УДК 517.938

І. М. Грод (Тернопіл. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка),
В. Л. Кулик (Сілез. техн. ун-т, Польща)

ПРО ЗВ'ЯЗОК ФУНКЦІЇ ҐРІНА З ФУНКЦІЯМИ ЛЯПУНОВА В ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕННЯХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

We investigated system of linear extensions of dynamical systems. As a result, we obtained the relationship between the structure of the design matrix Green functions and sign-variable Ljapunov functions.

Исследуются системы линейных расширений динамических систем. Установлена связь между матрицами проектирования в структуре функции Грина и знакопеременными функциями Ляпунова.

Одним із важливих питань в якісній теорії диференціальних рівнянь є знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях [1]. Ця задача тісно пов'язана з властивостями певного виду систем, лінеаризованих по частині змінних. Такі системи диференціальних рівнянь в літературі називають лінійним розширенням динамічної системи. Якщо праві частини таких систем періодично залежать від багатьох змінних, то їх прийнято називати лінійними розширеннями динамічної системи на торі. Важливою задачею для таких систем є вивчення питання існування функції Ґріна, а у випадку багатовимірного тора — функції Ґріна – Самойленка [2]. Як показують дослідження [3 – 6], існування функції Ґріна тісно пов'язане з теорією функцій Ляпунова. Такі функції розглядаються у вигляді квадратичних форм, які можуть не тільки змінювати знак, а й вироджуватись у певних точках. При цьому їхня похідна в силу лінійного розширення є знаковизначеною. Часто лінійне розширення має єдину функцію Ґріна, а функцій Ляпунова завжди існує безліч. Зв'язок між матрицями проектування в структурі функції Ґріна і функціями Ляпунова і досі не є достатньо вивченим. Цьому питанню і присвячено дану статтю.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = A(x)\,y, \tag{1}$$

де $x \in R^m$, $y \in R^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ — вектор-функція, визначена при всіх $x \in \in R^m$, що локально задовольняє умову Ліпшиця. Крім того, будемо припускати, що вектор-функція $f(x)$ задовольняє нерівність $\|f(x)\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2$ при всіх $x \in R^m$ з деякими невід'ємними сталими α_1, α_2. Простір таких функцій $f(x)$ будемо позначати через $C_{\text{Lip}}(R^m)$. Наведені припущення дозволяють стверджувати, що задача Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x|_{t=0} = x_0,$$

має єдиний розв'язок $x = x(t; x_0)$ для кожного фіксованого $x_0 \in R^m$ і цей розв'язок визначений при всіх $t \in R$. Матриця $A(x)$ у системі (1) є квадратною $(n \times n)$-вимірною, елементами якої є дійсні скалярні функції, визначені, неперервні й обмежені на R^m.

Далі будемо використовувати наступні позначення: $C^0(R^m)$ — простір дійсних функцій, неперервних і обмежених на R^m, $\langle y, \bar{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{y}_j$ — скалярний добуток в R^n, $\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle}$ — норма вектора, $\Omega_\tau^t(x)$ — фундаментальна матриця розв'язків лінійної системи

$$\frac{dy}{dt} = A(x(t;x))\,y, \tag{2}$$

нормована в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(x)\big|_{t=\tau} = I_n$, I_n — одинична матриця, $C'(R^m; f)$ — підпростір простору $C^0(R^m)$ функцій $F(x)$ таких, що суперпозиція $F(x(t;x))$, як функція змінної t, є неперервно диференційовною, причому за означенням

$$\frac{d}{dt}F(x(t;x))\bigg|_{t=0} \overset{\mathrm{df}}{=} \dot{F}(x) \in C^0(R^m).$$

Норму $(n\times n)$-вимірної матриці G будемо розуміти як операторну норму $\|G\| = \max_{\|y\|=1}\|Gy\|$.

Означення. *Нехай існує $(n\times n)$-вимірна матриця $C(x)$, елементи якої належать простору $C^0(R^m)$, така, що для функції вигляду*

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)\,C(x(\tau;x)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(x)\left[C(x(\tau;x)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau, x)\| \le K\exp\{-\gamma|\tau|\} \tag{4}$$

з деякими додатними сталими K, γ.

Тоді функцію (3) *називають функцією Ґріна задачі про обмежені інваріантні многовиди системи* (1).

***Зауваження* 1.** Оцінка (4) еквівалентна такій же оцінці

$$\|G_t(0, x)\| \le K\exp\{-\gamma|t|\} \tag{5}$$

для допоміжної функції

$$G_t(0, x) = \begin{cases} \Omega_0^t(x)\,C(x), & t \ge 0, \\ \Omega_0^t(x)\left[C(x) - I_n\right], & t < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Відомо [1], що якщо функція Ґріна (3) існує і єдина, то матриця $C(x)$ задовольняє тотожності

$$C^2(x) \equiv C(x),\, C(x(t;x)) \equiv \Omega_0^t(x)\,C(x)\,\Omega_t^0(x) \qquad \forall x \in R^m, \qquad t \in R. \tag{7}$$

Необхідною і достатньою умовою існування єдиної функції Ґріна (3) є існування квадратичної форми

$$V = \langle S(x)\,y, y\rangle \tag{8}$$

з невиродженою симетричною матрицею коефіцієнтів $S(x) \in C'(R^m; f)$, яка задовольняє нерівність

$$\dot{V} = \left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x) A(x) + A^T(x) S(x) \right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2 . \tag{9}$$

Таких матриць $S(x) \in C'(R^m; f)$ або взагалі не існує, або завжди існує безліч. Деякі з них записуються у вигляді

$$S(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} [C(x) - I_n]^T \left[\Omega_0^t(x)\right]^T H(x(t;x)) \left[\Omega_0^t(x)\right] [C(x) - I_n]\, dt -$$

$$- \int\limits_{0}^{+\infty} [C(x)]^T \left[\Omega_0^t(x)\right]^T H(x(t;x)) \left[\Omega_0^t(x)\right] [C(x)]\, dt,$$

де $H(x)$ — довільна симетрична матриця з простору $C^0(R^m)$, яка задовольняє умову додатної визначеності

$$\langle H(x) y, y \rangle \geq 2 \|y\|^2 .$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай система* (1) *має єдину функцію Ґріна* (3) *з оцінкою* (4), *тоді кожна симетрична матриця* $S(x) \in C'(R^m; f)$, *для якої виконується умова* (9), *задовольняє нерівність*

$$\langle S(x) y,\ [I_n - 2C(x)] y \rangle \geq \beta \|y\|^2 , \tag{10}$$

де $\beta = \dfrac{1}{2\|A + A^T\|_0}$, $\left\|A + A^T\right\|_0 = \sup_{x \in R^m} \left\|A(x) + A^T(x)\right\|$.

Доведення. Із існування єдиної функції Ґріна (3) випливає, що система лінійних рівнянь (2) при кожному фіксованому значенні $x \in R^n$ є експоненціально дихотомічною на R. Із оцінки (5) видно, що розв'язки системи (2), які прямують до нуля на $+\infty$, можна записати у вигляді

$$y^+(t) = \Omega_0^t(x) C(x) \eta, \tag{11}$$

де η — довільний вектор із R^n. Умова (9) означає, що похідна квадратичної форми $V = \langle S(x) y, y \rangle$ в силу системи (1) є додатно визначеною. Вияснимо наскільки цю квадратичну форму можна збурити, щоб її похідна в силу системи (1) залишалась додатно визначеною. Для цього розглянемо квадратичну форму

$$V_\varepsilon = \langle S(x) y, y \rangle + \varepsilon \|y\|^2 \tag{12}$$

і обчислимо її похідну в силу системи

$$\dot{V}_\varepsilon = \left\langle \left[\dot{S}(x) + (S(x) + \varepsilon I_n) A(x) + A^T(x) (S(x) + \varepsilon I_n) \right] y, y \right\rangle \geq$$

$$\geq \left(1 - |\varepsilon| \cdot \left\|A + A^T\right\|_0\right) \|y\|^2 . \tag{13}$$

Це дає підстави стверджувати, що при виконанні нерівності

$$-\frac{1}{\|A + A^T\|_0} < \varepsilon < \frac{1}{\|A + A^T\|_0} \tag{14}$$

похідна в силу системи (1) збуреної квадратичної форми (12) є додатно визначеною.

Далі покажемо, що для всіх нетривіальних розв'язків $y = y^{+}(t)$ системи (2), що затухають на $+\infty$, виконується нерівність

$$\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)y^{+}\left(t\right),\ y^{+}\left(t\right)\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|y^{+}\left(t\right)\right\|^2 < 0 \qquad \forall t \in R \tag{15}$$

при кожному фіксованому значенні ε_1,

$$0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{\left\|A + A^T\right\|_0}. \tag{16}$$

Нехай нерівність (15) не виконується при деякому значенні ε_1, що задовольняє нерівності (16). Це означає, що знайдеться таке значення $t = t_0$, при якому виконується протилежна нерівність

$$\left\langle S\left(x\left(t_0;x\right)\right)y^{+}\left(t_0\right), y^{+}\left(t_0\right)\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|y^{+}\left(t_0\right)\right\|^2 \geq 0. \tag{17}$$

Оскільки функція $\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)y^{+}\left(t\right), y^{+}\left(t\right)\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|y^{+}\left(t\right)\right\|^2$ є строго монотонно зростаючою, то з останьої нерівності випливає, що

$$\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)y^{+}\left(t\right), y^{+}\left(t\right)\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|y^{+}\left(t\right)\right\|^2 > 0 \qquad \forall t \in \left(t_0, +\infty\right). \tag{18}$$

З нерівності (13) при $\varepsilon = \varepsilon_1$ маємо

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)y^{+}\left(t\right), y^{+}\left(t\right)\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|y^{+}\left(t\right)\right\|^2\right] \geq \left(1 - \varepsilon_1 \left\|A + A^T\right\|_0\right)\left\|y^{+}\left(t\right)\right\|^2 \geq$$

$$\geq \frac{\left(1 - \varepsilon_1 \left\|A + A^T\right\|_0\right)}{\left\|S\right\|_0 + \varepsilon_1}\left[\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)y^{+}\left(t\right), y^{+}\left(t\right)\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|y^{+}\left(t\right)\right\|^2\right].$$

З отриманої нерівності випливає, що функція $\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)y^{+}\left(t\right), y^{+}\left(t\right)\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|y^{+}\left(t\right)\right\|^2$ зростає на $+\infty$ до $+\infty$, а це суперечить тому, що $y^{+}\left(t\right) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отримана суперечність і переконує в справедливості нерівності (15).

Оскільки із рівності (11) отримуємо і тривіальні розв'язки $y^{+} \equiv 0$, то, підставляючи її в строгу нерівність (15), одержуємо нестрогу нерівність

$$\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)\Omega_0^t\left(x\right)C\left(x\right)\eta, \Omega_0^t\left(x\right)C\left(x\right)\eta\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|\Omega_0^t\left(x\right)C\left(x\right)\eta\right\|^2 \leq 0 \qquad \forall t \in R. \tag{19}$$

Тепер в нерівності (19) покладемо $\eta = \Omega_t^0\left(x\right)y$. Звідси, враховуючи другу із властивостей (7) матриці $C\left(x\right)$, маємо

$$\left\langle S\left(x\left(t;x\right)\right)C\left(x\left(t;x\right)\right)y, C\left(x\left(t;x\right)\right)y\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|C\left(x\left(t;x\right)\right)y\right\|^2 \leq 0 \qquad \forall t \in R.$$

Покладаючи в останній нерівності $t = 0$, приходимо до оцінки

$$\left\langle S\left(x\right)C\left(x\right)y, C\left(x\right)y\right\rangle + \varepsilon_1 \left\|C\left(x\right)y\right\|^2 \leq 0 \qquad \forall x \in R^m \quad \forall y \in R^n. \tag{20}$$

Аналогічно показуємо, що

$$\left\langle S\left(x\right)\left(I_n - C\left(x\right)\right)y, \left(I_n - C\left(x\right)\right)y\right\rangle - \varepsilon_2 \left\|\left(I_n - C\left(x\right)\right)y\right\|^2 \geq 0 \tag{21}$$

при всіх $x \in R^m$, $y \in R^n$. При цьому значення ε_2 є довільно фіксованим із відкритого відрізка:

$$\varepsilon_2 \in \left(0, \frac{1}{\|A + A^T\|_0}\right). \tag{22}$$

Віднімаючи від нерівності (21) нерівність (20), отримуємо

$$\langle S(x)(I_n - C(x))y, (I_n - C(x))y\rangle - \langle S(x)C(x)y, C(x)y\rangle \geq$$

$$\geq \varepsilon_2 \|(I_n - C(x))y\|^2 + \varepsilon_1 \|C(x)y\|^2.$$

Звідси приходимо до нерівності

$$-\langle S(x)C(x)y, y\rangle - \langle S(x)y, C(x)y\rangle + \langle S(x)y, y\rangle \geq \varepsilon_2 \|(I_n - C(x))y\|^2 + \varepsilon_1 \|C(x)y\|^2 \geq$$

$$\geq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \left[\|(I_n - C(x))y\|^2 + \|C(x)y\|^2\right] \geq 0,5 \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \|y\|^2.$$

Далі, з урахуванням того, що ця нерівність виконується для довільних фіксованих ε_1 і ε_2, що задовольняють вимоги (16) і (22) відповідно, розглянемо граничний випадок

$$\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \to \frac{1}{\|A + A^T\|_0}$$

і отримаємо

$$\left\langle \left[S(x) - S(x)C(x) - C^T(x)S(x)\right]y, y\right\rangle \geq \frac{1}{2\|A + A^T\|_0} \|y\|^2. \tag{23}$$

Оскільки ліва частина останньої нерівності тотожно дорівнює лівій частині нерівності (10), це і завершує доведення теореми 1.

Наслідок. *Нехай існує деяка симетрична матриця* $S(x) \in C'(R^m; f)$, *яка задовольняє умову* (9) *і є невиродженою*:

$$\det S(x) \neq 0 \qquad \forall x \in R^m.$$

Тоді будь-яка інша симетрична матриця $\tilde{S}(x) \in C'(R^m; f)$, *що задовольняє цю ж умову*

$$\left\langle \left[\dot{\tilde{S}}(x) + \tilde{S}(x)A(x) + A^T(x)\tilde{S}(x)\right]y,\ y\right\rangle \geq \|y\|^2 \qquad \forall y \in R^n,$$

також буде невиродженою: $\det \tilde{S}(x) \neq 0\ \ \forall x \in R^m$.

Дійсно, якщо існує невироджена симетрична матриця $S(x) \in C'(R^m; f)$, яка задовольняє умову (9), то система (1) має єдину функцію Гріна (3) з оцінкою (4). Таким чином, ми знаходимось в умовах теореми 1. При цьому матриця $\tilde{S}(x) \in C'(R^m; f)$ задовольняє оцінку (10) і, очевидно, не може бути виродженою ні при яких значеннях $x \in R^m$.

Теорема 2. *Нехай деяка симетрична невироджена матриця* $S(x) \in C'(R^m; f)$ *задовольняє умову* (9). *Тоді обернена матриця* $S^{-1}(x)$ *є обмеженою на* R^m, *причому виконується оцінка*

$$\left\|S^{-1}(x)\right\| \leq \left\|A + A^T\right\|_0, \tag{24}$$

де $\left\|A + A^T\right\|_0 = \sup_{x \in R^m} \left\|A(x) + A^T(x)\right\|$.

Доведення. За наслідком із теореми 1 із оцінки (13) випливає, що

$$\det\left(S\left(x\right)+\varepsilon I_n\right)\neq 0 \qquad \forall x\in R^m \tag{25}$$

при кожному фіксованому дійсному значенні ε, що задовольняє нерівності (14). Нерівність (25) показує, що всі власні значення $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ симетричної матриці $S\left(x\right)$ задовольняють нерівність

$$|\lambda_j|\geq\frac{1}{\|A+A^T\|_0}. \tag{26}$$

Щоб переконатися в цьому, зафіксуємо деяке значення $x=x_0\in R^m$ і симетричну матрицю $S= =S\left(x_0\right)$ зведемо до жорданової форми $S=Q^{-1}\Lambda Q$, де Q — ортогональна матриця $Q^{-1}=Q^T$, $\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ — діагональна матриця, λ_j — власні значення матриці $S\left(x_0\right)$. Записуючи збурену матрицю $S+\varepsilon I_n$ у вигляді $S+\varepsilon I_n=Q^{-1}[\Lambda+\varepsilon I_n]Q$, бачимо, що із нерівності (25) випливає $\det[\Lambda+\varepsilon I_n]\neq 0$. Оскільки значення ε змінюється в границях (14), то, очевидно, повинна виконуватись нерівність (26).

Оцінюючи обернену матрицю S^{-1}, маємо

$$\left\|S^{-1}\right\|=\left\|Q^{-1}\Lambda^{-1}Q\right\|\leq\left\|\Lambda^{-1}\right\|=\max_j\frac{1}{|\lambda_j|}\leq\left\|A+A^T\right\|_0,$$

що й переконує нас в справедливості оцінки (24).

***Зауваження* 2.** Визначник матриці $S\left(x\right)$ можна оцінити таким чином:

$$\left|\det S\left(x\right)\right|=\left|\det\Lambda\right|=|\lambda_1|\,|\lambda_2|\ldots|\lambda_n|\geq\left(\frac{1}{\|A+A^T\|_0}\right)^n.$$

Підсумовуючи викладене вище, можна стверджувати, що у випадку, коли система (1) є регулярною, кожна з симетричних матриць $S\left(x\right)\in C'\left(R^m;f\right)$, для яких виконується умова (9), є невиродженою і, крім того, обернена матриця $S^{-1}\left(x\right)$ є обмеженою на R^m.

***Зауваження* 3.** Якщо деяка невироджена матриця $S\left(x\right)\in C'\left(R^m;f\right)$ задовольняє нерівність (9), то для матриці $-S^{-1}\left(x\right)=\bar S\left(x\right)\in C'\left(R^m;f\right)$ виконується нерівність

$$\left\langle\left[\dot{\bar S}\left(x\right)-\bar S\left(x\right)A^T\left(x\right)-A\left(x\right)\bar S\left(x\right)\right]z,z\right\rangle\geq\gamma\left\|z\right\|^2 \qquad \forall z\in R^n \tag{27}$$

де $\gamma=\dfrac{1}{\|S\|_0^2}$. Це означає, що похідна невиродженої квадратичної форми $\left\langle\bar S\left(x\right)z,z\right\rangle$ в силу системи, спряженої по нормальних змінних до системи (1),

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x\right),\qquad \frac{dz}{dt}=-A^T\left(x\right)z \tag{28}$$

є додатно визначеною.

Тепер, припустивши, що при деякій невиродженій матриці $\bar S\left(x\right)\in C'\left(R^m;f\right)$ виконується нерівність (27), тобто похідна квадратичної форми $W=\left\langle\bar S\left(x\right)z,z\right\rangle$ в силу спряженої системи (28) є додатно визначеною, можемо також стверджувати, згідно з останнім зауваженням, існування єдиної функції Ґріна (3) системи (1). Відслідкуємо зв'язок між матрицями $\bar S\left(x\right)$ і $C\left(x\right)$. З цією метою повернемось до нерівності (10) і, замінивши матрицю $\bar S\left(x\right)$ на матрицю $\bar S^{-1}\left(x\right)$, одержимо

$$\left\langle \bar{S}^{-1}(x)\, y, [I_n - 2C(x)]\, y \right\rangle \geq \bar{\beta}\, \|y\|^2 . \tag{29}$$

В нерівності (29) перейдемо до нових змінних η: $\eta = \bar{S}^{-1}(x)\, y$ і отримаємо

$$\left\langle \eta, (I_n - 2C(x))\, \bar{S}(x)\, \eta \right\rangle \leq -\bar{\beta} \left\| \bar{S}(x)\, \eta \right\|^2 .$$

Упорядкувавши ліву частину отриманої нерівності і врахувавши оцінку

$$\left\| \bar{S}(x)\, \eta \right\|^2 \geq \frac{1}{\left\| \bar{S}^{-1} \right\|_0^2} \|\eta\|^2 ,$$

будемо мати

$$\left\langle \bar{S}(x)\, \eta, \left(I_n - 2C^T(x)\right) \eta \right\rangle \leq -\bar{\beta}\, \|\eta\|^2 ,$$

де $\tilde{\beta} = \dfrac{\bar{\beta}}{\left\| \bar{S}^{-1} \right\|_0^2}$.

Таким чином, підсумовуючи викладене вище, приходимо до наступного висновку.

Теорема 3. *Кожна невироджена матриця $\bar{S}(x) \in C'(R^m; f)$, для якої виконується умова*

$$\left\langle \left[\dot{\bar{S}}(x) - \bar{S}(x)\, A^T(x) - A(x)\, \bar{S}(x) \right] z, z \right\rangle \geq \gamma\, \|z\|^2 \qquad \forall z \in R^n,$$

задовольняє співвідношення

$$\left\langle \left[\bar{S}(x) - C(x)\, \bar{S}(x) - \bar{S}(x)\, C^T(x) \right] y, y \right\rangle \leq -\tilde{\beta}\, \|y\|^2 ,$$

де $C(x)$ — матриця проектування у структурі функції Ґріна (3) *задачі про обмежені многовиди системи* (1).

З іншого боку, кожна невироджена матриця $S(x) \in C'(R^m; f)$, для якої має місце нерівність

$$\left\langle \left[\dot{S}(x) + S(x)\, A(x) + A^T(x)\, S(x) \right] z, z \right\rangle \geq \gamma\, \|z\|^2 , \qquad \gamma = \mathrm{const} > 0,$$

пов'язана з функцією Ґріна таким чином:

$$\left\langle \left[S(x) - S(x)\, C(x) - C^T(x)\, S(x) \right] y, y \right\rangle \geq \beta\, \|y\|^2 , \qquad \beta = \mathrm{const} > 0.$$

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
2. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. – London: Taylor & Francis Inc., 2004.
3. *Самойленко А. М.* К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 513 – 521.
4. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 556 – 559.
5. *Kenneth J. Palmer.* On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems // J. Different. Equat. – 1980. – **36**, № 3. – P. 374 – 390.
6. *Грод І. М., Кулик В. Л.* Побудова функцій Ляпунова деяких лінійних розширень динамічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 79 – 93.

Одержано 02.04.13