал $\lambda\colon C(X) \to \mathbb{R}$, де $X \in \mathrm{Comp}$, заданий умовами*

$$\lambda(\varphi) = \begin{cases} \min\varphi(X), & \varphi(X) \geq 0, \\ \max\varphi(X), & \varphi(X) \leq 0, \\ 0, & 0 \in [\min\varphi,\ \max\varphi], \end{cases}$$

де $\varphi \in C(X)$ — довільна функція, є 1-нерозтягуючим.

Доведення. Легко бачити, що функціонал λ задано коректно.

Покажемо тепер, що λ є 1-нерозтягуючим функціоналом. Розглянемо наступні випадки:

1. Функції $f, g \in C(X)$ такі, що $f \geq 0$ і $g \geq 0$. Тоді згідно з означенням функціонала λ $\big|\lambda(f) - \lambda(g)\big| = |\min f - \min g|$. Нехай $\min f = f(x_f)$, $\min g = g(x_g)$, $x_f, x_g \in X$. Не зменшуючи загальності припустимо, що $f(x_f) \geq g(x_g)$. Тоді маємо $\big|\lambda(f) - \lambda(g)\big| = f(x_f) - g(x_g) \leq$ $\leq f(x_g) - g(x_g) \leq d(f, g)$.

Випадок функцій f, g таких, що $f \leq 0$, $g \leq 0$, аналогічний розглянутому.

2. Функції $f, g \in C(X)$ такі, що $0 \in [\min f, \max f] \cap [\min g, \max g]$. В цьому випадку маємо $\big|\lambda(f) - \lambda(g)\big| = 0 \leq d(f, g)$.

3. Функції $f, g \in C(X)$ такі, що $f \leq 0$, $g \geq 0$. Тоді виконується умова $\big|\lambda(f) - \lambda(g)\big| =$ $= |\max f - \min g| \leq \big|f(x) - g(x)\big|$ для довільної точки $x \in X$ і тому $\big|\lambda(f) - \lambda(g)\big| \leq d(f, g)$.

4. Функції $f, g \in C(X)$ такі, що $f \leq 0$ і $0 \in [\min g, \max g]$. Припустимо, що $\max f = f(x_0)$, $x_0 \in X$. Виберемо точку $x \in X$ таку, що $g(x) \geq 0$. Тоді маємо $\big|\lambda(f) - \lambda(g)\big| = \big|f(x_0)\big| \leq$ $\leq \big|f(x) - g(x)\big| \leq d(f, g)$.

Випадок $f, g \in C(X)$ таких, що $f \geq 0$ і $0 \in [\min g, \max g]$, аналогічний розглянутому.

Лему доведено.

Через $X = \{a, b, c, d\}$ позначимо дискретний чотириточковий простір.

Теорема 2. *Діаграма $\mathsf{E}_k\big(\pi^2(X)\big)$, $k \in [1, \infty)$, не бікомутативна.*

Доведення. Введемо позначення

$$T = \big\{ f \circ \mathrm{pr}_1 \mid\ f \in C(X) \big\}$$

і виберемо функції $\varphi, \psi \in C(X^2) \setminus T$, визначені таким чином:

$$\varphi\big(\{a\} \times \{a, c\}\big) = \{-k\}, \qquad \varphi\big(\{a\} \times \{b, d\}\big) = \{-k + 2\}, \qquad \varphi\big(\{b\} \times X\big) = \{-k + 1\},$$

$$\varphi\big(\{c\} \times \{a, c\}\big) = \{k\}, \qquad \varphi\big(\{c\} \times \{b, d\}\big) = \{k - 2\}, \qquad \varphi\big(\{d\} \times X\big) = \{k - 1\}$$

і

$$\psi\big(\{a\}\times X\big)=\{-k+1\},\qquad \psi\big(\{b\}\times\{a,c\}\big)=\{-k\},\qquad \psi\big(\{b\}\times\{b,d\}\big)=\{-k+2\},$$

$$\psi\big(\{c\}\times X\big)=\{k-1\},\qquad \psi\big(\{d\}\times\{a,c\}\big)=\{k\},\qquad \psi\big(\{d\}\times\{b,d\}\big)=\{k-2\}.$$

Для вибраних функцій виконується рівність

$$d(\varphi\circ\mathrm{pr}_{12},\psi\circ\mathrm{pr}_{13})=1.$$

Нехай $\lambda\in\mathsf{E}_1(X)$ — функціонал з леми 4.

Позначимо $T_\mu=\{\varphi\}\cup T$, $T_\nu=\{\psi\}\cup T$. Визначимо функціонали $\mu\colon T_\mu\to\mathbb{R}$ та $\nu\colon T_\nu\to\mathbb{R}$ наступними умовами: для довільної функції $\phi=f\circ\mathrm{pr}_1\in T$ покладемо

$$\mu(\phi)=\nu(\phi)=\lambda(f)$$

та

$$\mu(\varphi)=k,\qquad \nu(\psi)=-k.$$

Тоді функціонали μ та ν є k-нерозтягуючими на відповідних множинах T_μ та T_ν.

Справді, перевіримо це твердження для функціонала μ. Розглянемо довільну функцію $f\in\in C(X)$. Маємо

$$d(\varphi,f\circ\mathrm{pr}_1)=$$

$$=\max\Big\{\big|f(a)+k\big|,\ \big|f(a)+k-2\big|,\ \big|f(b)+k-1\big|,\ \big|f(c)-k\big|,\ \big|f(c)-k+2\big|,\ \big|f(d)-k+1\big|\Big\}.$$

Нехай виконується умова $f\geq 0$. Тоді

$$\big|\mu(\varphi)-\mu(f\circ\mathrm{pr}_1)\big|=\big|k-\lambda(f)\big|\leq\big|f(a)+k\big|\leq d(\varphi,f\circ\mathrm{pr}_1).$$

Подібним чином можна показати правильність твердження при умові $f\leq 0$. Розглянемо нарешті останній випадок, коли $0\in[\min f,\max f\,]$. Маємо

$$\big|\mu(\varphi)-\mu(f\circ\mathrm{pr}_1)\big|=|k-0|=k,$$

але $d(\varphi,f\circ\mathrm{pr}_1)\geq 1$, отже,

$$\big|\mu(\varphi)-\mu(f\circ\mathrm{pr}_1)\big|=k\leq k\cdot d(\varphi,f\circ\mathrm{pr}_1).$$

Так само перевіряється і той факт, що ν є k-нерозтягуючим функціоналом.

Тепер продовжимо побудовані функціонали до k-нерозтягуючих функціоналів μ_0, ν_0 на всьому просторі $C(X^2)$ (це можна зробити відповідно до леми 1). Легко бачити, що не існує функціонала $V\in\mathsf{E}_k(X^4)$ з властивостями $\mathsf{E}_k(\mathrm{pr}_{12})(V)=\mu_0$, $\mathsf{E}_k(\mathrm{pr}_{13})(V)=\nu_0$, оскільки виконується умова

$$\big|\mu_0(\varphi)-\nu_0(\psi)\big|=2k>k=k\cdot d(\varphi\circ\mathrm{pr}_{12},\psi\circ\mathrm{pr}_{13}).$$

Теорему доведено.

Позначимо через $D=\{0,1\}$ двоточковий дискретний простір.

Теорема 3. *Діаграма* $\mathsf{EA}\big(\pi^2(D)\big)$ *не бікомутативна.*

Доведення. Визначимо функціонал $\lambda \in \mathsf{EA}(D)$ умовою

$$\lambda(f) = \min\big\{f(0), f(1)\big\},$$

де $f \in C(D)$. Позначимо

$$A = \big\{f \circ \mathrm{pr}_1 \mid f \in C(D)\big\} \subset C(D^2).$$

Визначимо функції $\varphi, \psi \in C(D^2)$ таким чином:

$$\varphi\colon (0,0) \mapsto 2, \qquad (0,1) \mapsto 2, \qquad (1,0) \mapsto -2, \qquad (1,1) \mapsto 0$$

і

$$\psi\colon (0,0) \mapsto 0, \qquad (0,1) \mapsto 2, \qquad (1,0) \mapsto -2, \qquad (1,1) \mapsto -2.$$

Зрозуміло, що функції φ та ψ не містяться у множині A.

Визначимо функціонали ν, μ на множинах $A \cup \{\varphi\}$ та $A \cup \{\psi\}$ відповідно наступними умовами:

$$\nu(f \circ \mathrm{pr}_1) = \mu(f \circ \mathrm{pr}_1) = \lambda(f), \qquad \nu(\varphi) = 2, \qquad \mu(\psi) = -2.$$

Покажемо, що введені функціонали є нерозтягуючими.

Розглянемо функціонал ν на множині $A \cup \{\varphi\}$. Візьмемо довільну функцію $f \in C(D)$. Тоді відстань між функціями $f \circ \mathrm{pr}_1$ та φ обчислюється за формулою

$$d(f \circ \mathrm{pr}_1, \varphi) = \max\big\{|2 - f(0)|, |2 + f(1)|, |f(1)|\big\}.$$

Позначимо

$$a = \big|\nu(f \circ \mathrm{pr}_1) - \nu(\varphi)\big| = \big|2 - \min\{f(0), f(1)\}\big|.$$

Припустимо, що $\min\big\{f(0), f(1)\big\} = f(0)$. Тоді нерівність $a \le d(f \circ \mathrm{pr}_1, \varphi)$ є очевидною. Припустимо, що виконується умова $\min\big\{f(0), f(1)\big\} = f(1)$. Тут потрібно розглянути два випадки. По-перше, якщо має місце нерівність $f(1) < 0$, то виконується і нерівність $\big|f(1)\big| \ge a$, і в цьому випадку нерівність $a \le d(f \circ \mathrm{pr}_1, \varphi)$ справджується. У випадку, коли виконується умова $f(1) \ge 0$, маємо $\big|f(1)+2\big| \ge \big|f(1)-2\big|$, і нерівність $a \le d(f \circ \mathrm{pr}_1, \varphi)$ знову справджується.

Тепер покажемо, що функціонал μ є нерозтягуючим на $A \cup \{\psi\}$. Візьмемо довільну функцію $f \in C(D)$. Тоді

$$d(f \circ \mathrm{pr}_1, \psi) = \max\big\{|f(0)|, |2 - f(0)|, |f(1) + 2|\big\}.$$

Введемо позначення

$$b = \big|\mu(f \circ \mathrm{pr}_1) - \mu(\psi)\big| = \big|2 + \min\big\{f(0), f(1)\big\}\big|.$$

Спочатку припустимо, що виконується умова $\min\big\{f(0), f(1)\big\} = f(0)$. Тоді у випадку $f(0) \ge 0$ маємо нерівність $f(1) \ge 0$, і тому

$$\big|f(1) + 2\big| \ge \big|2 + f(0)\big| = b.$$

Якщо виконується умова $f(0) < 0$, то

$$\bigl|2 - f(0)\bigr| \geq \bigl|2 + f(0)\bigr| = b.$$

Нарешті, у випадку $\min\bigl\{f(0), f(1)\bigr\} = f(1)$ нерівність $b \leq d(f \circ \mathrm{pr}_1, \psi)$ є очевидною.

Ми можемо продовжити функціонали ν та μ на весь простір $C(D^2)$ до слабкоадитивних функціоналів ν_0, μ_0 згідно з лемою 2. Тоді $\bigl|\nu_0(\varphi) - \mu_0(\psi)\bigr| = 4$, в той час як $d(\varphi \circ \mathrm{pr}_{12}, \psi \circ \circ \mathrm{pr}_{13}) = 2$, отже, не існує функціонала $\Theta \in \mathsf{EA}(D^4)$, який має властивість $\mathsf{EA}(\mathrm{pr}_{12})(\Theta) = \nu_0$ і $\mathsf{EA}(\mathrm{pr}_{13})(\Theta) = \mu_0$.

Теорему доведено.

Нагадаємо, що функтор F називаеється *бікомутативним*, якщо він зберігає бікомутативні діаграми.

***Наслідок* 1.** *Функтори E_k, $k \in [1, \infty)$, та EA не бікомутативні.*

Відомо, що у випадку нормального функтора з його відкритості випливає бікомутативність [6]. У випадку слабконормального функтора має місце наступна слабша умова.

Теорема 4. *Якщо слабконормальний функтор F відкритий, то для довільного метричного компакта X діаграма $\mathsf{F}\bigl(\pi^2(X)\bigr)$ є бікомутативною.*

Доведення. Нехай $\mathcal{A}$ — множина всіх граничних ординалів потужності ω. Для кожного $\alpha \in \mathcal{A}$ позначимо через A_α множину ординалів, менших за α.

Розглянемо σ-спектр $S = \{X^{A_\alpha}, \mathrm{pr}^\alpha_\beta; \alpha > \beta, \alpha, \beta \in \mathcal{A}\}$. Через pr^α_β позначимо природне проектування $X^{A_\alpha} \to X^{A_\beta}$. Зауважимо, що в даному випадку воно гомеоморфне проектуванню $X^\omega \times X^\omega \to X^\omega$. Границею цього спектра є простір X^{ω_1}. Розглянемо морфізм $\Psi = \bigl(\mathrm{id}_\mathcal{A}, \{p^\alpha_1\}_{\alpha \in \mathcal{A}}\bigr)$ між спектрами $S \times S = \bigl\{X^{A_\alpha} \times X^{A_\alpha}, \mathrm{pr}^\alpha_\beta \times \mathrm{pr}^\alpha_\beta; \alpha, \beta \in \mathcal{A}\bigr\}$ та S (тут $p^\alpha_1\colon X^{A_\alpha} \times X^{A_\alpha} \to X^{A_\alpha}$ позначає проекцію на перший співмножник). Його границею є відкрите відображення проектування $\mathrm{pr}_1\colon X^{\omega_1} \times X^{\omega_1} \to X^{\omega_1}$. Квадратні діаграми, паралельні граничному відображенню цього морфізму, мають вигляд

$$\begin{tikzcd}
X^{A_\alpha} \times X^{A_\alpha} \arrow[r, "\mathrm{pr}^\alpha_\beta \times \mathrm{pr}^\alpha_\beta"] \arrow[d, "p^\alpha_1"'] & X^{A_\beta} \times X^{A_\beta} \arrow[d, "p^\beta_1"] \\
X^{A_\alpha} \arrow[r, "\mathrm{pr}^\alpha_\beta"'] & X^{A_\beta}
\end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd}
X^{A_\beta} \times X^{A_\alpha \setminus A_\beta} \times X^{A_\beta} \times X^{A_\alpha \setminus A_\beta} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{13}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{12}"'] & X^{A_\beta} \times X^{A_\beta} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
X^{A_\beta} \times X^{A_\alpha \setminus A_\beta} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] & X^{A_\beta}
\end{tikzcd} .$$

Остання діаграма гомеоморфна діаграмі $\pi^2(X^\omega)$.

Оскільки функтор F відкритий, відображення $\mathsf{F}\mathrm{pr}_1$ теж відкрите, і тому (див. [1], теорема 17) морфізм $\mathsf{F}\Psi = \big(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}, \{F(p_1^\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\big)$ між спектрами $F(S\times S)$ та $F(S)$ містить бікомутативний підморфізм, при цьому його квадратні діаграми, паралельні граничному відображенню, гомеоморфні діаграмі $\mathsf{F}\big(\pi^2(X^\omega)\big)$. Тому діаграма $\mathsf{F}\big(\pi^2(X^\omega)\big)$ бікомутативна.

Діаграма $\mathsf{F}(\pi^2(X))$ є ретрактом діаграми $\mathsf{F}(\pi^2(X^\omega))$. Справді, таку властивість щодо діаграми $\pi^2(X^\omega)$ має діаграма $\pi^2(X)$, при цьому ретракції відповідних просторів — це відображення проектування $\mathrm{pr}_1\colon X^\omega \to X$ на перший співмножник та відповідні степені цього відображення $\Big((\mathrm{pr}_1)^4\colon (X^\omega)^4 \to X^4$ і $(\mathrm{pr}_1)^2\colon (X^\omega)^2 \to X^2\Big)$. Відповідні вкладення реалізуються відображенням $i\colon X \hookrightarrow X^\omega$, $i(x) = (x, x_0, x_0, \ldots)$ та його відповідними степенями, де $x_0 \in X$ — фіксована точка. Також F, будучи слабконормальним, зберігає тотожні відображення і вкладення, тому він зберігає властивість діаграми бути ретрактом іншої діаграми.

Отже, діаграма $\mathsf{F}\big(\pi^2(X)\big)$ повинна бути бікомутативною.

Теорему доведено.

Із теорем 2 і 3, а також теореми 4 випливає наступне твердження.

***Наслідок* 2.** *Функтори* E_k, *де* $k \in [1,\infty)$, *та* EA *не відкриті.*

1. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**. – С. 3 – 62.
2. *Bazylevych L., Repovš D., Zarichnyi M.* Hyperspace of convex compacta of nonmetrizable compact convex subspaces of locally convex spaces // Topology and its Appl. – 2008. – **155**. – P. 764 – 772.
3. *Camargo J.* The functor of nonexpanding functionals // Rev. Integr. Temas Mat. – 2002. – **20**. – P. 1 – 12.
4. *Ditor S., Eifler L.* Some open mapping theorems for measures // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **164**. – P. 287 – 293.
5. *Karchevska L., Radul T.* Some properties of the functor of non-expanding functionals // Mat. Stud. – 2009. – **31**. – P. 135 – 141.
6. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces. – Lviv: VNTL Publ., 1999.

Одержано 18.05.12,
після доопрацювання — 08.07.13