К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 512.552.1

В. В. Зембик (Ін-т математики НАН України, Київ)

БУДОВА СКІНЧЕННОВИМІРНИХ НОДАЛЬНИХ АЛГЕБР

The structure of finite-dimensional nodal algebras over an arbitrary field is described.

Описывается строение конечномерных нодальных алгебр над произвольным полем.

Нодальні алгебри вперше було розглянуто у статті [1], де доведено, що це єдині чисто нетерові алгебри, для яких опис усіх скінченнопороджених модулів є ручною задачею (тут чисто нетеровою алгеброю називається кільце, що має нетерів центр і є скінченнопородженим модулем над центром та не містить мінімальних лівих і правих ідеалів). У роботах [2, 3] встановлено, що для нодальних алгебр, і тільки для них, ручною є похідна категорія категорії скінченнопороджених модулів, і наведено явний опис цієї категорії. Постає природне питання вивчення будови таких алгебр. У статті [4] описано будову нодальних алгебр над повним дискретно нормованим кільцем з алгебраїчно замкненим полем лишків. У даній роботі вводяться до розгляду скінченновимірні нодальні алгебри над довільним полем і дається їх опис.

Ми фіксуємо деяке поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри. Нагадаємо [5] (гл. 8), що спадкова алгебра H над довільним полем задається парою $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — напівпроста алгебра, а V — $\bar{H}$-бімодуль. Якщо алгебра $\bar{H}$ є базовою, то $\bar{H} = \bar{H}_1 \times \ldots \times \bar{H}_s$, де $\bar{H}_i$ — тіла. $V = \bigoplus V_{ij}$, де V_{ij} — $\bar{H}_i$-$\bar{H}_j$-бімодуль.

Означення 1. *Алгебра A називається нодальною, якщо існує спадкова алгебра H з* $\operatorname{rad} H = J$, $H \supset A \supset J$, *така, що*:

1) $\operatorname{rad} A = J$;

2) $\operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$ *для кожного простого лівого A-модуля U.*

Будемо казати, що нодальна алгебра A *пов'язана зі спадковою алгеброю* H.

***Зауваження* 1.** Далі ми побачимо, що умову 2 означення нодальної алгебри можна замінити на еквівалентну симетричну:

$$\operatorname{length}_A(V \otimes_A H) \leqslant 2 \text{ для кожного простого правого } A\text{-модуля } V.$$

Твердження 1. *Якщо алгебра A' Моріта-еквівалентна нодальній алгебрі A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, то A' є нодальною алгеброю, пов'язаною зі спадковою алгеброю H', яка Моріта-еквівалентна H.*

Доведення. Позначимо $J = \operatorname{rad} H = \operatorname{rad} A$. Нехай P — проективний генератор категорії $\operatorname{mod}\text{-}A$ правих A-модулів такий, що $A' \simeq \operatorname{End}_A P$. Тоді й $A \simeq \operatorname{End}_{A'} P \simeq P^\vee \otimes_{A'} P$, де $P^\vee = \operatorname{Hom}_{A'}(P, A') \simeq \operatorname{Hom}_A(P, A)$. Нехай $P' = P \otimes_A H$. Тоді P' — проективний генератор категорії $\operatorname{mod}\text{-}H$. Покладемо $H' = \operatorname{End}_H P'$. Зауважимо, що $\operatorname{Hom}_H(P', M) \simeq \operatorname{Hom}_A(P, M)$ для кожного правого H-модуля M. Зокрема, $\operatorname{End}_H P' \simeq \operatorname{Hom}_A(P, P')$. Отже, природне відображення $A' \to H'$ є мономорфізмом. Більш того, оскільки $P'J = PJ$, то

$$\operatorname{rad}\operatorname{End}_H P' = \operatorname{Hom}_H(P', PJ') \simeq \operatorname{Hom}_A(P, P'J) = \operatorname{Hom}_A(P, PJ) = \operatorname{rad}\operatorname{End}_A P$$

(див. [5], гл. 3, вправа 6). Таким чином, $\operatorname{rad} A' = \operatorname{rad} H' \subset A' \subseteq H'$. Довільний простий A-модуль ізоморфний $U' = P \otimes_A U$ для деякого простого A-модуля U. Тому

$$H' \otimes_{A'} U' = H' \otimes_{A'} (P \otimes_A U) \simeq (H' \otimes_{A'} P) \otimes_A U \simeq (P \otimes_A H) \otimes_A U \simeq P \otimes_A (H \otimes_A U),$$

оскільки

$$H' \otimes_{A'} P \simeq \operatorname{Hom}_A(P, P \otimes_A H) \otimes_{A'} P \simeq ((P \otimes_A H) \otimes_A P^{\vee}) \otimes_{A'} P \simeq$$

$$\simeq (P \otimes_A H) \otimes_A (P^{\vee} \otimes_{A'} P) \simeq P \otimes_A (H \otimes_A A) \simeq P \otimes_A H.$$

Отже, $\operatorname{length}_{A'}(H' \otimes_{A'} U') = \operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$, тому A' є нодальною.

Дане твердження дозволяє розглядати лише базові нодальні алгебри A, тобто такі, що $A/\operatorname{rad} A$ є прямим добутком тіл.

Вкажемо конструкцію, яка дає всі базові нодальні алгебри. Назвемо *нодальними даними* набір, який складається з:

1) пари $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — базова напівпроста алгебра ($\bar{H} = \prod_{i\in I} \bar{H}_i$, $\bar{H}_i$ — тіла), V — деякий $\bar{H}$-бімодуль;

2) бінарного симетричного відношення $\sim$ на компонентах $\bar{H}$ (або на їх номерах) такого, що для кожного $i \in I$ існує не більше одного $j \in I$ такого, що $i \sim j$, причому якщо $i \sim j$, то $\bar{H}_i = \bar{H}_j$;

3) підмножини $J \subset I$ такої, що якщо $i \in J$, то $i \nsim j$ для всіх j, і для кожного $i \in J$ задано

a) або підтіло $\bar{A}_i \subset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{H}_i : \bar{A}_i) = 2$,

b) або розширення $\bar{A}_i \supset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{A}_i : \bar{H}_i) = 2$.

У випадку a) будемо писати $i \in J_-$, а у випадку b) — $i \in J_+$. Очевидно, що $J = J_- \cup J_+$.

У випадку b) ми розглядатимемо $\bar{A}_i$ як векторний простір над $\bar{H}_i$. Тоді відображення $x \mapsto xa$, де $a, x \in \bar{A}_i$, ототожнює елемент $a \in \bar{A}_i$ з лінійним оператором у $\bar{H}_i$-векторному просторі $\bar{A}_i$, тобто з матрицею із $\operatorname{Mat}(2, \bar{H}_i)$. Отже, в цьому випадку ми можемо ототожнити $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\operatorname{Mat}(2, \bar{H}_i)$.

За даними пунктів 1 – 3 будується базова нодальна алгебра $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ в такий спосіб:

1. Розглядаємо спадкову алгебру H типу $(\bar{H}, V)$ з кратностями

$$m_i = \begin{cases} 2, & \text{якщо } i \sim i \text{ або } i \in J_+, \\ 1 & \text{— в іншому випадку.} \end{cases}$$

2. У фактор-алгебрі $H/\operatorname{rad} H = \prod_{j=1}^{s} \operatorname{Mat}(m_j, \bar{H}_j)$ розглядаємо підалгебру $\bar{A}$, яка складається з таких наборів $(a_1, \ldots, a_s)$, що:

1) $a_j = a_k$, якщо $j \sim k$ і $k \neq j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з* H *склеюванням компонент* $\bar{H}_j$ і $\bar{H}_k$;

2) a_j є діагональною матрицею, якщо $j \sim j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з* H *роздуванням компоненти* $\bar{H}_j$;

3) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_-$; в цьому випадку будемо казати, що A *отримується з* H *обмеженням компоненти* $\bar{H}_i$;

4) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_+$ (ми застосовуємо ототожнення $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$); в цьому випадку будемо казати, що A *отримується з* H *розширенням компоненти* $\bar{H}_i$.

3. Розглядаємо підалгебру $A = A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_i, \bar{A}_i) \subset H$, яка є прообразом підалгебри $\bar{A} \subset \bar{H}$. За побудовою ця алгебра є базовою.

Теорема 1. *Алгебра* $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ *є нодальною, і кожна базова нодальна алгебра ізоморфна* $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ *для деяких нодальних даних.*

***Зауваження* 2.** Якщо нодальна алгебра не є базовою, то потрібно ще задати:

1) кратності n_j, задані для таких j, що $j \nsim j$, причому так, що $n_j = n_k$ при $j \sim k$;

2) кратності n'_j, n''_j, задані для таких j, що $j \sim j$.

Лема 1. *Нехай* A, B *— кільця,* $A \subseteq B$, *і* $\operatorname{rad} A$ *є ідеалом* B. *Покладемо* $\bar{A} = A/\operatorname{rad} A$ *і* $\bar{B} = B/\operatorname{rad} B$. *Для кожного простого лівого* A*-модуля (*$\bar{A}$*-модуля)* U *виконується рівність*

$$\mathrm{length}_A(B \otimes_A U) = \mathrm{length}_{\bar{A}}(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U).$$

Доведення. Кожний простий лівий A-модуль є простим лівим $\bar{A}$-модулем і навпаки. Доведемо, що для кожного простого лівого A-модуля U має місце ізоморфізм лівих B-модулів

$$B \otimes_A U \simeq \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U.$$

Білінійне відображення $B \times U \to \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U : (b, x) \mapsto \bar{b} \otimes x$ є A-збалансованим, тому існує гомоморфізм абелевих груп $f : B \otimes_A U \to \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U$ такий, що $f(b \otimes x) = \bar{b} \otimes x$ для всіх $b \in B, x \in U$. Легко перевірити, що f також буде гомоморфізмом B-модулів. Якщо $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$, де $b_1, b_2 \in B$, то $b_1 - b_2 \in \operatorname{rad} A$, і для довільного $x \in U$ виконується $(b_1 - b_2)x \in \in (\operatorname{rad} A)U = 0, b_1 \otimes x - b_2 \otimes x = 1 \otimes (b_1 - b_2)x = 0$ в $B \otimes_A U$.Тому можна коректно визначити білінійне $\bar{A}$-збалансоване відображення $\bar{B} \times U \to B \otimes_A U : (\bar{b}, x) \mapsto b \otimes x$. Значить, існує гомоморфізм абелевих груп $g : \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U \to B \otimes_A U$ такий, що $g(\bar{b} \otimes x) = b \otimes x$ для всіх $b \in B, x \in U$. Легко бачити, що g буде гомоморфізмом B-модулів. Ендоморфізми B-модулів fg, gf збігаються з $\mathrm{id}_{\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U}$, $\mathrm{id}_{B \otimes_A U}$ на твірних модулів $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U, B \otimes_A U$ відповідно, отже, $fg = \mathrm{id}_{\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U}$ і $gf = \mathrm{id}_{B \otimes_A U}$.

З ізоморфізму B-модулів $B \otimes_A U$ і $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U$ випливає їх ізоморфізм як A-модулів та

$$\mathrm{length}_A(B \otimes_A U) = \mathrm{length}_A(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U).$$

Композиційний ряд кожного $\bar{A}$-модуля буде його композиційним рядом, як A-модуля, тому

$$\mathrm{length}_A(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U) = \mathrm{length}_{\bar{A}}(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U),$$

що і дає потрібну рівність.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $\tilde{S} = \prod_{i=1}^m \tilde{S}_i$ *— напівпроста алгебра, де* $\tilde{S}_i \simeq \mathrm{Mat}(d_i, F_i)$ *— її прості компоненти,* $S = \prod_{k=1}^r S_k$ *— її підалгебра, така, що всі* S_k *є тілами і* $\mathrm{length}_S(\tilde{S} \otimes_S S_k) \leqslant 2$ *для всіх* $1 \leqslant k \leqslant r$. *Тоді для кожного* $1 \leqslant k \leqslant r$:

0) *або* $S_k = \tilde{S}_i$ *для деякого* i,

1) *або* $S_k \subset \tilde{S}_i \times \tilde{S}_j$ *для деякого* $i \neq j$ *так, що* $\tilde{S}_i \simeq \tilde{S}_j \simeq F$ *і* $S_k \simeq F$ *вкладається в* $\tilde{S}_i \times \tilde{S}_j \simeq F \times F$ *діагонально,*

2) *або існує інший індекс* $q \neq k$ *такий, що* $S_k \simeq S_q$, $S_k \times S_q \subset \tilde{S}_i$ *для деякого* i, $\tilde{S}_i \simeq \simeq \mathrm{Mat}(2, F_i)$ *і цей ізоморфізм можна вибрати так, що* $S_k \times S_q$ *вкладається в* $\tilde{S}_i$ *як підалгебра діагональних матриць,*

3) *або* $S_k \subset \tilde{S}_i$ *як підтіло тіла* $\tilde{S}_i$ *для деякого* i *так, що* $(\tilde{S}_i : S_k) = 2$,

4) *або* $S_k \supset F_i$ *як розширення тіла* F_i *для деякого* i *таке, що* $(S_k : F_i) = 2$, $\tilde{S}_i \simeq \mathrm{Mat}(2, F_i)$ *і* S_k *вкладається в* $\mathrm{Mat}(2, F_i)$ *так, що елементу* $a \in S_k$ *відповідає матриця оператора* $x \mapsto xa$.

Доведення. Позначимо $L_{ik} = \tilde{S}_i \otimes_S S_k$. Звичайно, що $L_{ik} \neq 0$ тоді і лише тоді, коли проекція S_k на $\tilde{S}_i$ є ненульовою. Оскільки $L_k = \tilde{S} \otimes_S S_k = \bigoplus_{i=1}^m L_{ik}$, існують щонайбільше два індекси i такі, що $L_{ik} \neq 0$. Тому або $S_k \subseteq \tilde{S}_i$ для деякого i, або $S_k \subset \tilde{S}_i \times \tilde{S}_j$ для деяких $i \neq j$ і обидва L_{ik} і L_{jk} не нульові. Зауважимо, що $\dim_{F_i} L_{ik} \geqslant d_i$, а $\dim_{S_k} L_k \leqslant 2$. Тому в останньому випадку $d_i = d_j = 1$ і $\tilde{S}_i \simeq \tilde{S}_j \simeq S_k$. Якщо це спільне значення позначити через F, то $S_k \simeq F$ вкладається в $\tilde{S}_i \times \tilde{S}_j \simeq F \times F$ діагонально. Це — випадок 1.

Припустимо, що $S_k \subseteq \tilde{S}_i$, але $S_k \neq \tilde{S}_i$. Тоді $d_i \leqslant 2$.

Якщо $d_i = 1$, то $\tilde{S}_i$ — тіло, S_k — його підтіло, причому $(\tilde{S}_i : S_k) = 2$. Це — випадок 3.

Нехай тепер $d_i = 2$, причому k — єдиний індекс, для якого $L_{ik} \neq 0$. Тоді $\bar{S}_i = \tilde{S}_i \otimes_S S = = \tilde{S}_i \otimes_S S_k = L_{ik}$. Але $\tilde{S}_i = 2U_i$, де U_i — простий $\tilde{S}_i$-модуль. Тому $U_i \simeq S_k$ як S_k-модуль. Отже, $S_k \supset F_i = \mathrm{End}\, U_i$, причому $(S_k : F_i) = 2$. Це — випадок 4.

Нарешті, якщо $d_i = 2$ і є ще один індекс q, для якого $L_{iq} \neq 0$, то $\tilde{S}_i = \mathrm{Mat}(2, F_i) \supset S_k \times S_q$. Тоді $\bar{S}_i = \tilde{S}_i \otimes_S S = \tilde{S}_i \otimes_S (S_k \oplus S_q) = L_{ik} \oplus L_{iq}$. Отже, L_{ik} та L_{iq} — прості $\tilde{S}_i$-модулі і S_k та S_q містять $\mathrm{End}\, U_i = F_i$. Оскільки $L_{ik} \neq \tilde{S}_i$ і $L_{iq} \neq \tilde{S}_i$, то $S_k \simeq S_q \simeq F_i$. Тоді $S_k \times S_q$ вкладається в $\tilde{S}_i$ як підалгебра діагональних матриць. Це — випадок 2.

Доведення теореми. Нехай A — нодальна $\mathbf{k}$-алгебра, H — відповідна спадкова $\mathbf{k}$-алгебра. Покладемо $\bar{A} = A/\mathrm{rad}\, A$ і $\bar{H} = H/\mathrm{rad}\, H$. Оскільки $\mathrm{rad}\, A = \mathrm{rad}\, H$, то $\bar{A} \subseteq \bar{H}$. $\bar{A}$ і $\bar{H}$ — напівпрості $\mathbf{k}$-алгебри. Оскільки алгебру A ми вважаємо базовою, то $\bar{A}$ розкладається в прямий добуток тіл над полем $\mathbf{k}$: $\bar{A} = \bar{A}_1 \times \ldots \times \bar{A}_r$. Ці тіла скінченновимірні над $\mathbf{k}$, оскільки $\bar{A}$ є скінченновимірною. Алгебра $\bar{H}$ розкладається в прямий добуток матричних алгебр над тілами: $\bar{H} = M_1 \times \ldots \times M_s$, де $M_i = \mathrm{Mat}(m_i, \bar{H}_i)$.

З леми 1 випливає, що умову 2 в означенні нодальної алгебри можна замінити на еквівалентну:

$$\mathrm{length}_{\bar{A}}(\bar{H} \otimes_{\bar{A}} U) \leqslant 2 \text{ для кожного простого лівого } \bar{A}\text{-модуля } U.$$

Отже, можна застосувати лему 2 для алгебри $\tilde{S} = \bar{H}$ і її підалгебри $S = \bar{A}$. Тоді, всі компоненти $\bar{H}$ є або F, або $\mathrm{Mat}(2, F)$ і, відповідно до цієї леми, можливі наступні 5 випадків:

0) $\bar{H}_k = F$ для деякого k збігається з простою компонентою $\bar{A}$. Покладемо тут $k \nsim i$ для всіх $i \in I \setminus J$.

1) $\bar{H}_k \times \bar{H}_l \simeq F \times F$ для деяких $k \neq l$ містить просту компоненту $\bar{A}$ (ізоморфну F), вкладену діагонально. В цьому випадку покладемо $k \sim l$.

2) $\bar{H}_k = \mathrm{Mat}(2, F)$ для деякого k містить $\bar{A}_i \times \bar{A}_j$, $(i \neq j)$, причому $\bar{A}_i \times \bar{A}_j$ вкладається в $\bar{H}_k$ як підалгебра діагональних матриць. Тут ми покладемо $k \sim k$.

3) $\bar{H}_k = F$ містить підтіло $\bar{A}_i$ таке, що $(\bar{H}_k : \bar{A}_i) = 2$. В цьому випадку покладемо $k \in J_-$.

4) $\bar{H}_k = \mathrm{Mat}(2, F)$, де $F \subset \bar{A}_i$ так, що $(\bar{A}_i : F) = 2$. Тут ми покладемо $k \in J_+$.

Це й означає, що кожна базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ для деяких нодальних даних.

Теорему доведено.

Очевидно, вказана конструкція нодальних алгебр є ліво-право симетричною. Точніше, якщо нодальна алгебра A будується зі спадкової алгебри H деякою послідовністю склеювань, роздувань, обмежень та розширень компонент, то антиізоморфна алгебра A^{op} одержується з антиізоморфної спадкової алгебри H^{op} такою ж послідовністю тих самих операцій.

***Наслідок* 1.** *Якщо алгебра A є нодальною, то й антиізоморфна алгебра A^{op} також є нодальною.*

З цього наслідку безпосередньо випливає такий наслідок.

***Наслідок* 2.** *Алгебра A є нодальною тоді й лише тоді, коли існує спадкова алгебра $H \supset A$ така, що*:

1) $\mathrm{rad}\, A = \mathrm{rad}\, H$;

2) $\mathrm{length}_A(V \otimes_A H) \leqslant 2$ *для кожного простого правого A-модуля V.*

1. *Дрозд Ю. А.* Конечные модули над чисто нетеровыми алгебрами // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1990. – **183**. – С. 56 – 68.
2. *Burban I., Drozd Y.* Derived categories of nodal algebras // J. Algebra. – 2004. – **272**. – P. 46 – 94.
3. *Burban I., Drozd Y.* Derived categories for nodal rings and projective configurations // Noncommutative Algebra and Geometry. – 2005. – **243**. – P. 23 – 46.
4. *Волошин Д. Є.* Будова нодальних алгебр // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 880 – 888.
5. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – Киев: Вища шк., 1980.
6. *Auslander M., Reiten I., Smalø.* Representation theory of Artin algebras. – Cambridge Univ. Press, 1995.

Одержано 23.04.13