УДК 517.95

Н. П. Процах (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕВІДОМОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

The inverse problem of determination of the time-dependent multiplier of the right-hand side is considered for a semilinear ultraparabolic equation with integral overdetermination condition in a bounded domain. The conditions of existence and uniqueness of solution are obtained for the posed problem.

В ограниченной области рассмотрена обратная задача определения зависящего от времени множителя правой части слабо нелинейного ультрапараболического уравнения, когда задано интегральное условие переопределения. Получены условия, при которых решение задачи существует и является единственным.

1. Вступ. Задачі визначення коефіцієнтів або правої частини рівняння одночасно з його розв'язком називають оберненими. У теорії обернених задач теплопереносу часто з'являються проблеми відновлення густини невідомих зовнішніх джерел. При цьому виникають обернені задачі відшукання залежних від часу правих частин параболічних рівнянь за наявності додаткової інформації про розв'язки відповідних прямих задач.

При дослідженні обернених задач для параболічних чи гіперболічних рівнянь використовувались різні методи: метод інтегральних рівнянь та принцип Шаудера [1 – 5], ітераційні методи і методи регуляризації [6, 7], метод послідовних наближень [8], метод півгруп [9, 10]. У статті [10] розглянуто задачу відновлення ядра інтегро-диференціального ультрапараболічного рівняння з двома часовими змінними. Знайдено умови існування та єдиності локального за часом розв'язку в просторах Гельдера.

У даній статті вивчається обернена задача з інтегральною умовою перевизначення про знаходження залежного від часу множника правої частини слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з нелінійностями ліпшицевого типу. Знайдено умови однозначної розв'язності задачі у просторах Лебега та Соболєва. Існування узагальненого розв'язку відповідної прямої мішаної задачі встановлено за допомогою методу Фаедо – Гальоркіна, а оберненої задачі — за допомогою методу послідовних наближень.

Зауважимо, що розв'язність прямих задач для ультрапараболічних рівнянь досліджено, зокрема, в [11 – 15].

2. Основні позначення та функціональні простори. Нехай Ω і D — обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$ з межами $\partial\Omega \in C^1$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0,T)$, де T — фіксоване число з інтервалу $(0,\infty)$, $Q_\tau = \Omega \times D \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $G = \Omega \times D$.

Позначимо $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$, $G_\xi = \{(x,y,t)\colon (x,y) \in G,\ t = \xi\}$, $\xi \in [0,T]$.

Введемо простори $L^\infty(Q_T) := \{w\colon Q_T \to \mathbb{R}; w$ — вимірна функція та існує така стала C, що $|w(x,y,t)| \le C$ майже скрізь на $Q_T\}$, $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C\colon |w(x,y,t)| \le C$ майже скрізь на $Q_T\}$; $L^2(G) := \left\{w\colon G \to \mathbb{R}; w \text{ — вимірна функція, } \int_G |w(x,y)|^2\,dxdy < \infty\right\}$, $\|w; L^2(G)\| = \left(\int_G |w(x,y)|^2\,dxdy\right)^{1/2}$; $L^2(0,T) := \Big\{w\colon [0,T] \to \mathbb{R}; w$ — вимірна функція,

$\int_0^T |w(t)|^2\,dt < \infty \Big\}$, $\|w; L^2(0,T)\| = \left(\int_0^T |w(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$; $L^2(Q_T) := \Big\{w\colon Q_T \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна функція, $\int_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dx\,dy\,dt < \infty\Big\}$, $\|w; L^2(Q_T)\| = \left(\int_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dx\,dy\,dt\right)^{1/2}$; $W^{1,2}(\cdot)$ — множина всіх розподілів w, які разом зі своїми похідними першого порядку за всіма змінними належать до простору $L^2(\cdot)$, $\|w; W^{1,2}(\Omega)\| = \left(\int_\Omega [|w(x)|^2 + \sum_{i=1}^n |w_{x_i}(x)|^2]\,dx\right)^{1/2}$; $\|w; W^{1,2}(0,T)\| = \left(\int_0^T [|w(t)|^2 + |w_t(t)|^2]\,dt\right)^{1/2}$; $C^k(O)$ — простір k разів неперервно диференційовних функцій на O; $V(0,T;W(G)) := \{w\colon [0,T] \to W(G); \|w(\cdot,\cdot,t); W(G)\| \in V(0,T)\}$ $(V, W$ — банахові простори); $W_0^{1,2}(\Omega) := \{w\colon w \in W^{1,2}(\Omega), w|_{\partial\Omega} = 0\}$; $V_1(Q_T) := \{w\colon w, w_{x_i} \in L^2(Q_T),\ i = 1,\ldots,n,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$; $V_2(G) := L^2(D; W_0^{1,2}(\Omega)) = \{w\colon D \to W_0^{1,2}(\Omega); \|w(\cdot,y); W_0^{1,2}(\Omega)\| \in L^2(D)\}$, $\|w; V_2(G)\| = \left(\int_G \left[|w(x,y)|^2 + + \sum_{i=1}^n |w_{x_i}(x,y)|^2\right] dxdy\right)^{1/2}$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярний добуток між просторами $V_2^*(G)$ і $V_2(G)$.

3. Формулювання задачі. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t) f_0(t) \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \quad u|_{S_T^1} = 0 \quad (3)$$

та умовою перевизначення

$$\int\limits_{G_t} K(x,y) u(x,y,t)\,dxdy = E(t), \quad t \in [0,T], \quad (4)$$

де $u(x,y,t), f_0(t)$ — невідомі функції, $S_T^1 = \left\{(x,y,t) \in S_T\colon \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0\right\}$, ν — одинична зовнішня нормаль до S_T, причому виконується умова

(S) існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1 \subset \partial D \subset \mathbb{R}^{l-1}$, що $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$;

функції $f(x,y,t)$, $u_0(x,y)$, $K(x,y)$, $E(t)$ справджують умови

(F) $f \in C([0,T]; L^2(G))$,

(U) $u_0,\ u_{0,y_j} \in L^2(G)$, $j = 1,\ldots,l$, $u_0|_{\partial\Omega\times D} = 0$, $u_0|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0$,

(K) $K \in C^1(D; C^1(\overline{\Omega}))$, $K\big|_{\partial\Omega\times D} = 0$, $K|_{\Omega\times\Gamma_2} = 0$, де $\Gamma_2 = \partial D \backslash \Gamma_1$,

(E) $E \in W^{1,2}(0,T)$,

а коефіцієнти лівої частини рівняння (1) задовольняють умови

(A) $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^n a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, a_0 — додатна стала;

(C) $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x,y,t) \geq c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, c_0 — стала;

(L) $\lambda_i \in L^\infty(0,T; C(\overline{G}))$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)$ для всіх $i = 1,\ldots,l$;

(H) $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$ і неперервна по ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, причому така, що існує додатна стала g^0 така, що $|g(x,y,t,\xi) - - g(x,y,t,\eta)| \le g^0|\xi - \eta|$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$.

4. Існування та єдиність розв'язку прямої задачі. Припустимо спочатку, що в рівнянні (1) $f_0(t) = f_0^*(t)$, де $f_0^* \in L^2(0,T)$ — відома функція. Розглянемо мішану задачу для рівняння (1) з початковою умовою (2) та крайовими умовами (3).

Введемо простір $V_3(Q_T) := \{w\colon w, w_{x_i}, w_{y_j} \in L^2(Q_T),\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,l,\ w|_{S_T^1} = 0, w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$.

Означення 1. *Функцію* $u^*(x,y,t)$ *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3), *якщо* $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t^* \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, *справджується умова* (2) *та для всіх функцій* $v \in V_1(Q_T)$ *виконується рівність*

$$\int_0^T \langle u_t^*, v\rangle\, dt + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i}^* v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^* v_{x_j} + c(x,y,t) u^* v + \right.$$

$$\left. + g(x,y,t,u^*)v \right] dx\,dy\,dt = \int_{Q_T} f(x,y,t) f_0^*(t) v\, dx\,dy\,dt. \tag{5}$$

Із результатів статті [14] випливають наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай справджуються умови* (A), (C), (H), (L), (F), (U), (S) *і, крім того*:

1) $a_{ijy_k}, a_{ijx_i}, c_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,l$, $f_0^* \in L^2(0,T)$, $f_{y_k} \in L^2(Q_T)$, $k = 1,\ldots,l$;

2) *існує така стала* g^1, *що для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$ *та всіх* $\xi \in \mathbb{R}^1$ *виконуються нерівності* $|g_{y_i}(x,y,t,\xi)| \le g^1$, $i = 1,\ldots,l$;

3) $f|_{S_T^1} = 0$.

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).

При доведенні теореми 1 використано метод Фаедо–Гальоркіна, за яким будуємо послідовність $\{u^{*,N}\}_{N=1}^\infty$, яка у просторі $V_3(Q_T)$ збігається слабко при $N \to \infty$ до розв'язку u^* задачі (1)–(3), а послідовність $\{u_t^{*,N}\}_{N=1}^\infty$ збігається слабко до u_t^* у просторі $L^2(Q_T) + + L^2(0,T; V_2^*(G))$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (A), (C), (H), (L), (F), (U), (S). *Тоді задача* (1)–(3) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2 із [14].

Лема 1. *Якщо функція* w *є узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3), *то справджується нерівність*

$$\frac{1}{2}\int_{G_\tau} |w|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\,dy + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) w_{y_i} w + \sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(x,y,t) w_{x_i} w_{x_j} + c(x,y,t)|w|^2 + \right.$$

$$\left. + g(x,y,t,w)w - f(x,y,t) f_0^*(t) w + \frac{\alpha}{2}|w|^2 \right] e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt \ge \frac{1}{2}\int_G |u_0(x,y)|^2\, dx\,dy \tag{6}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ *та довільного фіксованого числа* $\alpha \in \mathbb{R}$, *причому при* $u_0(x,y) \equiv 0$ *в* (6) *досягається знак рівності.*

Доведення проводиться за схемою доведення леми 1 із [14].

5. Існування та єдиність розв'язку оберненої задачі.

Означення 2. *Пару функцій* $(u(x,y,t), f_0(t))$ *назвемо узагальненим розв'язком задачі* (1) – (4), *якщо* $u \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, $f_0 \in L^2(0,T)$, *причому ці функції для всіх* $v \in V_1(Q_T)$ *задовольняють інтегральну рівність*

$$\int\limits_0^T \langle u_t, v\rangle\, dt + \int\limits_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} v_{x_j} + c(x,y,t) uv + \right.$$

$$\left. + g(x,y,t,u)v \right] dx\, dy\, dt = \int\limits_{Q_T} f(x,y,t) f_0(t) v\, dx\, dy\, dt \tag{7}$$

і, крім того, функція $u(x,y,t)$ *задовольняє умови* (2) *та* (4).

Із рівняння (1) та умови (4) випливає, що узагальнений розв'язок задачі (1) – (4) задовольняє рівність

$$f_0(t) \int\limits_{G_t} K(x,y) f(x,y,t)\, dx\, dy = E'(t) + \int\limits_{G_t} \left(- \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t) K(x,y))_{y_i} u + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} + K(x,y) c(x,y,t) u + K(x,y) g(x,y,t,u) \right) dxdy, \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *та умови* (K), (E). *Для того щоб пара функцій* $(u(x,y,t), f_0(t))$ *була узагальненим розв'язком задачі* (1) – (4), *необхідно і достатньо, щоб для всіх* $v \in V_1(Q_T)$ *ця пара задовольняла рівність* (7), *а також* (2) *і* (8).

Доведення. *Необхідність.* Нехай $(u^*(x,y,t), f_0^*(t))$ — узагальнений розв'язок задачі (1) – (4). Здиференціюємо умову (4) один раз по t:

$$\int\limits_{G_t} K(x,y) u_t^*(x,y,t)\, dxdy = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

На підставі (1) і (9) отримуємо

$$\int\limits_{G_t} K(x,y) \left(f(x,y,t) f_0^*(t) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i}^* + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^*)_{x_j} - \right.$$

$$\left. - c(x,y,t) u^* - g(x,y,t,u^*) \right) dxdy = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Зінтегруємо частинами в (10), врахувавши умову (K):

$$\int\limits_{G_t} \left(K(x,y)f(x,y,t)f_0^*(t) + \sum_{i=1}^{l}(K(x,y)\lambda_i(x,y,t))_{y_i}u^* - \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u^*_{x_i} - \right.$$

$$\left. -K(x,y)c(x,y,t)u^* - K(x,y)g(x,y,t,u^*) \right) dxdy = E'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

З (11) випливає, що пара функцій $(u^*(x,y,t), f_0^*(t))$ задовольняє (8). Крім того, u^* є узагальненим розв'язком прямої задачі (1)–(3) з функцією $f_0^*(t)$ замість $f_0(t)$ у правій частині рівняння (1) . Тому виконується умова (2), а також рівність (7) для всіх $v \in V_1(Q_T)$ при $f_0(t) = f_0^*(t)$.

Достатність. Нехай $f_0^* \in L^2(0,T)$, $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t^* \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$ і для них виконуються (2), (8) та (7) для всіх $v \in V_1(Q_T)$. Тоді u^* є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) з правою частиною $f_0^*(t)f(x,y,t)$ в рівнянні (1). За умов леми цей розв'язок існує та єдиний.

Покладемо $E^*(t) = \int_{G_t} K(x,y)u^*(x,y,t)\,dxdy$, $t \in [0,T]$. Очевидно, що $E^* \in L^2(0,T)$. Так само, як при доведенні необхідності, знайдемо

$$f_0^*(t) \int\limits_{G_t} K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy = (E^*(t))' + \int\limits_{G_t} \left(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u^* + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u^*_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t)u^* + K(x,y)g(x,y,t,u^*) \right) dxdy, \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

З іншого боку, $f_0^*(t)$ та $u^*(x,y,t)$ задовольняють рівність

$$f_0^*(t) \int\limits_{G_t} K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy = E'(t) + \int\limits_{G_t} \left(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u^* + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u^*_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t)u^* + K(x,y)g(x,y,t,u^*) \right) dxdy, \quad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Із (12) та (13) випливає, що $(E^*(t))' = E'(t)$, $t \in [0,T]$. Зінтегрувавши цю рівність, отримаємо

$$E^*(t) - E^*(0) = E(t) - E(0), \quad t \in [0,T].$$

Оскільки $u^*(x,y,t)$ справджує умову (2), то $E^*(0) = \int_G K(x,y)u_0(x,y)\,dxdy$. Крім того, з (4) випливає, що $E(0) = \int_G K(x,y)u_0(x,y)\,dxdy$. Таким чином, $E^*(0) = E(0)$. Тому $E^*(t) = E(t)$, $t \in [0,T]$, а отже, для $u^*(x,y,t)$ виконується (4).

Лему доведено.

Позначимо $\lambda^1 = \max_i \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |\lambda_{iy_i}(x,y,t)|$, $f_1 = \max_{[0,T]} \int_{G_t} (f(x,y,t))^2\,dxdy$, $K_1(t) = \int_{G_t} K(x,y) f(x,y,t)\,dx\,dy$, $K_2(x,y,t) = -\sum_{i=1}^{l} (K(x,y)\lambda_i(x,y,t))_{y_i} + K(x,y)c(x,y,t)$, $K_3 = (g^0)^2 \int_G (K(x,y))^2\,dxdy$, $K_{ij}(x,y,t) = K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $\alpha_1 = l\lambda^1 - 2c_0 + 2g^0 + 1 + 1/T_1$, $0 < T_1 \le T$.

Нехай число T_1 таке, що виконуються нерівності $\alpha_1 > 0$ та

$$\frac{3f_1 T_1 e^{\alpha_1 T_1}}{\inf\limits_{[0,T_1]} (K_1(t))^2 \min\{1; 2a_0\}} \max \left\{ \sup_{[0,T_1]} \int_{G_t} (K_2(x,y,t))^2\,dxdy + K_3; \right.$$

$$\left. n^3 \max_{i,j} \max_{[0,T_1]} \int_{G_t} (K_{ij}(x,y,t))^2\,dxdy \right\} < 1. \tag{14}$$

Лема 3. *Нехай виконуються умови* (A), (C), (L), (U), (H), (E), (K), (F), (S) *та* a_{ijy_k}, a_{ijx_i}, $c_{y_k} \in L^\infty(Q_{T_1})$, $f_{y_k} \in L^2(Q_{T_1})$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,l$, $f|_{S^1_{T_1}} = 0$ *і, крім того,* $K_1(t) \ne 0$ *для всіх* $t \in [0,T_1]$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі* (1)–(4) *в області* Q_{T_1}.

Доведення. Нехай $T = T_1$. Використаємо метод послідовних наближень. Як у [8], побудуємо наближення $(u^m(x,y,t), f_0^m(t))$ розв'язку задачі (1)–(4), де функції $u^m(x,y,t)$ і $f_0^m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, визначаються так, що вони задовольняють систему рівностей

$$f_0^1(t) := 0,$$

$$f_0^m(t) = [K_1(t)]^{-1} \left(E'(t) - \int_{G_t} \left(\sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i} u^{m-1} - \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) u^{m-1}_{x_i} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - K(x,y)c(x,y,t)u^{m-1} - K(x,y)g(x,y,t,u^{m-1}) \right) dxdy \right), \quad t \in [0,T_1], \quad m \ge 2, \tag{15}$$

u^m задовольняє рівність

$$\int_0^{T_1} \langle u_t^m, v\rangle\,dt + \int_{Q_{T_1}} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u^m_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u^m_{x_i} v_{x_j} + c(x,y,t)u^m v + \right.$$

$$\left. + g(x,y,t,u^m)v \right] dx\,dy\,dt = \int_{Q_{T_1}} f(x,y,t) f_0^m(t) v\,dx\,dy\,dt, \quad m \ge 1, \tag{16}$$

$$u^m(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{17}$$

причому рівність (16) виконується для всіх $v \in V_1(Q_{T_1})$.

Із (15) випливає, що $f_0^m \in L^2(0,T_1)$, $m \geq 2$. На підставі теорем 1 і 2 для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує єдина функція $u^m \in V_3(Q_{T_1}) \cap C([0,T_1];L^2(G))$ така, що $u_t^m \in L^2(0,T_1;V_2^*(G)) + L^2(Q_{T_1})$ і справджуються рівності (16), (17).

Покажемо, що послідовність $\{(u^m(x,y,t), f_0^m(t))\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до узагальненого розв'язку задачі (1)–(4). Позначимо

$$z^m := z^m(x,y,t) = u^m(x,y,t) - u^{m-1}(x,y,t), \quad r^m(t) = f_0^m(t) - f_0^{m-1}(t), \quad m \geq 2.$$

Використовуючи рівності (16), знаходимо, що для всіх функцій $v \in V_1(Q_{T_1})$ справджуються рівності

$$\int_0^{T_1} \langle z_t^m, v\rangle \, dt + \int_{Q_{T_1}} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) z_{y_i}^m v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) z_{x_i}^m v_{x_j} + c(x,y,t) z^m v + \right.$$

$$\left. + (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1}))v \right] dx\,dy\,dt = \int_{Q_{T_1}} r^m(t) f(x,y,t) v dx\,dy\,dt, \quad m \geq 2. \tag{18}$$

Оскільки із (17) випливає, що $z^m(x,y,0) = 0$, $(x,y) \in G$, $m \geq 2$, то, згідно з лемою 1, із (18) отримуємо

$$\frac{1}{2}\int_{G_\tau} |z^m|^2 e^{-\alpha\tau} \, dx\,dy + \int_{Q_\tau} \left[\frac{\alpha}{2}|z^m|^2 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) z_{y_i}^m z^m + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) z_{x_i}^m z_{x_j}^m + \right.$$

$$\left. + c(x,y,t)|z^m|^2 + (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1}))z^m \right] e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_{Q_\tau} r^m(t) f(x,y,t) z^m e^{-\alpha t} \, dx\,dy\,dt, \quad \tau \in (0,T_1], \quad m \geq 2, \tag{19}$$

для довільного $\alpha \geq 0$. Оскільки, використавши нерівність $|ab| \leq \dfrac{\delta}{2}a^2 + \dfrac{1}{2\delta}b^2$, $\delta > 0$, $a,b \in \mathbb{R}$, одержимо

$$2\int_{Q_\tau} r^m(t) f(x,y,t) z^m e^{-\alpha t} \, dx\,dy\,dt \leq$$

$$\leq \delta f_1 \int_0^\tau |r^m(t)|^2 e^{-\alpha t} \, dt + \frac{1}{\delta}\int_{Q_\tau} |z^m|^2 e^{-\alpha t} \, dx\,dy\,dt, \quad \tau \in (0,T_1], \quad m \geq 2,$$

та на підставі умови (H)

$$\int_{Q_\tau} (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1})) z^m e^{-\alpha t} dx\,dy\,dt \leq$$

$$\le g^0 \int\limits_{Q_\tau} |z^m|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt, \quad \tau \in (0, T_1], \quad m \ge 2,$$

то з (19) випливають оцінки

$$\int\limits_{G_\tau} |z^m|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\, dy + \int\limits_{S_\tau^2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|z^m|^2 \cos(\nu, y_i) e^{-\alpha t}\, dx\, d\sigma dt + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[(\alpha - l\lambda^1 + 2c_0 -$$

$$- \frac{1}{\delta} - 2g^0)|z^m|^2 + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} |z_{x_i}^m|^2 \Bigg] e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \le \delta f_1 \int\limits_0^\tau |r^m(t)|^2 e^{-\alpha t}\, dt, \quad \tau \in (0, T_1], \quad m \ge 2. \tag{20}$$

Покладемо в (20) $\alpha = \alpha_1$, $\delta = T_1$. Позначимо $s^m(t) := \int_{G_t} \left[|z^m|^2 + \sum_{i=1}^n |z_{x_i}^m|^2 \right] dx\, dy$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді з (20) випливають такі нерівності:

$$\int\limits_0^\tau s^m(t)\, dt \le T_1 M_1 \int\limits_0^\tau |r^m(t)|^2\, dt, \quad \tau \in (0, T_1], \quad m \ge 2, \tag{21}$$

де

$$M_1 := \frac{f_1 e^{\alpha_1 T_1}}{\min\{1; 2a_0\}}, \tag{22}$$

$$\int\limits_{G_\tau} |z^m|^2\, dx\, dy \le T_1 f_1 e^{\alpha_1 T_1} \int\limits_0^\tau |r^m(t)|^2\, dt, \quad \tau \in (0, T_1], \quad m \ge 2. \tag{23}$$

Оцінимо значення $|r^m(t)|$, $m \ge 3$. На підставі (15) отримуємо

$$r^m(t) = [K_1(t)]^{-1} \int\limits_{G_t} \Bigg(- \sum_{i=1}^{l} (K(x,y)\lambda_i(x,y,t))_{y_i} z^{m-1} + \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) z_{x_i}^{m-1} +$$

$$+ K(x,y)c(x,y,t)z^{m-1} + K(x,y)(g(x,y,t,u^{m-1}) - g(x,y,t,u^{m-2})) \Bigg) dxdy, \tag{24}$$

$$t \in [0, T_1], \quad m \ge 3.$$

Піднісши обидві частини (24) до квадрата і використавши нерівність Гельдера, одержимо

$$|r^m(t)|^2 \le 3[K_1(t)]^{-2} \Bigg[\int\limits_{G_t} \big(K_2(x,y,t)\big)^2 dxdy \int\limits_{G_t} |z^{m-1}|^2\, dxdy +$$

$$+n^2 \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{G_t} |K_{ij}(x,y,t)|^2\,dxdy \int\limits_{G_t} |z^{m-1}_{x_i}|^2\,dxdy + K_3 \int\limits_{G_t} |z^{m-1}|^2\,dxdy \Bigg], \quad t \in [0,T_1], \quad m \geq 3. \tag{25}$$

Зінтегрувавши (25) за змінною t від 0 до τ, отримаємо оцінки

$$\int\limits_0^\tau |r^m(t)|^2\,dt \leq M_2 \int\limits_0^\tau s^{m-1}(t)\,dt, \quad \tau \in (0,T_1], \quad m \geq 3, \tag{26}$$

де

$$M_2 := \inf_{[0,T_1]} 3[K_1(t)]^{-2} \max\Bigg\{ \sup_{[0,T_1]} \int\limits_{G_t} \big(K_2(x,y,t)\big)^2\,dxdy + K_3;$$

$$n^3 \max_{i,j} \sup_{[0,T_1]} \int\limits_{G_t} (K_{ij}(x,y,t))^2\,dxdy \Bigg\}. \tag{27}$$

Із (21) та (26) випливає, що

$$\int\limits_0^\tau |r^{m+1}(t)|^2\,dt \leq M_2 \int\limits_0^\tau s^m(t)\,dt \leq T_1 M_3 \int\limits_0^\tau |r^m(t)|^2\,dt,$$

де $\tau \in (0,T_1]$, $M_3 := M_1 M_2$, $m \geq 2$. Звідси отримуємо

$$\int\limits_0^\tau |r^m(t)|^2\,dt \leq T_1 M_3 \int\limits_0^\tau |r^{m-1}(t)|^2\,dt \leq (T_1 M_3)^{m-1} \int\limits_0^\tau |r^1(t)|^2\,dt, \quad \tau \in (0,T_1], \quad m \geq 3. \tag{28}$$

Згідно з (14), $|T_1 M_3| < 1$. Використавши (28), отримаємо, шо для всіх $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ справджується нерівність

$$\int\limits_0^\tau |f_0^{m+k}(t) - f_0^m(t)|^2\,dt \leq \sum_{i=m+1}^{m+k} \int\limits_0^\tau |r^i(t)|^2\,dt \leq \sum_{i=m+1}^{m+k} (T_1 M_3)^{i-1} \int\limits_0^\tau |r^1(t)|^2\,dt \leq$$

$$\leq \frac{(T_1 M_3)^m (1 - (T_1 M_3)^k)}{1 - T_1 M_3} \int\limits_0^\tau |r^1(t)|^2\,dt \leq \frac{(T_1 M_3)^m}{1 - T_1 M_3} \int\limits_0^\tau |r^1(t)|^2\,dt, \quad \tau \in (0,T_1], \quad m \geq 3. \tag{29}$$

Із (29) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке m_0, що для всіх k, $m \in \mathbb{N}$, $m > m_0$, виконується нерівність $\|f_0^{m+k}(t) - f_0^m(t); L^2(0,T_1)\| \leq \varepsilon$. Отже, послідовність $\{f_0^m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в $L^2(0,T_1)$. Тоді з (21) та (23) випливає, що $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в $L^2(Q_{T_1}) \cap C([0,T_1]; L^2(G))$ і послідовність $\{u^m_{x_i}\}_{m=1}^\infty$ є фундаментальною в $L^2(Q_{T_1})$, а тому при $m \to \infty$

$$
\begin{aligned}
&u^m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_{T_1}) \cap C([0,T_1]; L^2(G)),\\
&u^m_{x_i} \to u_{x_i} \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_{T_1}), \quad i = 1,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$$
f_0^m \to f_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T_1). \tag{31}
$$

Крім того, у статті [14] для наближень $u^{m,N}$ встановлено такі оцінки (див. (16) та (18) із [14]):

$$
\int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u^{m,N}_{y_i}|^2 dx\,dy \le C_1 \left(\int\limits_{Q_{T_1}} \left(|f(x,y,t)|^2 |f_0^m(t)|^2 + \sum_{i=1}^{l} |f_{y_i}(x,y,t)|^2 |f_0^m(t)|^2 \right) dx\,dy\,dt + \right.
$$

$$
\left. + \int\limits_{G} \left(|u_0(x,y)|^2 + \sum_{i=1}^{l} |u_{0y_i}(x,y)|^2 \, dxdy \right) \right), \quad \tau \in [0,T_1],
$$

$$
\|u^{m,N}_t; L^2(Q_{T_1}) + L^2(0,T_1; V_3^*(G))\| \le C_2,
$$

де сталі C_1, C_2 не залежать від N. Перейдемо до границі при $N \to \infty$. Оскільки $\|v; L^2(Q_{T_1})\|^2 \le$ $\le \lim_{N\to\infty} \|v^N; L^2(Q_{T_1})\|^2$ [16, с. 20], а з (31) випливає обмеженість f_0^m в Q_{T_1}, то отримаємо

$$
\int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u^m_{y_i}|^2 dx\,dy \le C_3, \quad \tau \in [0,T_1], \quad \|u^m_t; L^2(Q_{T_1}) + L^2(0,T_1; V_3^*(G))\| \le C_4, \tag{32}
$$

де сталі C_3, C_4 не залежать від m. Із (32) випливає, що з послідовності $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність (збережемо для неї те саме позначення) таку, що

$$
\begin{aligned}
&u^m_{y_i} \to u_{y_i} \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{T_1}), \quad i = 1,\ldots,l,\\
&u^m_t \to u_t \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_{T_1}) + L^2(0,T_1; V_3^*(G)).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Врахувавши (30), (31), (33), (16), (15) і лему 2, отримаємо, що (u, f_0) — узагальнений розв'язок задачі (1)–(4) в області Q_{T_1}.

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай* $K_1(t) \ne 0$ *для всіх* $t \in [0,T_1]$ *і виконуються умови* (A), (C), (F), (L), (U), (H), (E), (K), (S). *Тоді задача* (1)–(4) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку в області* Q_{T_1}.

Доведення. Припустимо, що $(u^{(1)}, f_0^{(1)})$, $(u^{(2)}, f_0^{(2)})$ — два узагальнені розв'язки задачі (1)–(4) в Q_{T_1}. Тоді їхня різниця $(\tilde u, \tilde f_0)$, де $\tilde u = u^{(1)} - u^{(2)}$, $\tilde f_0 = f_0^{(1)} - f_0^{(2)}$, задовольняє умову $\tilde u(x,y,0) \equiv 0$ та рівність

$$
\int\limits_0^{T_1} \langle \tilde u_t, v\rangle \, dt + \int\limits_{Q_{T_1}} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \tilde u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) \tilde u_{x_i} v_{x_j} + c(x,y,t)\tilde u v + \right.
$$

$$+(g(x,y,t,u^{(1)})-g(x,y,t,u^{(2)}))v\Bigg]\,dx\,dy\,dt=\int\limits_{Q_{T_1}} f(x,y,t)\tilde f_0(t)v\,dx\,dy\,dt \qquad (34)$$

для всіх $v\in V_1(Q_{T_1})$. Згідно з лемою 1, для пари функцій $(\tilde u,\tilde f_0)$ та $\alpha=l\lambda^1-2c_0+1/\delta+1-2g^0$, $\delta>0$, виконується рівність

$$\int\limits_{G_\tau}|\tilde u|^2e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\alpha|\tilde u|^2+2\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\tilde u_{y_i}\tilde u+2\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}\tilde u_{x_j}+2c(x,y,t)|\tilde u|^2+$$

$$+2(g(x,y,t,u^{(1)})-g(x,y,t,u^{(2)}))\tilde u\Bigg]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt=$$

$$=2\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)\tilde f_0(t)\tilde u e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt,\quad \tau\in(0,T_1].$$

Звідси, як із (19), отримуємо оцінку

$$\int\limits_{G_\tau}|\tilde u|^2e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy+\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)|\tilde u|^2\cos(\nu,y_i)e^{-\alpha t}\,dx\,d\sigma dt+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(\alpha-l\lambda^1+2c_0-$$

$$-\frac{1}{\delta}-2g^0)|\tilde u|^2+2a_0\sum_{i=1}^{n}|\tilde u_{x_i}|^2\Bigg]e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt\le\delta f_1\int\limits_0^\tau|\tilde f_0(t)|^2e^{-\alpha t}\,dt,\quad \tau\in(0,T_1]. \qquad (35)$$

В оцінці (35) покладемо $\delta=T_1$, $\alpha=\alpha_1$. Тоді з (35) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[|\tilde u|^2+\sum_{i=1}^{n}|\tilde u_{x_i}|^2\Bigg]\,dx\,dy\,dt\le T_1M_1\int\limits_0^\tau|\tilde f_0(t)|^2\,dt,\quad \tau\in(0,T_1],\quad m\ge 2, \qquad (36)$$

де M_1 визначено в (22). Крім того, на підставі (8) отримуємо

$$K_1(t)\tilde f_0(t)=\int\limits_{G_t}\Bigg(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}\tilde u+\sum_{i,j=1}^{n}K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}+$$

$$+K(x,y)c(x,y,t)\tilde u+K(x,y)(g(x,y,t,u^{(1)})-g(x,y,t,u^{(2)}))\Bigg)\,dxdy,\quad t\in[0,T_1]. \qquad (37)$$

Піднісши (37) до квадрата, зінтегрувавши по t від 0 до T_1 та оцінивши подібно до (25), отримаємо

$$\int\limits_0^{T_1}|\tilde f_0(t)|^2\,dt\le M_2\int\limits_{Q_{T_1}}\Bigg[|\tilde u|^2+\sum_{i=1}^{n}|\tilde u_{x_i}|^2\Bigg]\,dx\,dy\,dt,$$

де M_2 означено в (27). Врахувавши оцінку (36) для $\tau = T_1$, знайдемо

$$\int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\,dt \le M_1 M_2 T_1 \int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\,dt.$$

Тому

$$(1 - M_1 M_2 T_1) \int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\,dt \le 0. \tag{38}$$

Оцінка (38) можлива лише при $\displaystyle\int_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\,dt \le 0$, тому $\tilde{f}_0 \equiv 0$ та $f_0^{(1)} = f_0^{(2)}$. Тоді з (36) випливає $\displaystyle\int_{Q_\tau} |\tilde{u}|^2\,dx\,dy\,dt \le 0$, а тому $u^{(1)} = u^{(2)}$ в Q_{T_1}.

Лему доведено.

Нехай тепер $T_1 < T$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (A), (C), (L), (U), (H), (E), (K), (F), (S) *та* a_{ijy_k}, a_{ijx_i}, $c_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_k} \in L^2(Q_T)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, l$, $f|_{S_T^1} = 0$ *і, крім того,* $K_1(t) \neq 0$ *для всіх* $t \in [0, T]$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі* (1)–(4) *в області* Q_T.

Доведення. Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на скінченну кількість відрізків $[0, T_1]$, $[T_1, 2T_1], \ldots$ $\ldots, [(N-1)T_1, NT_1]$, де $NT_1 = T$, а число T_1 знову задовольняє нерівності $\alpha_1 \ge 0$ та (14). На підставі лем 3, 4 в області Q_{T_1} існує єдиний узагальнений розв'язок $(u_1(x, y, t), f_{0,1}(t))$ задачі (1)–(4).

Доведемо, що за умов теореми в області $Q_{T_1, 2T_1} := G \times (T_1; 2T_1)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі для рівняння (1) з умовами (3), (4) при $t \in [T_1; 2T_1]$ та початковою умовою $u(x, y, T_1) = u_1(x, y, T_1)$, $(x, y) \in G$.

Виконаємо в цій задачі заміну $t = \tau + T_1$, $\tau \in [0; T_1]$. Позначимо $F_0(\tau) = f_0(\tau + T_1)$, $U(x, y, \tau) = u(x, y, \tau + T_1)$, $\lambda_i^{(1)}(x, y, \tau) = \lambda_i(x, y, \tau + T_1)$, $a_{ij}^{(1)}(x, y, \tau) = a_{ij}(x, y, \tau + T_1)$, $c^{(1)}(x, y, \tau) = c(x, y, \tau + T_1)$, $g^{(1)}(x, y, \tau, U) = g(x, y, \tau + T_1, u(x, y, \tau + T_1))$, $f^{(1)}(x, y, \tau) = f(x, y, \tau + T_1)$, $E^{(1)}(\tau) = E(\tau + T_1)$. Для пари функцій $(U(x, y, \tau), F_0(\tau))$ отримаємо задачу

$$U_\tau + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^{(1)}(x, y, \tau) U_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}^{(1)}(x, y, \tau) U_{x_i})_{x_j} + c^{(1)}(x, y, \tau) U +$$

$$+ g^{(1)}(x, y, \tau, U) = f^{(1)}(x, y, \tau) F_0(\tau), \quad (x, y, \tau) \in Q_{T_1}, \tag{39}$$

$$U(x, y, 0) = u_1(x, y, T_1), \quad (x, y) \in G, \tag{40}$$

$$U|_{\Sigma_{T_1}} = 0, \quad U|_{S_{T_1}^1} = 0, \tag{41}$$

$$\int\limits_{G_\tau} K(x, y) U(x, y, \tau)\,dxdy = E^{(1)}(\tau), \quad \tau \in [0, T_1]. \tag{42}$$

Очевидно, що всі коефіцієнти рівняння (39) та функції $f^{(1)}(x, y, \tau)$, $u_1(x, y, T_1)$, $E^{(1)}(\tau)$ задовольняють всі ті ж самі умови, що й відповідні функції з (1) та (4). За лемами 3, 4 існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (39)–(42) в Q_{T_1}, а отже, і задачі для рівняння (1) з умовами (3), (4) при $t \in [T_1; 2T_1]$ та початковою умовою $u(x,y,T_1) = u_1(x,y,T_1)$, $(x,y) \in G$, в області $Q_{T_1,2T_1}$. Позначимо його $(u_2(x,y,t), f_{0,2}(t))$. Проводячи аналогічні міркування на проміжках $[2T_1; 3T_1], \ldots, [(N-1)T_1; NT_1]$, доводимо існування та єдиність узагальнених розв'язків $(u_k(x,y,kt), f_{0,k}(t))$, $k = 3, \ldots, N$, оберненої задачі для рівняння (1) з умовами (3), (4) при $t \in [(k-1)T_1; kT_1]$ та початковою умовою $u(x,y,(k-1)T_1) = u_{k-1}(x,y,(k-1)T_1)$, $(x,y) \in G$, в області $Q_{(k-1)T_1,kT_1} := G \times ((k-1)T_1, kT_1)$. Очевидно, що пара функцій $(u(x,y,t), f_0(t))$, де

$$u(x,y,t) = \begin{cases} u_1(x,y,t), & \text{якщо } (x,y,t) \in Q_{T_1}, \\ u_2(x,y,t), & \text{якщо } (x,y,t) \in Q_{T_1,2T_1}, \\ \ldots & \ldots \\ u_N(x,y,t), & \text{якщо } (x,y,t) \in Q_{(N-1)T_1,NT_1}, \end{cases}$$

$$f_0(t) = \begin{cases} f_{0,1}(t), & \text{якщо } t \in [0, T_1], \\ f_{0,2}(t), & \text{якщо } t \in [T_1, 2T_1], \\ \ldots & \ldots \\ f_{0,N}(t), & \text{якщо } t \in [(N-1)T_1, NT_1], \end{cases}$$

є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в області Q_T.

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай $K_1(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0,T]$ і виконуються умови* (A), (C), (F), (L), (U), (H), (E), (K), (S). *Тоді задача* (1)–(4) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що $(u^{(1)}, f_0^{(1)})$, $(u^{(2)}, f_0^{(2)})$ — два узагальнені розв'язки задачі (1) – (4). Тоді їхня різниця $(\tilde{u}, \tilde{f}_0)$, де $\tilde{u} = u^{(1)} - u^{(2)}$, $\tilde{f}_0 = f_0^{(1)} - f_0^{(2)}$, задовольняє умову $\tilde{u}(x,y,0) \equiv 0$ та рівність

$$\int_0^T \langle \tilde{u}_t, v \rangle \, dt + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \tilde{u}_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) \tilde{u}_{x_i} v_{x_j} + c(x,y,t) \tilde{u} v + \right.$$

$$\left. + (g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)})) v \right] dx\, dy\, dt = \int_{Q_T} f(x,y,t) \tilde{f}_0(t) v \, dx\, dy\, dt \qquad (43)$$

для всіх $v \in V_1(Q_T)$. Згідно з лемою 1, для пари функцій $(\tilde{u}, \tilde{f}_0)$ та $\alpha = \alpha_1$ виконується рівність

$$\int_{G_\tau} |\tilde{u}|^2 e^{-\alpha\tau} \, dx\, dy + \int_{Q_\tau} \left[\alpha |\tilde{u}|^2 + 2 \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \tilde{u}_{y_i} \tilde{u} + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) \tilde{u}_{x_i} \tilde{u}_{x_j} + 2c(x,y,t) |\tilde{u}|^2 + \right.$$

$$\left. + 2(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)})) \tilde{u} \right] e^{-\alpha t} \, dx\, dy\, dt =$$

$$= 2 \int_{Q_\tau} f(x,y,t) \tilde{f}_0(t) \tilde{u} e^{-\alpha t} \, dx\, dy\, dt, \quad \tau \in (0, T].$$

Нехай число T_1 задовольняє умову (14). Звідси, як із (19), отримуємо оцінку

$$\int\limits_{G_\tau} |\tilde{u}|^2 e^{-\alpha_1 \tau}\, dx\, dy + \int\limits_{S_\tau^2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|\tilde{u}|^2 \cos(\nu, y_i) e^{-\alpha_1 t}\, dx\, d\sigma dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[|\tilde{u}|^2 + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} |\tilde{u}_{x_i}|^2 \right] e^{-\alpha_1 t}\, dx\, dy\, dt \le T_1 f_1 \int\limits_0^\tau |\tilde{f}_0(t)|^2 e^{-\alpha_1 t}\, dt, \quad \tau \in (0,T]. \tag{44}$$

В (44) покладемо $\tau = T_1$. Тоді з (44) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left[|\tilde{u}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\tilde{u}_{x_i}|^2 \right] dx\, dy\, dt \le T_1 M_1 \int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\, dt, \quad m \ge 2, \tag{45}$$

де M_1 визначено в (22). Крім того, на підставі (8) отримуємо

$$\tilde{f}_0(t) = [K_1(t)]^{-1} \int\limits_{G_t} \Bigg(- \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i} \tilde{u} + \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) \tilde{u}_{x_i} +$$

$$+ K(x,y)c(x,y,t)\tilde{u} + K(x,y)(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)})) \Bigg) dxdy, \quad t \in [0,T]. \tag{46}$$

Піднісши (46) до квадрата, зінтегрувавши по t від 0 до T_1 та оцінивши подібно до (25), отримаємо

$$\int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\, dt \le M_2 \int\limits_{Q_{T_1}} \left[|\tilde{u}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\tilde{u}_{x_i}|^2 \right] dx\, dy\, dt,$$

де M_2 означено в (27). Врахувавши оцінку (45), знайдемо

$$\int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\, dt \le M_1 M_2 T_1 \int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\, dt.$$

Тому

$$(1 - M_1 M_2 T_1) \int\limits_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\, dt \le 0. \tag{47}$$

Оцінка (47) можлива лише при $\int_0^{T_1} |\tilde{f}_0(t)|^2\, dt \le 0$, тому $\tilde{f}_0 \equiv 0$ та $f_0^{(1)} = f_0^{(2)}$ на $[0, T_1]$. Тоді з (45) випливає $\int_{Q_{T_1}} |\tilde{u}|^2\, dx\, dy\, dt \le 0$, а тому $u^{(1)} = u^{(2)}$ в Q_{T_1}.

Тоді рівність (43) запишемо так:

$$\int_{T_1}^{T} \langle \tilde{u}_t, v\rangle\, dt + \int_{Q_{T_1,T}} \left[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\tilde{u}_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\tilde{u}_{x_i} v_{x_j} + c(x,y,t)\tilde{u}v + \right.$$

$$\left. +(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)}))v \right] dx\, dy\, dt = \int_{Q_{T_1,T}} f(x,y,t)\tilde{f}_0(t) v\, dx\, dy\, dt \qquad (48)$$

для всіх $v \in V_1(Q_T)$, $\tilde{u}(x,y,T_1) = 0$. Виконавши в (48) та (46) заміну змінних $t = \tau + T_1$, $\tau \in [0, T - T_1]$, та провівши міркування, аналогічні до попередніх, переконаємося, що $u^{(1)} = u^{(2)}$ в $Q_{[T_1,2T_1]}$, $f_0^{(1)} = f_0^{(2)}$ на $[T_1, 2T_1]$. Продовжуючи так само доведення, встановлюємо, що $u^{(1)} = u^{(2)}$ в Q_T, $f_0^{(1)} = f_0^{(2)}$ на $[0,T]$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Результати роботи можуть бути перенесені на випадок оберненої задачі для рівняння

$$L[u] := u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i=1,j}^{n} (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g^0(x,y,t)u =$$

$$= f(x,y,t) f_0(t) + h(x,y,t) \qquad (49)$$

з умовами (2) – (4), де вихідні дані задачі задовольняють умови (A), (C), (F), (L), (U), (H), (E), (K), причому $h \in C([0,T]; L^2(G))$, $h_{y_j} \in L^2(Q_T)$, $j = 1, \ldots, l$, $h|_{S_T} = 0$.

Узагальнений розв'язок задачі (49), (2) – (4) визначає формула

$$\{u(x,y,t), f_0(t)\} = \{v(x,y,t), 0\} + \{w(x,y,t), f_0(t)\},$$

де v — узагальнений розв'язок прямої задачі для рівняння $L[v] = h(x,y,t)$ з умовами (2), (3), а пара $\{w(x,y,t), f_0(t)\}$ — узагальнений розв'язок оберненої задачі для рівняння $L[w] = f(x,y,t)f_0(t)$ з умовами (3), $w(x,y,0) = 0$, $(x,y) \in G$ та умовою перевизначення

$$\int_{G_t} K(x,y) w(x,y,t)\, dxdy = E(t) - \int_{G_t} K(x,y) v(x,y,t)\, dxdy, \quad t \in [0,T].$$

1. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 4. – С. 522 – 534.
2. *Kozhanov A. I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation II // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2003. – **11**, № 5. – P. 505 – 522.
3. *Ivanchov M. I.* Inverse problem for semilinear parabolic equation // Мат. студ. – 2008. – **29**. – С. 181 – 191.
4. *Ivanchov M. I.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Stud., Monograph Ser. – 2003. – Vol. 10. – 238 p.
5. *Prilepko A. I., Kostin A. B.* On inverse problems of determining a coefficient in a parabolic equation. II // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – **34**, № 5. – P. 147 – 162.
6. *Borukhov V. T., Vabishchevich P. N.* Numerical solution of the inverse problem of recovering a distributed right-hand side of a parabolic equation // Comput. Phys. Communs. – 2000. – **126**. – P. 32 – 36.

7. *Павлов С. С.* Разрешимость обратной задачи восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении // Вестн. Челябин. гос. ун-та. – 2011. – № 26. – С. 27 – 37.
8. *Бейлина Н. В.* Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Физ.-мат. науки. – 2008. – **65**, № 6. – С. 28 – 39.
9. *Lorenzi A.* Identification problems in Banach spaces for linear first-order partial differential equations in one space dimension and applications // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2012. – **20**. – P. 65 – 102.
10. *Lorenzi L.* An identification problem for an ultraparabolic integrodifferential equation // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **234**. – P. 417 – 456.
11. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Birkhäuser, 2004. – 390 p.
12. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. вісн. – 2004. – № 1. – С. 61 – 68.
13. *Lavrenyuk S., Protsakh N.* Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – **38**. – P. 131 – 146.
14. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1192 – 1210.
15. *Protsakh N.* Mixed problem for degenerate nonlinear ultraparabolic equation // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – **43**. – P. 203 – 214.
16. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Одержано 11.03.13