УДК 517.925.52

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне)

УМОВИ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОСТІ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear almost periodic differential equations in Banach spaces without using the $\mathcal{H}$-classes of these equations.

Получены условия существования почти периодических решений нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, в которых не используются $\mathcal{H}$-классы этих уравнений.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай E — довільний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із банахового простору X у банаховий простір Y, з нормою $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями у просторі E з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \big\|x(t)\big\|_E$, а через C^1 банаховий простір функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $dx/dt \in C^0$, з нормою $\|x\|_{C^1} = \max\big\{\|x\|_{C^0}, \|dx/dt\|_{C^0}\big\}$.

Визначимо оператор зсуву $S_h \in L(C^0, C^0)$, $h \in \mathbb{R}$, формулою

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Елемент $y \in C^k$, $k = \overline{0,1}$, називається *майже періодичним* (за Бохнером) (див., наприклад, [1–4]), якщо замикання множини $\{S_h y \colon h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^k є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через B^0 і B^1 банахові простори майже періодичних елементів просторів C^0 і C^1 з нормами $\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}$ і $\|x\|_{B^1} = \|x\|_{C^1}$ відповідно.

Нехай Ω_1 і Ω_2 — області простору E, тобто відкриті зв'язні множини простору E, а $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{K}_2$ — множини всіх непорожніх зв'язних компактних підмножин $K_1 \subset \Omega_1$ і $K_2 \subset \Omega_2$ відповідно.

Розглянемо неперервне відображення $F\colon \mathbb{R}\times\Omega_1\times\Omega_2 \to E$, що задовольняє умови:

1) $F(t,x_1,x_2)$ є рівномірно неперервним по (x_1,x_2) на кожній множині $\mathbb{R}\times K_1\times K_2$, де $K_1 \in \mathcal{K}_1$ і $K_2 \in \mathcal{K}_2$;

2) $F(t,x_1,x_2)$ є майже періодичним по t рівномірно по (x_1,x_2) на кожній множині $K_1 \times K_2 \in \mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2$.

Як і в [4, с. 428, 429], можна показати, що для кожної множини $K_1\times K_2 \in \mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2$

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ (x_1,x_2)\in K_1\times K_2} \big\|F(t,x_1,x_2)\big\|_E < +\infty$$

і для довільної послідовності $(h_k)_{k\geq1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq1}$, для якої послідовність $\big(F(t+h_{k_l},x_1,x_2)\big)_{l\geq1}$ збігається рівномірно на множині $\mathbb{R}\times K_1\times K_2$.

Вважатимемо, що послідовність $\big(F(t+h_{k_l},x_1,x_2)\big)_{l\geq1}$ збігається рівномірно на кожній множині $\mathbb{R}\times K_1\times K_2$, $K_1\times K_2 \in \mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2$, і граничне відображення $G\colon \mathbb{R}\times\Omega_1\times\Omega_2 \to E$, що визначається співвідношенням

$$G(t,x_1,x_2) = \lim_{l\to\infty} F(t+h_{k_l},x_1,x_2), \tag{2}$$

задовольняє умови 1 і 2. Наведена вимога виконується, якщо, наприклад, простір E є скінченновимірним (див. [4, с. 429]). Зазначимо, що у подальшому ця вимога відіграватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

що не розв'язане відносно похідної. *$\mathcal{H}$-класом* цього рівняння називається множина всіх диференціальних рівнянь

$$G\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

у кожному з яких відображення G визначається за допомогою співвідношення (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених розв'язків рівняння (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння. При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати допоміжне функціональне рівняння й один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, замикання множин значень яких — елементи з $\mathcal{K}_1$.

2. Допоміжне функціональне рівняння. Використаємо лінійний неперервний диференціальний оператор $L\colon C^1 \to C^0$ та обернений для цього оператора неперервний оператор $L^{-1}\colon C^0 \to C^1$, що визначаються формулами

$$(Lx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \ x \in C^1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

і

$$(L^{-1}y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} y(t+\tau)\, d\tau, \qquad y \in C^0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

За допомогою оператора L рівняння (3) можна записати у вигляді

$$F\big(t, x(t), (Lx)(t) - x(t)\big) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Якщо функція $x = x(t)$ є розв'язком рівняння (3) і елементом простору C^1, то

$$x(t) = \big(L^{-1}y\big)(t), \tag{7}$$

де

$$y(t) = \big(Lx(t)\big)(t), \tag{8}$$

і функція $y = y(t)$ є елементом простору C^0 та розв'язком рівняння

$$F\big(t, (L^{-1}y)(t), y(t) - (L^{-1}y)(t)\big) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Тут враховано (6) – (8). Навпаки, якщо функція $y = y(t)$ є елементом простору C^0 та розв'язком рівняння (9), то функція $x = x(t)$, що визначається рівністю (7), є розв'язком рівняння (3) і елементом простору C^1.

Таким чином, *дослідження розв'язків диференціального рівняння* (3) *у просторі* C^1 *зводиться до дослідження розв'язків функціонального рівняння* (9) *у просторі* C^0.

Зазначимо, що на підставі (5) рівняння (9) можна записати у вигляді

$$F\left(t, \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} y(t+\tau)\, d\tau, y(t) - \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} y(t+\tau)\, d\tau\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Оскільки оператор L є автономним, тобто $S_h L S_{-h} = L$ для кожного $h \in \mathbb{R}$, то $L^{-1}y \in B^1$ для кожного $y \in B^0$ (див., наприклад, [5]) і $Lx \in B^0$ для кожного $x \in B^1$. Тому якщо функція $x = x(t)$ є розв'язком рівняння (3) і елементом простору B^1, то функція $y = y(t)$, що визначається рівністю (8), є елементом простору B^0 та розв'язком рівняння (9), і навпаки.

Отже, *щоб показати, що обмежений розв'язок* $x = x(t)$ *диференціального рівняння* (3), *який є елементом простору* C^1, *майже періодичний, достатньо показати, що відповідний розв'язок* $y(t) = (Lx)(t)$ *функціонального рівняння* (9) *майже періодичний.*

У подальшому для дослідження рівняння (3) ми будемо використовувати рівняння (9).

3. Функціонал $\boldsymbol{\Delta}$. Позначимо через K^0 множину таких функцій $x = x(t)$ простору C^0, для кожної з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини $R(x) = \big\{x(t)\colon t \in \mathbb{R}\big\}$ у просторі E є компактною підмножиною цього простору. Аналогічно позначимо через K^1 множину таких функцій $x \in \in K^0 \cap C^1$, для кожної з яких множина $\overline{R(dx/dt)}$ є компактною у просторі E.

Очевидно, що K^0 і K^1 — підпростори просторів C^0 і C^1 відповідно і $B^l \subset K^l$, $l = \overline{0,1}$.

Зафіксуємо довільний розв'язок $x^* = x^*(t)$ рівняння (3), що є елементом простору K^1. Тоді функція $y^* = y^*(t)$, що визначається рівністю

$$y^*(t) = \big(Lx^*(t)\big)(t), \tag{11}$$

є розв'язком рівняння (9). Ця функція є елементом простору K^0, оскільки

$$y^*(t) = \frac{dx^*(t)}{dt} + x^*(t)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$,

$$R(y^*) = \left\{\frac{dx^*(t)}{dt} + x^*(t)\colon t \in \mathbb{R}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\frac{dx^*(t)}{dt}\colon t \in \mathbb{R}\right\} + \big\{x^*(t)\colon t \in \mathbb{R}\big\} = R(dx^*/dt) + R(x^*) \subset K_1 + K_2$$

і $K_1 + K_2$ є компактною множиною. Нагадаємо, що

$$K_1 + K_2 = \big\{k_1 + k_2\colon k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\big\}.$$

Також зафіксуємо довільну компактну підмножину K простору E, для якої $R(y^*) \subset K$, $\overline{R(y^*)} \neq K$ і для довільної функції $z = z(t)$ з простору C^0, що задовольняє співвідношення

$$y^*(t) + z(t) \in K \tag{12}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, компактні множини $\overline{R\big(L^{-1}(y^* + z)\big)}$ і $\overline{R\big(y^* + z - L^{-1}(y^* + z)\big)}$ є підмножинами множин Ω_1 і Ω_2 відповідно (у випадку $\Omega_1 = \Omega_2 = E$ остання вимога виконується). Множину всіх таких функцій $z = z(t)$ позначимо через Ω.

Зазначимо, що множини $\overline{R\big(L^{-1}(y^* + z)\big)}$ і $\overline{R\big(y^* + z - L^{-1}(y^* + z)\big)}$ компактні, оскільки на підставі (5), (12) та рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau}\, d\tau = 1$$

виконуються співвідношення

$$\overline{R\left(L^{-1}(y^* + z)\right)} \subset \operatorname{co} K$$

і

$$\overline{R\left(y^* + z - L^{-1}(y^* + z)\right)} \subset K - \operatorname{co} K,$$

де $\operatorname{co} K$ — опукла оболонка множини K, а множини $\operatorname{co} K$ та $K - \operatorname{co} K$ компактні завдяки компактності K.

Покладемо

$$r(y^*, K) = \sup \left\{ \|y - z\|_E \colon y \in \overline{R(y^*)}, z \in K \right\}. \tag{13}$$

Завдяки нерівності $\overline{R(y^*)} \neq K$

$$r(y^*, K) > 0.$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in \big[0, r(y^*, K)\big]$. Позначимо через $\Omega(y^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $z \in \Omega$, для кожного з яких

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \ \big| \|z(t)\|_E - \varepsilon \big| = 0. \tag{14}$$

Розглянемо функціонал

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon) =$$

$$= \inf_{z \in \Omega(y^*, K, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t, \big(L^{-1}(y^* + z)\big)(t), y^*(t) + z(t) - \big(L^{-1}(y^* + z)\big)(t)\big) \Big\|_E. \tag{15}$$

Застосування функціонала Δ до дослідження майже періодичних нелінійного диференціального рівняння (3) та аналогічного лінійного диференціального рівняння наведемо в наступних пунктах.

Аналогічний функціонал для дослідження нелінійних майже періодичних різницевого рівняння з неперервним аргументом

$$x(t + 1) = f\big(t, x(t)\big)$$

і диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big),$$

в яких відображення $f\colon \mathbb{R}\times\Omega\to E$, де Ω — довільна область простору E, є неперервним, використовувався автором у [6, 7].

4. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (3), в яких на відміну від теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [4, 8]) не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (3).

Теорема 1. *Нехай обмежений розв'язок* x^* *диференціального рівняння* (3), *відповідний розв'язок* y^* *функціонального рівняння* (9) *і компактна множина* K *задовольняють умови пункту* 3. *Якщо для деякого числа* $\delta>0$ *виконується співвідношення*

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{16}$$

для всіх $\varepsilon\in(0,\delta)$, *то розв'язок* x^* *є майже періодичним.*

Доведення. Припустимо, що розв'язок x^* диференціального рівняння (3) не є елементом простору B^1. Тоді завдяки наведеним у пункті 2 міркуванням відповідний розв'язок y^* функціонального рівняння (9) (розв'язки y^* і x^* пов'язані співвідношенням (11)) не є елементом простору B^0. Тому на підставі компактності множини K існує послідовність $\big(y^*(t+h_p)\big)_{p\geq 1}$, що збігається в точці $t=0$, причому будь-яка її підпослідовність $\big(y^*(t+k_p)\big)_{p\geq 1}$ не збігається рівномірно на $\mathbb{R}$. Отже,

$$\lim_{p,q\to\infty}\big\|y^*(h_p)-y^*(h_q)\big\|_E = 0 \tag{17}$$

і для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ та числа $\gamma\in(0,\delta)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\big\|y^*(t+k_{p_r})-y^*(t+k_{q_r})\big\|_E > \gamma, \quad r\geq 1. \tag{18}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовність $\big(F(t+k_p, x_1, x_2)\big)_{p\geq 1}$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}\times K_1^*\times K_2^*$, де

$$K_1^* = \overline{\big\{(L^{-1}y^*)(t)\colon t\in\mathbb{R}\big\}}$$

і

$$K_2^* = \overline{\big\{y^*(t)-(L^{-1}y^*)(t)\colon t\in\mathbb{R}\big\}}.$$

Зазначимо, що множини K_1^* і K_2^* компактні. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R},\ x_1\in K_1^*,\ x_2\in K_2^*}\big\|F(t+k_p, x_1, x_2)-F(t+k_q, x_1, x_2)\big\|_E = 0. \tag{19}$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon_0\in(0,\gamma]$. На підставі (17) і (18) для функцій

$$z_r(t) = y^*(t+k_{p_r})-y^*(t+k_{q_r}), \quad r\geq 1,$$

виконується співвідношення

$$z_r\in\Omega(S_{k_{q_r}}y^*, K, \varepsilon_0), \quad r\geq 1, \tag{20}$$

де S_h — оператор зсуву, визначений співвідношенням (1).

Покажемо, що

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon_0) = 0. \tag{21}$$

Завдяки (15), (20) та тому, що

$$F\big(t + k_{p_r}, (L^{-1}y^*)(t + k_{p_r}), y^*(t + k_{p_r}) - (L^{-1}y^*)(t + k_{p_r})\big) \equiv 0, \quad r \geq 1,$$

виконуються співвідношення

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon_0) =$$

$$= \inf_{z \in \Omega(y^*, K, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t, \big(L^{-1}(y^* + z)\big)(t), y^*(t) + z(t) - \big(L^{-1}(y^* + z)\big)(t)\big) \Big\|_E =$$

$$= \inf_{z \in \Omega(S_{k_{q_r}} y^*, K, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t + k_{q_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{q_r}) + \big(L^{-1}z\big)(t), y^*(t + k_{q_r}) + z(t) -$$

$$- \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{q_r}) - \big(L^{-1}z\big)(t)\big) \Big\|_E \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t + k_{q_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{q_r}) + \big(L^{-1}z_r\big)(t), y^*(t + k_{q_r}) + z_r(t) -$$

$$- \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{q_r}) - \big(L^{-1}z_r\big)(t)\big) \Big\|_E =$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t + k_{q_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r}), y^*(t + k_{p_r}) - \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r})\big) \Big\|_E \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t + k_{p_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r}), y^*(t + k_{p_r}) - \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r})\big) \Big\|_E +$$

$$+ \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t + k_{p_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r}), y^*(t + k_{p_r}) - \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r})\big) -$$

$$- F\big(t + k_{q_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r}), y^*(t + k_{p_r}) - \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r})\big) \Big\|_E =$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} \Big\| F\big(t + k_{p_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r}), y^*(t + k_{p_r}) - \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r})\big) -$$

$$- F\big(t + k_{q_r}, \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r}), y^*(t + k_{p_r}) - \big(L^{-1}y^*\big)(t + k_{p_r})\big) \Big\|_E \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \mathbb{R},\ x_1 \in K_1^*,\ x_2 \in K_2^*} \Big\| F(t + k_{p_r}, x_1, x_2) - F(t + k_{q_r}, x_1, x_2) \Big\|_E,$$

з яких на підставі (19) випливає співвідношення (21), що суперечить (16).

Отже, припущення, що розв'язок x^* диференціального рівняння (3) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** Рівняння (3) може бути нерозв'язним відносно похідної. Однак теорема 1 дає змогу обґрунтовувати майже періодичність обмежених розв'язків рівняння (3) і в цьому випадку (відповідний приклад наведено в пункті 6).

5. Випадок лінійного рівняння (3). Розглянемо неперервне відображення $H\colon \mathbb{R}\times E\times E \to$ $\to E$, що визначається рівністю

$$H(t,x_1,x_2)=A(t)x_2+B(t)x_1-h(t),$$

де $A(t)$ і $B(t)$ — неперервні і майже періодичні на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E,E)$, а $h(t)$ — неперервна і майже періодична на $\mathbb{R}$ функція зі значеннями в E, тобто елемент простору B^0. Легко переконатися, що H задовольняє ті умови, що і відображення F у пункті 1 у випадку $\Omega_1=\Omega_2=E$. Розглянемо також відповідне лінійне диференціальне рівняння

$$A(t)\frac{dx(t)}{dt}+B(t)x(t)-h(t)=0,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{22}$$

Застосуємо теорему 1 до дослідження рівняння (22).

Припустимо, що це рівняння має розв'язок $x^*=x^*(t)$, що є елементом простору K^1. Розглянемо функцію

$$y^*(t)=(Lx^*)(t),$$

де L — оператор, що визначається формулою (4). Ця функція є елементом простору K^0 і розв'язком рівняння

$$A(t)\left(y(t)-\left(L^{-1}y\right)(t)\right)+B(t)\left(L^{-1}y\right)(t)-h(t)=0,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{23}$$

тобто

$$A(t)\left(y^*(t)-\left(L^{-1}y^*\right)(t)\right)+B(t)\left(L^{-1}y^*\right)(t)-h(t)\equiv 0. \tag{24}$$

Зафіксуємо довільні компактну множину $K\subset E$, для якої $R(y^*)\subset K$ і $\overline{R(y^*)}\neq K$, і число $\varepsilon\in\big(0,r(y^*,K)\big]$ $\big(r(y^*,K)$ визначається рівністю (13)$\big)$. Позначимо через $\Omega(y^*,K,\varepsilon)$ множину всіх елементів $z=z(t)$ простору C^0, для кожного з яких виконуються співвідношення (12) і (14).

У випадку рівняння (22) функціонал Δ на підставі (15) і (24) має вигляд

$$\Delta(y^*,K,\varepsilon)=\inf_{z\in\Omega(y^*,K,\varepsilon)}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|A(t)\left(z(t)-\left(L^{-1}z\right)(t)\right)+B(t)\left(L^{-1}z\right)(t)\right\|_E.$$

Враховуючи (5), отримуємо

$$\Delta(y^*,K,\varepsilon)=$$

$$=\inf_{z\in\Omega(y^*,K,\varepsilon)}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|A(t)\left(z(t)-\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\tau}z(t+\tau)\,d\tau\right)+B(t)\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\tau}z(t+\tau)\,d\tau\right\|_E.$$

Завдяки теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(y^*, K, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то розв'язок x^* диференціального рівняння (22) *є майже періодичним.*

***Зауваження* 2.** Теорема 2 застосовна до рівняння (22) і у випадку, коли в цьому рівнянні майже періодичний коефіцієнт $A(t)$ може бути таким, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує обернений неперервний оператор $A^{-1}(t)$ для $A(t)$ і

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|A^{-1}(t)\right\|_{L(E,E)} = +\infty,$$

тобто $A^{-1}(t)$ не є майже періодичною функцією (відповідний приклад наведено в наступному пункті).

6. Приклад застосування теорем 1 і 2. Будемо вважати, що $E = \mathbb{R}^2$ і норма в $\mathbb{R}^2$ визначається рівністю $\left\|(x_1, x_2)\right\|_{\mathbb{R}^2} = |x_1| + |x_2|$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\mu \sin \frac{dx_1(t)}{dt} + (2 + \cos t + \cos \pi t)\frac{dx_1(t)}{dt} + x_2(t) = 1, \\ &\frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = 1, \end{aligned} \tag{25}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$. При $\mu \neq 0$ ця система є нелінійною і нерозв'язною відносно $\left(\dfrac{dx_1(t)}{dt}, \dfrac{dx_2(t)}{dt}\right)$, а при $\mu = 0$ — лінійною і її можна подати у вигляді (22), де $A(t)$, $B(t)$ і $h(t)$ визначаються рівностями

$$A(t)(x_1, x_2) = \big((2 + \cos t + \cos \pi t)x_1, x_2\big), \qquad B(t)(x_1, x_2) = (x_2, x_2)$$

і

$$h(t) = (1, 1).$$

Очевидно, що $A(t)$, $B(t)$ і $h(t)$ є майже періодичними функціями і для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$A^{-1}(t)(x_1, x_2) = \big((2 + \cos t + \cos \pi t)^{-1} x_1, x_2\big).$$

Функція $A^{-1}(t)$ не є майже періодичною, оскільки

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |2 + \cos t + \cos \pi t| = 0$$

і, як наслідок,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|A^{-1}(t)\right\|_{L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)} = +\infty.$$

При $\mu \neq 0$ до системи рівнянь (25) застосовна теорема 1, а при $\mu = 0$ — теореми 1 і 2.

Очевидно, що система рівнянь (25) має обмежений розв'язок

$$x_1^*(t) \equiv 0, \qquad x_2^*(t) \equiv 1, \tag{26}$$

який є майже періодичним як сталий розв'язок. Ця властивість розв'язку також випливає з теореми 1 (при $\mu \in \mathbb{R}$) та теореми 2 (при $\mu = 0$), що підтверджується наступними міркуваннями.

Запишемо для (25) систему функціональних рівнянь, аналогічну (10). Вона має вигляд

$$\begin{gathered} \mu \sin\left(y_1(t) - \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} y_1(t+\tau)\, d\tau\right) + \\ +(2+\cos t+\cos \pi t)\left(y_1(t) - \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} y_1(t+\tau)\, d\tau\right) + \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} y_2(t+\tau)\, d\tau = 1, \\ y_2(t) = 1 \end{gathered} \tag{27}$$

і розв'язок

$$y_1^*(t) \equiv 0, \quad y_2^*(t) \equiv 1,$$

що згідно з (8) відповідає розв'язку (26) системи диференціальних рівнянь (25).

Зафіксуємо довільне число $\delta \in (0, 1/2]$ і розглянемо компактну множину

$$K = \big\{(0, x_2)\colon x_2 \in [1-\delta, 1+\delta]\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Завдяки визначенню функціонала Δ для рівняння (10) цей функціонал у випадку системи рівнянь (27) для кожного числа $\varepsilon \in (0, \delta]$ подається рівністю

$$\Delta((y_1^*, y_2^*), K, \varepsilon) = \inf_{z\in C^0,\ R(z)\subset[-\delta,\delta],\ \varepsilon\in\overline{R(|z|)}} \ \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\left|\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} z(t+\tau)\, d\tau\right| + \big|z(t)\big|\right).$$

Тут C^0 — визначений у пункті 1 банаховий простір у випадку $E = \mathbb{R}$. Звідси випливає, що

$$\Delta\big((y_1^*, y_2^*), K, \varepsilon\big) \geq \varepsilon > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, \delta]$. Тому і за теоремами 1 (при $\mu \in \mathbb{R}$) і 2 (при $\mu = 0$) розв'язок (26) системи рівнянь (25) є майже періодичним.

На завершення зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійного диференціального рівняння (3) та лінійного диференціального рівняння (22) є новими. На відміну від відомих теорем Амеріо [8] і Фавара [9] у теоремах 1 і 2 не використовуються $\mathcal{H}$-класи рівнянь (3) і (22). Також у теоремі 1 не використовується умова відокремлення обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу рівняння (3).

Дослідженню розв'язків майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо лише частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [9], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [8]. Результати Фавара були значно покращені Е. Мухамадієвим [10, 11]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [3], Амеріо [12] та В. В. Жикову [13]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [5, 14, 15]. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь та різницевих рівнянь з неперервним аргументом без використання $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь отримано в [6, 7].

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремі 1 є суттєвою) отримано в [16 – 19].

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. I Teil. Funktionen einer Variablen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – S. 119 – 147.
2. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. II Teil. Funktionen mehrerer Variablen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – S. 383 – 409.
3. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116(158)**, № 4(12). – С. 483 – 501.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 2. – С. 118 – 124.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307 – 312.
8. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97 – 119.
9. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. – 1927. – **51**. – P. 31 – 81.
10. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
11. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
12. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. – 1960. – **30**. – P. 288 – 301.
13. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 121 – 126.
14. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 1(5). – С. 86 – 104.
15. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
16. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541 – 1556.
17. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1685 – 1698.
18. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103 – 126.
19. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2012. – **203**, № 5. – С. 135 – 160.

Одержано 21.03.13