УДК 512.552.4

А. А. Кириченко, Ю. С. Самойленко, Л. М. Тимошкевич (Ін-т математики НАН України, Київ)

СТРУКТУРА СИСТЕМ ОРТОПРОЕКТОРІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ ЗІ ЗЛІЧЕННИМИ ДЕРЕВАМИ КОКСТЕРА

The paper is devoted to the investigation of representations of Temperley – Lieb-type algebras generated by orthogonal projections connected with countable Coxeter trees. The theorem on the structure of these systems orthogonal projections is proved. Some examples are presented.

Исследуются представления алгебр типа Темперли – Либа, которые порождены ортопроекторами, связанными со счетными деревьями Кокстера. Доказана теорема, описывающая структуру таких систем ортопроекторов, и приведены примеры.

1. Вступ. Вивчення систем підпросторів $S = (H; H_1, \ldots, H_n)$ гільбертового простору H є важливою задачею функціонального аналізу та математичної фізики, якій присвячено багато публікацій (див., наприклад, [1 – 3].) Зокрема, у [2] вивчалися системи підпросторів (системи ортопроекторів), що пов'язувалися зі зв'язними неорієнтованими скінченними графами (в тому числі з графами Кокстера).

У даній статті вивчається структура незвідних зліченних систем підпросторів $\{H_k\}$ гільбертового комплексного простору H, які пов'язані зі зліченними деревами Кокстера $\mathbf{\Gamma}$ і параметром $\tau \in (0, 1)$, кожна пара підпросторів є ортогональною або з фіксованим кутом $0 < \phi_{ij} < \dfrac{\pi}{2}$ між ними, який визначається параметром τ та графом $\mathbf{\Gamma}$ (п. 2). За допомогою ортопроекторів $P_i = P_{H_i}$ та $P_j = P_{H_j}$ умова ортогональності підпросторів H_i та H_j записується як $P_iP_j = P_jP_i = 0$, а умова щодо кута між ними ϕ_{ij} $(\tau_{ij} = \cos\phi_{ij})$ — як $P_iP_jP_i = \tau_{ij}^2 P_i$, $P_jP_iP_j = \tau_{ij}^2 P_j$.

Ми описуємо множину параметрів τ, для яких існують такі ненульові незвідні системи ортопроекторів, та структуру таких систем (п. 3), а також наводимо приклади систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченними деревами Кокстера (п. 4).

2. Постановка задачі. ***2.1. Зліченні дерева Кокстера.*** При дослідженні скінченних систем ортопроекторів (див. [2] та наведену там бібліографію) використовується спектральна теорія скінченних графів (див., наприклад, [4, 5]) та скінченних графів Кокстера (див. [6, 7]).

При дослідженні зліченних систем ортопроекторів будемо використовувати спектральну теорію зліченних графів (див. [8 – 11]).

Нагадаємо необхідні означення. Під терміном „граф" ми розуміємо впорядковану пару (V, R), в якій V — деяка непорожня множина (множина вершин) і R — множина, що складається з невпорядкованих пар різних елементів V (множина ребер), тобто ми розглядаємо неорієнтовані графи без кратних ребер та петель.

Графом Кокстера $\mathbf{\Gamma}$ називаємо пару (Γ, f), в якій Γ — граф і f — відображення множини ребер цього графа Γ в множину, що складається з символу ∞ і натуральних чисел, строго більших за 2. Будемо казати, що граф Γ підпорядкований графу Кокстера $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$. Для простоти сприймання граф Кокстера почасти представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи ще над кожним ребром e число $f(e)$, яке називатимемо „позначкою" на ребрі. Прийнято пропускати приписування на ребрах числа 3, і такі ребра будемо називати непозначеними, а ребра з позначкою, що більша або дорівнює 4, — позначеними.

***Зауваження* 1.** Звичайні графи є підмножиною графів Кокстера, для них функція f — це відображення в число 3. Ми називаємо граф Кокстера просто графом, якщо з контексту зрозуміло, що йдеться про графи Кокстера. Для позначення графів Кокстера будемо використовувати напівжирний шрифт.

***Зауваження* 2.** Будемо називати граф Кокстера зв'язним, деревом, циклом і т. п., якщо підпорядкований граф задовольняє ці властивості.

Зліченним графом Кокстера називають граф Кокстера зі зліченною множиною вершин, а *зліченним деревом Кокстера* — зв'язний зліченний граф Кокстера без циклів.

Зафіксуємо порядок, в якому будемо розглядати вершини графа Кокстера. З кожним графом $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$ та порядком вершин пов'язують *матрицю суміжності* $A_{\mathbf{\Gamma}} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, де $n = |\mathbf{\Gamma}|$ — потужність множини вершин графа $\mathbf{\Gamma}$, а елементи матриці $a_{ij} = 2\cos\dfrac{\pi}{k}$, якщо $f((i,j)) = k$, $a_{ij} = 2$, якщо $f((i,j)) = \infty$, і $a_{ij} = 0$, якщо вершини i та j не сполучені ребром.

Таким чином, $A_{\mathbf{\Gamma}}$ — це симетрична дійсна матриця з нулями на головній діагоналі. Якщо граф $\mathbf{\Gamma}$ скінченний, тобто $|V| < \infty$, то $A_{\mathbf{\Gamma}}$ є квадратною матрицею порядку $|V|$. Для зліченних графів $\mathbf{\Gamma}$ матриця $A_{\mathbf{\Gamma}}$ є нескінченною вправо і вниз. Вигляд матриці суміжності залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Однак матриці суміжності одного і того ж графа при різних нумераціях вершин унітарно еквівалентні.

Оскільки матриця суміжності $A_{\mathbf{\Gamma}}$ скінченного графа $\mathbf{\Gamma}$ симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$), то її власні значення є дійсними. Позначимо власні значення матриці $A_{\mathbf{\Gamma}}$ через λ_i, $i = 1, \ldots, n$, та розташуємо їх у незростаючому порядку $\lambda_{\mathbf{\Gamma}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{\Gamma}}$ називають *індексом* графа $\mathbf{\Gamma}$.

Нехай $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$ — граф Кокстера. Граф $\mathbf{\Gamma}_1 = (\Gamma_1, f_1)$ називається *підграфом* графа $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$, якщо Γ_1 — підграф Γ і для довільного ребра e графа Γ_1 має місце нерівність $f_1(e) \leqslant f(e)$ (вважаємо, що $\infty \geq n$, де n — довільне натуральне число або символ ∞).

Через $\mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$ позначимо множину всіх скінченних підграфів графа $\mathbf{\Gamma}$.

Поняття індексу поширюється на зліченні графи Кокстера таким чином.

Означення 1. *Індексом зліченного графа Кокстера називається додатне число або символ* ∞, *визначені рівністю*

$$\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma} = \sup_{\mathbf{G}\in Fin(\mathbf{\Gamma})} \operatorname{ind}\mathbf{G}.$$

Далі будемо розглядати лише такі зв'язні графи $\Gamma = (V_\Gamma, R_\Gamma)$, що степені всіх вершин рівномірно обмежені: $\deg\, v \leq c < \infty\ \forall v \in V_\Gamma$ для деякого натурального числа c.

Зауважимо, що в цьому випадку $\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma} < \infty$ та $\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma} = \|A_{\mathbf{\Gamma}}\|$, де $A_{\mathbf{\Gamma}} : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ розглядається як обмежений самоспряжений оператор, заданий матрицею суміжності графа $\mathbf{\Gamma}$.

2.2. Системи ортопроекторів. Пов'яжемо зі зліченним графом Кокстера $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$ та параметром $\tau \in (0,1)$ набір ортопроекторів $\{P_k\}$ гільбертового комплексного простору H таким чином: кожній вершині графа $v_k \in V_\Gamma$ поставимо у відповідність ортопроектор P_k так, щоб виконувались умови

$$\begin{gathered} P_iP_jP_i = \tau_{ij}^2 P_i, \qquad P_jP_iP_j = \tau_{ij}^2 P_j, \quad \text{якщо} \quad (i,j) \in R_\Gamma, \\ P_iP_j = P_jP_i = 0, \quad \text{якщо} \quad (i,j) \notin R_\Gamma. \end{gathered} \tag{1}$$

Параметри τ_{ij} задаються співвідношеннями $\tau_{ij} = \tau \cos\dfrac{\pi}{k_{ij}}$, де $k_{ij} = f((i,j))$.

Такий набір ортопроекторів є зображенням у гільбертовому просторі H $*$-алгебри

$$TL_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp} = \mathbb{C}\Big\langle p_i,\ i \in V_\Gamma | p_i^2 = p_i^* = p_i,\ i \in V_\Gamma;$$

$$p_i p_j p_i = \tau_{ij}^2 p_i,\ (i,j) \in R_\Gamma,\ p_i p_j = p_j p_i = 0, (i,j) \notin R_\Gamma \Big\rangle.$$

У позначенні алгебри $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ літери TL використано в честь фізиків H. N. V. Temperley та E. H. Lieb'а, які у роботі [1] у зв'язку з вивченням моделей статистичної фізики ввели алгебри (співвідношення в таких алгебрах задаються ланцюжком A_n)

$$TL_{\mathcal{A}_n,\tau} = \mathbb{C}\left\langle p_1, \ldots, p_n | p_i^2 = p_i^* = p_i, \quad i = 1, \ldots, n;\right.$$

$$\left. p_i p_j p_i = \tau^2 p_i, \quad |i-j| = 1, \qquad p_i p_j = p_j p_i, |i-j| \geq 1 \right\rangle.$$

Узагальнені алгебри Темперлі – Ліба, пов'язані зі скінченними графами Γ, вивчались у роботі [12]. Символ $\perp$ у позначенні алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ вказує на те, що проектори, які відповідають не суміжним вершинам графа, на відміну від узагальнених алгебр Темперлі – Ліба є ортогональними, але не комутують.

У багатьох роботах (див. бібліографію у [2]) вивчалися зображення $*$-алгебр, пов'язаних із скінченними графами G:

$$TL_{G,\tau,\perp} = \mathbb{C}\left\langle p_i, i \in V_G | p_i^2 = p_i^* = p_i, \quad i \in V_G;\right.$$

$$\left. p_i p_j p_i = \tau^2 p_i, \quad (i,j) \in R_G, \qquad p_i p_j = p_j p_i = 0, \quad (i,j) \notin R_G \right\rangle.$$

Метою даної роботи є опис з точністю до унітарної еквівалентності ненульових незвідних систем ортопроекторів, які задовольняють умови (1).

Нагадаємо, що система ортопроекторів $\{P_k\}$ в H називається *незвідною*, якщо з умови комутації деякого обмеженого оператора C з кожним із ортопроекторів P_k випливає, що $C = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Дві системи ортопроекторів $\{P_k\}$ та $\{P'_k\}$ в H та H' називаються *унітарно еквівалентними*, якщо існує унітарний оператор $U \in B(H, H')$ такий, що $U(H_k) = H'_k$ для всіх k. Ця умова виконується тоді і лише тоді, коли виконано рівності $UP_k = P'_k U$ для всіх k.

Зауважимо, що якщо всі ортопроектори $P_i = 0$, то умови (1) виконуються, тому алгебра $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ завжди має нульове зображення $\pi_0 \colon \pi_0(p_i) = 0$ для всіх i.

3. Дослідження структури систем ортопроекторів.

Теорема. *Нехай граф* $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$ *— злічене зв'язне дерево Кокстера, тоді*:

1) *для всіх* $0 < \tau \leq \dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$ *існує єдина з точністю до унітарної еквівалентності незвідна ненульова система ортопроекторів* $\{P_k\}$, *яка задовольняє умови* (1), *при цьому* $\mathrm{dim}\mathrm{Im}P_k = 1$ *для кожного ортопроектора* P_k;

2) *для всіх* $\tau > \dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$ *ненульових незвідних систем ортопроекторів, які задовольняють умови* (1), *не існує.*

Доведення теореми розіб'ємо на три частини, що представлені у відповідних лемах.

Позначимо через $A_{\mathbf{\Gamma}} \colon l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C})$ обмежений самоспряжений оператор, заданий матрицею $A_{\mathbf{\Gamma}} = (a_{ij})$; матриця $A_{\mathbf{\Gamma}}$ є матрицею суміжності графа $\mathbf{\Gamma}$.

Лема 1. *Оператор* $B_{\mathbf{\Gamma},\tau} = I - \tau\dfrac{A_{\mathbf{\Gamma}}}{2}$ *у просторі* $l_2(\mathbb{C})$ *є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли* $0 < \tau \leq \dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$.

Доведення. Оскільки $\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma} = \|A_{\mathbf{\Gamma}}\|$, то спектр $\sigma(A_{\mathbf{\Gamma}}) \subset [-\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}, \mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}]$ та $\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma} \in \sigma(A_{\mathbf{\Gamma}})$. Тому

$$\sigma\left(\tau\frac{A_{\mathbf{\Gamma}}}{2}\right) \subset \left[-\tau\frac{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}{2}, \tau\frac{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}{2}\right] \quad \text{і} \quad \sigma\left(I - \tau\frac{A_{\mathbf{\Gamma}}}{2}\right) \geq 0$$

тоді й тільки тоді, коли $0 < \tau \leq \dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$.

Лема 2. *Існує єдине, з точністю до унітарної еквівалентності, незвідне ненульове зображення алгебри* $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ *при* $0 < \tau \leq \dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$.

Доведення. 1. Побудуємо спочатку одне ненульове незвідне зображення алгебри $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ при $0 < \tau \leq \dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$. Розглянемо гільбертовий простір $l_2(\mathbb{C})$ та введемо на ньому півторалінійну форму $\langle x, y\rangle = (B_{\mathbf{\Gamma},\tau}x, y)_{l_2}$. Тоді $\langle e_i, e_j\rangle = b_{ij}$, де b_{ij} — елементи матриці $B_{\mathbf{\Gamma},\tau} = I - \tau\dfrac{A_{\mathbf{\Gamma}}}{2} = (b_{ij})_{i,j\in V_\Gamma}$. За попередньою лемою $\forall x \in l_2(\mathbb{C})$ $\langle x, x\rangle \geq 0$ при $0 < \tau \leq \dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$. Якщо форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ додатно визначена, то введемо на просторі $l_2(\mathbb{C})$ скалярний добуток $\langle x, y\rangle = (B_{\mathbf{\Gamma},\tau}x, y)_{l_2}$, поповнимо простір $l_2(\mathbb{C})$, отриманий гільбертів простір позначимо H_τ.

В іншому випадку через H_τ позначимо фактор-простір поповненого простору $l_2(\mathbb{C})$ по ядру форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Зауважимо, що гільбертів простір H_τ є замкненою лінійною оболонкою системи векторів $\{e_i : i \in V_\Gamma\}$ (можливо, лінійно залежних), кожен з них має одиничну норму, і матриця $B_{\mathbf{\Gamma},\tau}$ є матрицею Грама цієї системи векторів.

Визначимо для кожного $i \in V_\Gamma$ ортопроектор $P_i : x \to (x, e_i)e_i$, $x \in H_\tau$, на одновимірний простір, породжений вектором e_i. Перевіримо, що таким чином визначені ортопроектори P_i задовольняють умови (1).

Якщо $(i, j) \in R_\Gamma$, то $(e_i, e_j) = -\tau_{ij}$, тоді $\forall x \in H_\tau$: $P_iP_jP_ix = P_iP_j(x, e_i)e_i = (x, e_i)P_iP_je_i = (x, e_i)P_i(e_i, e_j)e_j = -(x, e_i)P_i\tau_{ij}e_j = -\tau_{ij}(x, e_i)(e_j, e_i)e_i = \tau_{ij}^2(x, e_i)e_i = \tau_{ij}^2P_ix$, тобто $P_iP_jP_i = \tau_{ij}^2P_i$.

Якщо $(i, j) \notin R_\Gamma$, то $(e_i, e_j) = 0$, тоді $\forall x \in H_\tau$: $P_iP_jx = P_i(x, e_j)e_j = (x, e_j)P_ie_j = (x, e_i)(e_i, e_j)e_i = 0$, тобто $P_jP_i = 0$.

Позначимо побудоване зображення $*$-алгебри $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ через π: $\pi(p_i) = P_i$, $i \in V_\Gamma$.

Доведемо, що зображення π є незвідним. Нехай обмежений оператор C комутує з усіма ортопроекторами P_k, тоді $Ce_k = CP_ke_k = P_kCe_k = \lambda_ke_k$, $k \in V_\Gamma$ для деякого $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Нехай $l = (k = j_m, j_{m-1}, \ldots, j_2, j_1 = 1)$ — найкоротший шлях з вершини 1 у вершину k. Тоді знайдеться $\mu_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ таке, що $e_k = \mu_kP_kP_{j_{m-1}}\ldots P_{j_2}P_1e_1$. Таким чином, $\lambda_ke_k = Ce_k = \mu_kP_kP_{j_{m-1}}\ldots P_{j_2}P_1Ce_1 = \lambda_1e_k$ і ми одержали, що всі λ_k рівні між собою, а отже, C — скалярний оператор.

2. Доведемо, що довільне незвідне ненульове зображення π_1 у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ унітарно еквіваленте означеному вище зображенню π.

Спочатку покажемо, що для будь-якого незвідного ненульового зображення π_1 у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ образи всіх ортопроекторів $P_i = \pi_1(p_i), i \in V_\Gamma$ є одновимірними.

Оскільки $\{P_i\colon i \in V_\Gamma\}$ — незвідна ненульова система ортопроекторів, то в цій системі існує ненульовий ортопроектор, позначимо його P_{i_0}. Нехай $x_{i_0} \in \mathcal{H}$ такий, що $P_{i_0}(x_{i_0}) = x_{i_0}$ і $||x_{i_0}|| = 1$. Для кожної вершини $j \in V_\Gamma$ існує єдиний найкоротший шлях з j в i_0 : $l(j, i_0) = (j = i_1, i_2, \ldots, i_m = i_0)$. Покладемо

$$x_j = (-1)^{m+1} \frac{1}{\tau_{i_1 i_2} \tau_{i_2 i_3} \ldots \tau_{i_{m-1} i_m}} P_{i_1} P_{i_2} \ldots P_{i_m} x_{i_0}.$$

Тоді $||x_j|| = 1$, $j \in V_\Gamma$.

Перевіримо, що замкнена лінійна оболонка системи векторів $\{x_j\colon j \in V\}$ є інваріантною відносно дії ортопроекторів $\{P_i\colon i \in V\}$. Розглянемо дію P_i на векторі

$$x_j = (-1)^{m+1} \frac{1}{\tau_{i_1 i_2} \tau_{i_2 i_3} \ldots \tau_{i_{m-1} i_m}} P_j P_{i_2} \ldots P_{i_m} x_{i_0}.$$

Якщо $(i,j) \notin R_\Gamma$ та $i \neq j$, то $P_i P_j = 0$, тому $P_i x_j = 0$; якщо $(i,j) \notin R_\Gamma$ та $i = j$, то $P_i x_j = P_i x_i = x_i$. Якщо $(i,j) \in R_\Gamma$, то або $i = i_2$, або $i \neq i_2$.

У першому випадку

$$P_i x_j = P_{i_2} x_j = (-1)^{m+1} \frac{1}{\tau_{i_1 i_2} \tau_{i_2 i_3} \ldots \tau_{i_{m-1} i_m}} P_{i_2} P_j P_{i_2} P_{i_3} \ldots P_{i_m} x_{i_0} =$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{1}{\tau_{i_1 i_2} \tau_{i_2 i_3} \ldots \tau_{i_{m-1} i_m}} \tau_{j i_2}^2 P_{i_2} P_{i_3} \ldots P_{i_m} x_{i_0} = \widetilde{\tau} x_{i_2} = \widetilde{\tau} x_i$$

для деякого $\widetilde{\tau}$.

У другому випадку $i \neq i_2$ існує ланцюг $l(i, i_0) = (i, i_1 = j, i_2, \ldots, i_m = i_0)$, а тоді аналогічно $P_i x_j = \widetilde{\upsilon} x_i$ для деякого $\widetilde{\upsilon}$.

Отже, замкнена лінійна оболонка системи векторів $\{x_j\colon j \in V_\Gamma\}$ є інваріантним підпростором, а оскільки система ортопроекторів $\{P_i\colon i \in V_\Gamma\}$ є незвідною, то вона збігається з $\mathcal{H}$ і образи ортопроекторів P_i породжуються векторами x_i відповідно.

Тепер перейдемо до доведення унітарної еквівалентності зображень π_1 та π.

Якщо $(i,j) \notin R_\Gamma$, то $\langle x_i, x_j \rangle_\mathcal{H} = 0$. Якщо $(i,j) \in R_\Gamma$, то або $l(i, i_0) = (i = i_1, i_2 = j, \ldots, i_m = i_0)$, або $l(j, i_0) = (j = i_1, i_2 = i, \ldots, i_m = i_0)$.

Нехай для визначеності виконується перша рівність, тоді $x_i = -\dfrac{1}{\tau_{ij}} P_i x_j$ і маємо

$$\langle x_i, x_j \rangle_\mathcal{H} = -\frac{1}{\tau_{ij}} \langle P_i x_j, x_j \rangle_\mathcal{H} = -\frac{1}{\tau_{ij}} \langle P_i P_j x_j, P_j x_j \rangle_\mathcal{H} = -\frac{1}{\tau_{ij}} \langle P_j P_i P_j x_j, x_j \rangle_\mathcal{H} = -\tau_{ij}.$$

Таким чином, матриця $B_{\mathbf{\Gamma},\tau}$ є матрицею Грама системи векторів $\{x_i : i \in V_\Gamma\}$, а тому зображення π_1 унітарно еквівалентне зображенню π.

Лему доведено.

Лема 3. *При* $\tau > \dfrac{2}{\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}}$ *ненульових* $*$*-зображень алгебра* $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ *не має.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що алгебра $TL_{\mathbf{\Gamma},\perp,\tau}$ має ненульове $*$-зображення π у гільбертовому просторі H при $\tau > \dfrac{2}{\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}}$. Тоді можна побудувати, як і у попередньому доведенні, інваріантний гільбертів підпростір, що дорівнює замкненій лінійній оболонці системи векторів $\{x_j,\ j\in V\}$. Але тоді матриця Грама цієї системи векторів $B_{\mathbf{\Gamma},\tau}=I-\tau A_{\mathbf{\Gamma}}$ при $\tau>\dfrac{2}{\mathrm{ind}\mathbf{\Gamma}}$ не є невід'ємною. Одержали суперечність.

Лему доведено.

4. Приклади. Наведемо приклади застосування теореми до систем ортопроекторів, пов'язаних з різними зліченними деревами Кокстера.

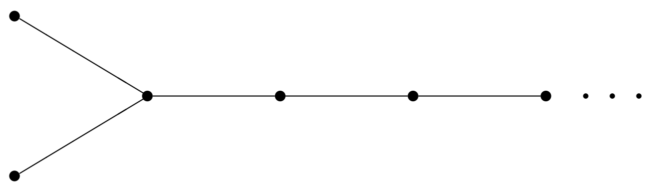
Позначимо через $\Sigma_{\mathbf{\Gamma}}$ множину тих τ, для яких існує незвідний ненульовий набір ортопроекторів $\{P_k\}$.

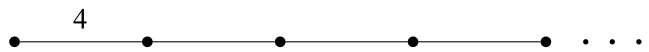
1. Індекси зліченних графів $\mathbf{A}_\infty$, $\mathbf{A}_Z$, $\mathbf{D}_\infty$, $\mathbf{B}_\infty$ дорівнюють 2 (див. [11]), тоді згідно з теоремою маємо

$$\Sigma_{\mathbf{A}_\infty}=\Sigma_{\mathbf{A}_Z}=\Sigma_{\mathbf{D}_\infty}=\Sigma_{\mathbf{B}_\infty}=(0;1]\,.$$

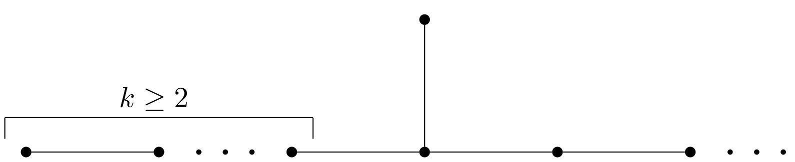
$\mathbf{A}_\infty$

$\mathbf{A}_\mathbb{Z}$

$\mathbf{D}_\infty$ 

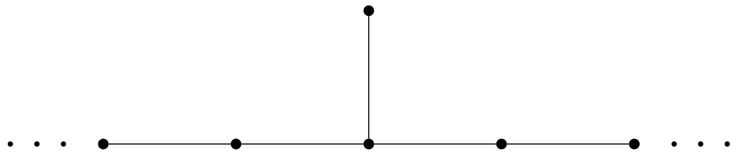
$\mathbf{B}_\infty$ 

2. Індекси серії графів $\mathbf{T}_{1,k,\infty}$, $k\geq 2$, належать проміжку $\left(2;\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)$ (див. [11]), тоді згідно з теоремою маємо $\Sigma_{\mathbf{T}_{1,k,\infty}}\supset\left(0;\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}\right]$.

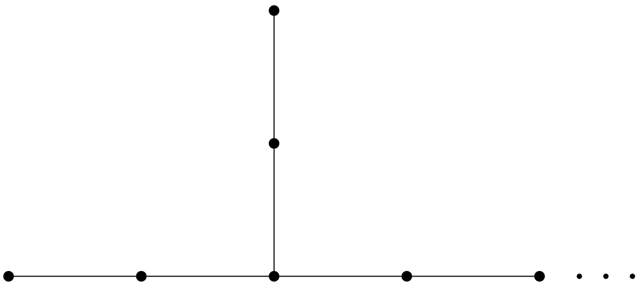
$\mathbf{T}_{1,k,\infty}$ 

3. Індекси графів $\mathbf{T}_{1,\infty,\infty}$, $\mathbf{T}_{2,2,\infty}$, $\mathbf{H}_\infty$ та $\mathbf{F}_\infty$ дорівнюють $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ (див. [11]), тоді згідно з теоремою маємо $\Sigma_{\mathbf{T}_{1,\infty,\infty}}=\Sigma_{\mathbf{T}_{2,2,\infty}}=\Sigma_{\mathbf{H}_\infty}=\Sigma_{\mathbf{F}_\infty}=\left(0;\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}\right]$.

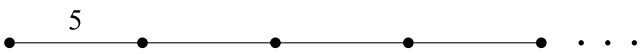
$\mathbf{T}_{1,\infty,\infty}$



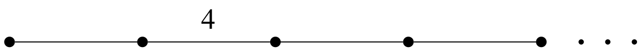
$\mathbf{T}_{2,2,\infty}$



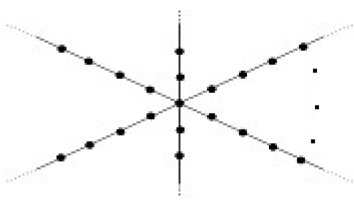
$\mathbf{H}_\infty$



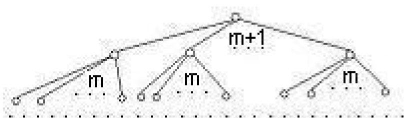
$\mathbf{F}_\infty$



4. Індекс графа-зірочки з n нескінченними променями $\mathbf{K}_{1,\infty,\ldots,\infty}$ дорівнює $\sqrt{n-1}+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$ (див. [9]), тоді згідно з теоремою маємо $\Sigma_{\mathbf{K}_{1,\infty,\ldots,\infty}} = \left(0; \dfrac{2\sqrt{n-1}}{n}\right]$.



5. Індекс графа $\mathbf{U}_{m+1}$ (степінь кожної вершини дорівнює $m+1$) дорівнює $2\sqrt{m}$ (див. [9]), тоді згідно з теоремою маємо $\Sigma_{\mathbf{U}_{m+1}} = \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{m}}\right]$.



4. Висновки. У статті описано зображення, їх структуру та множину параметрів, за яких ненульові зображення існують, для певних класів алгебр типу Темперлі – Ліба, пов'язаних зі зліченними деревами Кокстера. Одержані результати можуть бути застосовані при подальших дослідженнях зображень алгебр, породжених проекторами, та для опису наборів підпросторів гільбертового простору.

Автори висловлюють щиру подяку І. С. Фещенко за корисні поради.

1. *Temperley H. N. V., Lieb E.H.* Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1971. – **322**. – P. 251 – 280.
2. *Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О простых n-ках подпространств в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1668 – 1703.
3. *Casazza P.G., Kutyniok G.* Finite frames: theory and applications. – New York etc.: Springer, 2013. – 485 p.
4. *Cvetkovïć D., Doob M., Sachs H.* Spectra of graphs. Theory and applications. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1980. – 368 p.
5. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* Spectra of graphs. – New York etc.: Springer, 2012. – 245 p.
6. *Goodman F. M., de la Harpe P., Jones V. F. R.* Coxeter graphs and towers of algebras. – New York etc.: Springer, 1989. – 288 p.
7. *Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М.* Про спектральну теорію графів Кокстера // У світі математики. – 2009. – **15**, № 3. – С. 14 – 24.
8. *Mohar B.,Woess W.* A survey on spectra of infinite graphs // Bull. London Math. Soc. – 1989. – **21**. – P. 209 – 234.
9. *Mohar B.* The spectrum of an infinite graph // Linear Algebra and Appl. – 1982. – **48**. – P. 245 – 256.
10. *von Below J.* An index theory for uniformly locally finite graphs // Linear Algebra and Appl. – 2009. – **431**. – P. 1 – 19.
11. *Коротков А. С., Тимошкевич Л. М.* Аналог теореми Сміта для зліченних графів Кокстера // Доп. НАН України. – 2013. – № 12. – С. 19 – 24.
12. *Graham J.* Modular representations of Hecke algebras and related algebras: Ph.D. Thesis. – Sydney, 1995.

Одержано 17.01.14,
після доопрацювання — 28.05.14