УДК 517.53

А. П. Голуб, Л. О. Чернецька (Ін-т математики НАН України, Київ)

БАГАТОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА АПРОКСИМАЦІЇ ТИПУ ПАДЕ ДЛЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We propose an approach to the construction of multidimensional Padé type approximants for analytic functions based on the extension of Dzyadyk's method of generalized moment representations.

Предложен подход к построению многомерных аппроксимаций типа Паде аналитических функций, основанный на распространении метода обобщенных моментных представлений В. К. Дзядыка.

У 1981 р. В. К. Дзядик [1] запропонував метод узагальнених моментних зображень, що дозволив з єдиних позицій будувати та досліджувати апроксиманти Паде багатьох важливих класів спеціальних функцій. Подальший розвиток цього методу дав можливість застосувати його також до вивчення різноманітних узагальнень апроксимант Паде, таких як багатоточкові апроксиманти Паде, апроксиманти Паде – Чебишова, сумісні апроксиманти Паде та ін. (див. [2]). У роботах [3 – 5] було запропоновано означення дво- та тривимірних узагальнених моментних зображень і визначено шляхи їх застосування до побудови раціональних апроксимант типу Паде функцій двох та трьох змінних.

У даній статті цей підхід поширено на випадок довільної розмірності $d \geqslant 2$.

Наведемо відповідне означення.

Означення 1. *Говоритимемо, що для d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ справджується узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо у просторі $\mathscr{X}$ вказано d-вимірну послідовність елементів $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$, а у просторі $\mathscr{Y}$ — d-вимірну послідовність елементів $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d}$ такі, що*

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}} \rangle, \qquad \mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{1}$$

Розглянемо формальний степеневий ряд за d змінними

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_d^{k_d}$.

Введемо для зручності ряд позначень. При $p = 0, 1, \ldots, d$ позначимо через Ω_p множину

$$\Omega_p = \{\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, d\} \colon |\omega| = p\}.$$

Впорядкуємо елементи кожної з множин $\omega \in \Omega_p$,

$$\omega = \{l_1(\omega), l_2(\omega), \ldots, l_p(\omega)\},$$

так, що

$$1 \leqslant l_1(\omega) < l_2(\omega) < \ldots < l_p(\omega) \leqslant d.$$

Те ж саме зробимо з елементами доповнення $\overline{\omega} = \{1, 2, \ldots, d\} \setminus \omega$,

$$\overline{\omega} = \{m_1(\omega), m_2(\omega), \ldots, m_{d-p}(\omega)\} \in \Omega_{d-p},$$

так що

$$1 \leqslant m_1(\omega) < m_2(\omega) < \ldots < m_{d-p}(\omega) \leqslant d.$$

Для кожної множини $\omega \in \Omega_p, p = 0, 1, \ldots, d$, введемо позначення

$$\boldsymbol{\delta}(\omega) = (\delta_1(\omega), \delta_2(\omega), \ldots, \delta_d(\omega)),$$

де

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \in \omega, \\ 1 & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = (\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \ldots, \varepsilon_d(\omega)),$$

$$\varepsilon_i(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{при } i \in \omega, \\ 1 & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

так що

$$\delta_i(\omega) = \frac{\varepsilon_i(\omega) + 1}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, d.$$

Позначимо також

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d, \qquad \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_+^d,$$

так що

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}(\varnothing), \qquad \mathbf{0} = \boldsymbol{\delta}(\{1, 2, \ldots, d\}).$$

Для кожних векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^d, \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$, через $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ позначимо покоординатний добуток векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_d b_d).$$

Позначимо також для кожного вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\Delta(\mathbf{a}) = \left\{ \mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d \colon j_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\},\ i = 1, 2, \ldots, d \right\}.$$

З урахуванням цих позначень встановлено наступний результат, що дозволяє для рядів вигляду (2) з коефіцієнтами, для яких справджуються зображення вигляду (1), будувати їх d-вимірні апроксиманти типу Паде. Для розмірностей $d = 2$ та $d = 3$ відповідні результати було встановлено у [3 – 5]. Огляд результатів, що стосуються різноманітних багатовимірних аналогів апроксимацій Паде, наведено в [6, с. 323 – 332].

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду вигляду* (2) *справджується узагальнене моментне зображення вигляду* (1). *Тоді якщо для деякого* $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \ldots \ldots, N_d) \in \mathbb{N}^d$ *існує узагальнений многочлен*

$$Y_{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} y_{\mathbf{j}} \tag{3}$$

такий, що $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N})} \neq 0$, *і виконуються умови біортогональності*

$$\langle x_{\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{N}} \rangle = 0 \tag{4}$$

при $\mathbf{k} = \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, *то раціональна функція*

$$[\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})}, \tag{5}$$

де

$$Q(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}}, \tag{6}$$

а

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N} - \boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{1})} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega}) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \circ \mathbf{j}} s_{\mathbf{k} + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \circ \mathbf{j}}, \tag{7}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх* $\mathbf{k} \in \Delta(2\mathbf{N}) \setminus \big\{\big(2N_1, 2N_2, \ldots, 2N_d\big)\big\}$, *а отже, ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою типу Паде ряду* (2) *порядку* $[\mathscr{M}/\mathscr{N}]$, *де* $\mathscr{M} = \Delta(2\mathbf{N}) \setminus \prod_{i=1}^{d} \{N_i, N_i + 1, \ldots \ldots, 2N_i\}$, $\mathscr{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

Доведення. Зафіксуємо деякий вектор $\mathbf{K} \in \mathbb{Z}_+^d$ з досить великими координатами $K_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Домножимо кожну з рівностей (1) на $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ і підсумуємо ці рівності за всіма $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{K})$. Зліва отримаємо

$$\sum_{\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{K})} s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = \mathbf{z}^{-\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{k}-\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{K})} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} =$$

$$= \mathbf{z}^{-\mathbf{j}} \left\{ f(\mathbf{z}) - \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \sum_{\mathbf{k} \in \prod_{i=1}^{d} [\delta_i(\overline{\omega}) j_i, j_i + \delta_i(\overline{\omega}) K_i - \delta_i(\omega)]} s_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\} - \mathbb{E}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}(\mathbf{z}), \tag{8}$$

де

$$\mathbb{E}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta(\mathbf{K})} e_{\mathbf{k},\mathbf{j}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Домножимо тепер отримані рівності на $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$ і підсумуємо по $\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})$. На основі (8) одержимо

$$\sum_{\mathbf{j}\in\Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \left\{ \mathbf{z}^{-\mathbf{j}} \left\{ f(\mathbf{z}) - \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega\in\Omega_p} \sum_{\mathbf{k}\in\prod_{i=1}^{d}[\delta_i(\overline{\omega})j_i, j_i+\delta_i(\overline{\omega})K_i-\delta_i(\omega)]} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\} - \mathbb{E}_{\mathbf{k},\mathbf{j}}(\mathbf{z}) \right\} =$$

$$= \mathbf{z}^{-\mathbf{N}} \left\{ f(\mathbf{z}) \sum_{\mathbf{j}\in\Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}} - \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega\in\Omega_p} \sum_{\mathbf{j}\in\Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{N}-\mathbf{j}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\mathbf{k}\in\prod\limits_{i=1}^{d}[\delta_i(\overline{\omega})j_i, j_i+\delta_i(\overline{\omega})K_i-\delta_i(\omega)]} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \right\} - \widetilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{K},\mathbf{N}}(\mathbf{z}),$$

де

$$\widetilde{\mathbb{E}}_{\mathbf{K},\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d\setminus\Delta(\mathbf{K})} \widetilde{e}_{\mathbf{K},\mathbf{N}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Для того щоб отримати остаточний вигляд чисельника (7), використаємо наступну лему.

Лема 1. *Для довільних $N, K \in \mathbb{N}$, довільної послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, довільного набору чисел $\{c_j^{(N)}\}_{j=0}^{N}$ та довільного $z \in \mathbb{C}$ мають місце такі тотожності*:

$$\sum_{j=1}^{N} c_j z^{N-j} \sum_{k=0}^{j-1} s_k z^k = \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{j=0}^{k} c_{N-j} s_{k-j},$$

$$\sum_{j=0}^{N} c_j z^{N-j} \sum_{k=j}^{j+K} s_k z^k = z^N \sum_{k=0}^{K} z^k \sum_{j=0}^{N} c_j s_{k+j}.$$

Для доведення леми досить використати елементарні заміни змінних підсумовування та зміну порядку підсумовування.

Враховуючи лему 1 і вибираючи координати вектора $\mathbf{K}$ досить великими, переконуємося в справедливості формули (7).

Як і у випадках $d = 2, 3$ [3 – 5], теорему 1 можна дещо узагальнити, якщо вибирати узагальнений многочлен $Y_{\mathbf{N}}$ з умов біортогональності вигляду (4) до елементів $x_{\mathbf{k}}$ не для $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, а для $\mathbf{k} \in \mathscr{H}_{\mathbf{N}}$, де $\mathscr{H}_{\mathbf{N}}$ — деяка підмножина з $\mathbb{Z}_+^d$, що містить рівно $\prod_{i=1}^{d}(N_i+1)-1$ елементів. Щоб сформулювати відповідне твердження, розглянемо деяку неперервно диференційовну функцію

$$\Phi(\mathbf{x}) \colon \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R},$$

що має такі властивості:

1) множина $\mathscr{D}_\Phi = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}_+^d \,|\, \Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \leqslant 0\right\}$ є обмеженою в $\mathbb{R}_+^d$;

2) потужність множини $\mathscr{D}_\Phi \bigcap \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}_+^d \,|\, x_i \geqslant N_i, i = 1, 2, \ldots, d\right\}$ дорівнює $\prod_{i=1}^{d}(N_i+1)-1$;

3) для всіх $i = 1, 2, \ldots, d$ існують однозначно визначені функції

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

для

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in D_i := \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}_+^{d-1} \Big| \; \exists x_i \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{такі, що } \; \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_d) \leqslant 0\Big\};$$

4) при кожному $i = 1, 2, \ldots, d$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \geqslant N_i$$

для всіх значень $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in D_i$.

За схемою доведення теореми 1 в цьому випадку можна встановити такий результат.

Теорема 1′. *Нехай за умов теореми* 1 *для деякого* $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d$ *існує узагальнений многочлен вигляду* (3) *такий, що* $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N})} \neq 0$, *і виконуються умови біортогональності* (4) *при* $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d \colon \mathbf{k} + \mathbf{N} \in \mathscr{D}_\Phi\}$. *Тоді раціональна функція вигляду* (5), *де* $Q(\mathbf{z})$ *має вигляд* (6), *а*

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\substack{0 \leqslant k_{m_i(\omega)} \leqslant N_{m_i(\omega)} - 1, i = 1, 2, \ldots, d-p \\ \Phi(\mathbf{k}) \leqslant 0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega}) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \circ \mathbf{j}} s_{\mathbf{k} + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \circ \mathbf{j}},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх* $\mathbf{k} \in \mathscr{D}_\Phi \cap \mathbb{Z}_+^d$, *а отже, ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою типу Паде ряду* (2) *порядку* $[\mathscr{M}/\mathscr{N}]$, *де* $\mathscr{M} = \mathscr{D}_\Phi \cap \mathbb{Z}_+^d \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^d \colon x_i \geqslant N_i, i = 1, 2, \ldots, d\}$, *а* $\mathscr{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

У випадку, коли лінійні простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, білінійна форма $\langle .,. \rangle$ є роздільно неперервною (див., наприклад, [7, c. 63]) і у просторі $\mathscr{X}$ задано попарно комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A_i \colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}, i = 1, 2, \ldots, d$, такі, що

$$A_i x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k} + \mathbf{e}_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, d,$$

для кожного $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, де

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}(\{i\}), \qquad i = 1, 2, \ldots, d,$$

а у просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A_i^\star \colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}, i = 1, 2, \ldots, d$, спряжені відповідно до операторів $A_i, i = 1, 2, \ldots, d$, відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ (див. [2, c. 18]), за умов теореми 1 матиме місце така формула для похибки апроксимації:

$$f(\mathbf{z}) - [\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{1}{Q(\mathbf{z})} \times$$

$$\times\left\{\prod_{i=1}^{d} z_i^{N_i}\left\langle\prod_{r=1}^{d}\widehat{R}_{z_r}(A_r)x_{\mathbf{0}}, Y_{\mathbf{N}}\right\rangle+\sum_{p=0}^{d-1}\sum_{\omega\in\Omega_p}\prod_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}}\sum_{\mathbf{k}\in\pi^{(\mathbf{N})}(\omega)}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\mathbf{j}\in\Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega})\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}\, s_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}\right\},$$

де

$$\pi^{(\mathbf{N})}(\omega)=\left(\pi_1^{(\mathbf{N})}(\omega), \pi_2^{(\mathbf{N})}(\omega), \ldots, \pi_d^{(\mathbf{N})}(\omega)\right),$$

а

$$\pi_i^{(\mathbf{N})}(\omega)=\begin{cases}[0, N_i-1] & \text{при } i\notin\omega,\\ [N_i+1, \infty] & \text{при } i\in\omega.\end{cases}$$

За умов теореми $1'$ ця формула набирає вигляду

$$f(\mathbf{z})-[\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z})=\frac{1}{Q(\mathbf{z})}\times$$

$$\times\left\{\prod_{i=1}^{d} z_i^{N_i}\left\langle\prod_{r=1}^{d}\widehat{R}_{z_r}(A_r)x_{\mathbf{0}}, Y_{\mathbf{N}}\right\rangle+\sum_{p=0}^{d-1}\sum_{\omega\in\Omega_p}\prod_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}}\sum_{\substack{0\leqslant k_{m_i(\omega)}\leqslant N_{m_i(\omega)}-1,\, i=1,2,\ldots,d-p,\\ \Phi(\mathbf{k})>0}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\mathbf{j}\in\Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega})\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}\, s_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}\right\}.$$

Зауваження. Через $\widehat{R_z}(A)$ позначено резольвентну функцію оператора A : $\widehat{R_z}(A)=(I-zA)^{-1}$, де $I\colon \mathscr{X}\to\mathscr{X}$ — тотожний оператор.

Розглянемо тепер випадок, коли всі оператори A_i, $i=1,2,\ldots,d$, збігаються:

$$A_1=A_2=\ldots=A_d=A.$$

Тоді наближувана функція матиме вигляд

$$f(\mathbf{z})=\left\langle\prod_{i=1}^{d}\widehat{R}_{z_i}(A)x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}}\right\rangle. \tag{9}$$

Встановлено такий результат.

Лема 2. *Для функцій вигляду* (9) *є справедливим зображення*

$$f(\mathbf{z})=\frac{1}{\prod\limits_{s<t}(z_s-z_t)}\sum_{i=1}^{d} z_i^{d-1}(-1)^{i+1}\prod_{\substack{s<t\\ s,t\neq i}}(z_s-z_t)g(z_i), \tag{10}$$

де

$$g(z)=\left\langle\widehat{R}_z(A)x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}}\right\rangle.$$

Лему неважко встановити методом індукції.

Припустимо тепер, що при цьому оператор A є оператором множення на незалежну змінну у просторі $L_2\left([0,1], d\mu\right)$: де μ — неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$:

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Нехай також $\mathbf{N} = (N, N, \ldots, N) \in \mathbb{N}^d$. Тоді для того щоб побудувати за теоремами 1, $1'$ d-вимірні апроксиманти типу Паде функції $f(\mathbf{z})$ вигляду (10) з

$$g(z) = \int\limits_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt},$$

необхідно побудувати многочлени

$$Y_{\mathbf{N}}(t) = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} t^{|\mathbf{j}|}, \text{де } |\mathbf{j}| = j_1 + j_2 + \ldots + j_d, \tag{11}$$

для яких виконуються умови біортогональності

$$\int\limits_0^1 t^{|\mathbf{k}|} Y_{\mathbf{N}}(t) d\mu(t) = 0 \tag{12}$$

при $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$. Це рівнозначно тому, що

$$\int\limits_0^1 t^k Y_{\mathbf{N}}(t) d\mu(t) = 0 \tag{13}$$

при $k = 0, 1, \ldots, dN - 1$.

З (13) випливає, що поліном $Y_{\mathbf{N}}(t)$ повинен збігатися з точністю до сталого множника з ортонормованим на $[0,1]$ з мірою $d\mu(t)$ алгебраїчним многочленом

$$P_{dN}(t) = \sum_{j=0}^{dN} p_j^{(dN)} t^j. \tag{14}$$

При цьому умова (12) буде виконуватися не лише для $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, а і для $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}| \leqslant 2dN - 1\}$, а тому за функцію $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, що фігурує в формулюванні теореми $1'$, потрібно взяти функцію

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_d) = |\mathbf{x}| - 2dN + 1.$$

При цьому функції $\varphi_i : \mathbb{R}_+^{d-1} \to \mathbb{R}$ матимуть вигляд

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) = 2dN - 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{i-1} - x_{i+1} - \ldots - x_d.$$

Рівність (11) дозволяє за коефіцієнтами $p_j^{(dN)}$, $j = 0, 1, \ldots, dN$, визначати коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$, $\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})$, але зробити це можна безліччю способів. Для визначеності будемо вважати, що

$$c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} = c_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{N})},$$

якщо $|\mathbf{j}| = |\mathbf{k}|$.

Встановлено такий допоміжний результат.

Лема 3. *Нехай* $N \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant j \leqslant dN$. *Тоді кількість векторів* $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ *таких, що* $k_i \leqslant N$, $i = 1, 2, \ldots, d$, *і* $|\mathbf{k}| = j$, *дорівнює*

$$\gamma_j^{(N)} = \sum_{r=0}^{[\frac{j}{N+1}]} \binom{d}{r} (-1)^r \frac{(d + j - r(N+1) - 1)!}{(d-1)!(j - r(N+1))!}.$$

Доведення. Розглянемо многочлен

$$V_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}.$$

Очевидно, що

$$V_{\mathbf{N}}(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=0}^{N} z_i^k \right) = \prod_{i=1}^{d} \frac{1 - z_i^{N+1}}{1 - z_i}.$$

Якщо покласти $z_1 = z_2 = \ldots = z_d = z$, то одержимо

$$\frac{(1 - z^{N+1})^d}{(1-z)^d} = \sum_{j=0}^{dN} \gamma_j^{(N)} z^j.$$

Враховуючи розклади

$$(1 - z^{N+1})^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} (-1)^m z^{m(N+1)}$$

та

$$\frac{1}{(1-z)^d} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(d+k-1)!}{(d-1)!k!} z^k,$$

отримуємо твердження леми.

З леми 3 випливає, що коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$, $\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})$, многочленів $Y_{\mathbf{N}}$ повинні вибиратися таким чином, щоб

$$c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} = \frac{p_{|\mathbf{j}|}^{(dN)}}{\gamma_{|\mathbf{j}|}^{(N)}} = \frac{p_{|\mathbf{j}|}^{(dN)}}{\sum_{r=0}^{[\frac{|\mathbf{j}|}{N+1}]} \binom{d}{r} (-1)^r \frac{\left(d + |\mathbf{j}| - r(N+1) - 1\right)!}{(d-1)!\left(|\mathbf{j}| - r(N+1)\right)!}}. \tag{15}$$

На основі наведених міркувань з використанням теореми $1'$ отримаємо такий результат.

Теорема 2. *При кожному* $N \in \mathbb{N}$ *раціональна функція*

$$[\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})},$$

де

$$Q(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}},$$

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\substack{0 \leqslant k_{m_i(\omega)} \leqslant N-1, i=1,2,\ldots,d-p, \\ |\mathbf{k}| \leqslant 2dN-1}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega}) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \circ \mathbf{j}} s_{d-p \sum\limits_{i=1} j_{m_i} + |\mathbf{k}| - \sum\limits_{i=1}^{p} j_{l_i}},$$

$\mathbf{N} = (N, N, \ldots, N)$, *коефіцієнти* $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$ *обчислюються за формулами* (15), *а* $s_k = \int_0^1 t^k d\mu(t)$, *матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду Тейлора – Маклорена для функції* $f(\mathbf{z})$ *вигляду* (10) *для всіх* $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d \colon |\mathbf{k}| \leqslant 2dN - 1\}$, *а отже, ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою типу Паде функції* (10) *порядку* $[\mathscr{M}/\mathscr{N}]$, *де* $\mathscr{M} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d \colon |\mathbf{k}| \leqslant 2dN - 1\}$, *а* $\mathscr{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

Зазначимо, що, якщо $d\mu(t) = t^\nu (1-t)^\sigma dt, \nu, \sigma > -1$, то функція (10) буде частинним випадком d-вимірної функції Лаурічелли

$$F_D(a, b_1, \ldots, b_d; c; z_1, \ldots, z_d) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{(a)_{|\mathbf{k}|} (b_1)_{k_1} \ldots (b_d)_{k_d}}{c_{|\mathbf{k}|} k_1! \ldots k_d!} {z_1}^{k_1} \ldots {z_d}^{k_d}$$

при $a = \nu + 1$, $b_1 = b_2 = \ldots = b_d = 1$, $c = \rho + \nu + 2$ (див. [8; 9, с. 33]).

При цьому многочлени (14) будуть зсуненими многочленами Якобі, ортонормованими на $[0, 1]$ з вагою $t^\nu (1-t)^\sigma$, і їхні коефіцієнти можна записати в явному вигляді (див. [10, с. 581]), а отже, за теоремою 2 ми отримаємо явний вигляд d-вимірних апроксимацій типу Паде відповідних функцій.

1. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. – 1981. – **6**. – С. 8 – 12.
2. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
3. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 8. – С. 1035 – 1058.
4. *Чернецька Л. О.* Тривимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій трьох змінних // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 36 – 42.
5. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Побудова апроксимацій Паде для деяких гіпергеометричних рядів Лаурічелли за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 78 – 103.
6. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
7. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 444 с.
8. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piú variabili // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1983. – № 7. – P. 111 – 158.
9. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian hypergeometric series. – New York: John Wiley and Sons, 1985. – 425 p.
10. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Одержано 06.02.14