УДК 517.983

В. О. Лебідь, Л. П. Нижник (Ін-т математики НАН України, Київ)

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДЕЯКИХ ГРАФІВ З НЕСКІНЧЕННИМИ ПРОМЕНЯМИ*

We perform a detailed spectral analysis of countable graphs formed by joining semibounded infinite chains to the vertices of a finite graph. The spectrum of a self-adjoint operator generated by the adjacency matrix of the graph is characterized, the spectral measure is constructed, the eigenvectors are presented in the explicit form, and the spectral expansion in eigenvectors is obtained.

Проведен подробный спектральный анализ счетных графов, которые созданы присоединением к вершинам конечного графа полуограниченных бесконечных цепочек. Охарактеризован спектр матрицы смежности таких графов, построена спектральная мера, приведены в явном виде собственные векторы и спектральное разложение по собственным векторам.

1. Вступ. Спектральна теорія графів є одним із актуальних напрямів у сучасній математичній фізиці (див. [1 – 8] і наведену там бібліографію). Це пов'язано як із внутрішніми стимулами розвитку теорії, так і з розв'язанням конкретних прикладних задач, які виникають у теорії інформаційних, комунікаційних, енергетичних та транспортних мереж.

Простим неорієнтованим графом G називають пару (V, E), у якій V — деяка непорожня множина (множина вершин), а E — множина ребер, що з'єднують різні вершини V. З графом G однозначно пов'язана матриця суміжності $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, елементи якої a_{ij} дорівнюють 1, якщо вершини з номерами i та j з'єднуються ребром, або 0, якщо такого ребра немає.

У випадку зліченних графів матриця $A(G)$ породжує у гільбертовому просторі $l_2(V)$ самоспряжений оператор $\mathbb{A}$, спектр якого може мати дискретну $\sigma_p(\mathbb{A})$ та неперервну $\sigma_c(\mathbb{A})$ компоненти. Під спектральним аналізом графа G розуміють спектральний аналіз самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$.

Для скінченних графів їх спектральний аналіз зводиться до спектрального аналізу невід'ємних симетричних скінченних матриць, і на сьогодні є добре розвиненим розділом теорії графів [1, 2]. Для деяких зліченних графів також побудовано спектральну теорію [3 – 7, 9, 10].

Найпростішим нескінченним графом $A_{\mathbb{N}}$ є напівобмежений ланцюг, усі вершини якого занумеровані натуральними числами $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, а ребра з'єднують лише вершини із послідовними номерами. Такий граф-ланцюг називатимемо променем.

Матриця суміжності напівобмеженого ланцюжка $A_{\mathbb{N}}$ є якобієвою матрицею J_0, на головній діагоналі якої розташовано нулі, а на двох побічних — одиниці. Відомо, що матриця J_0 породжує у просторі $l_2(\mathbb{N})$ самоспряжений оператор, спектр якого чисто абсолютно неперервний, однократний і утворює інтервал $[-2, 2]$ (див. [4, 11, 12]).

Більше того, для оператора J_0 у просторі $l_2(\mathbb{N})$ справедливою є спектральна теорема про розклад за узагальненими власними функціями (див. [12]). Для $\lambda \in [-2, 2]$ вектор-функція $\varphi(\lambda) = (\varphi_0(\lambda), \varphi_1(\lambda), \ldots)$, де $\varphi_j(\lambda) = P_j(\lambda)$, $j \geq 0$, є узагальненою власною функцією оператора J_0, що відповідає власному значенню λ, тобто $J_0\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$.

* Виконано в рамках проекту 03-01-12 „Обернені задачі в сучасній математичній фізиці" спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

Тут $P_j(\lambda)$ є поліномом степеня j від λ, що виражається у вигляді $P_j(\lambda) = U_j\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ через поліноми Чебишова другого роду $U_j(z) = \frac{\sin((j+1)\arccos z)}{\sin(\arccos z)}$. Для поліномів $P_j(\lambda)$ справджується рекурентне співвідношення $P_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda) - P_{j-1}(\lambda)$ з початковими умовами $P_{-1}(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda) = \lambda$.

Кожному вектору $x \in l_2(\mathbb{N})$ відповідає його перетворення Фур'є $\widetilde{x}(\lambda)$ за узагальненим власним вектором

$$\widetilde{x}(\lambda) \equiv \mathfrak{F}x = (x, \varphi(\lambda))_{l_2} = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \varphi_j(\lambda). \tag{1}$$

Функція $\widetilde{x}(\lambda)$ належить простору $L_2([-2,2], \rho(\lambda)d\lambda) \equiv L_2(\rho)$ квадратично інтегровних функцій на інтервалі $[-2,2]$ з вагою $\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2} \equiv \rho_0(\lambda)$.

Має місце обернене перетворення Фур'є, визначене на всьому $L_2(\rho)$:

$$x \equiv \mathfrak{F}^{-1}x = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \tag{2}$$

Для довільних $x, y \in l_2(\mathbb{N})$ справджується рівність Парсеваля

$$(x, y)_{l_2} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})_{L_2(\rho)}. \tag{3}$$

Як показано у роботі [10], спектральний аналіз зліченних графів, що утворені приєднанням до скінченного графа одного променя, зводиться до дослідження якобієвих матриць, у яких лише скінченне число елементів відрізняється від відповідних елементів матриці J_0. Це дало можливість у роботах [9, 10] отримати явні формули для випадків зіркового, повного, циклічного та інших графів з одним приєднаним променем.

Метою даної роботи є дослідження спектральних властивостей зліченних графів, які мають вигляд скінченних графів, до деяких вершин яких приєднано нескінченні промені. При цьому доводиться, що матриця суміжності таких графів унітарно еквівалентна ортогональній сумі скінченної симетричної матриці та декількох спеціальних якобієвих матриць, у яких не більше чотирьох елементів відмінні від відповідних елементів найпростішої матриці Якобі J_0, що дозволяє провести повний і явний спектральний аналіз таких графів.

У пункті 2, що має допоміжний характер, проведено явний спектральний аналіз деяких спеціальних матриць Якобі, потрібних для спектрального аналізу графів, що розглядаються у пп. 3–5. У пункті 3 — це зіркові графи з n однореберними та m нескінченними променями. У пункті 4 — це повний граф із $n+m$ вершин, до m вершин якого приєднано нескінченні промені. У пункті 5 — це циклічний граф, до кожної вершини якого приєднано нескінченний промінь.

2. Спеціальні матриці Якобі. Розглянемо чотирипараметричну сім'ю якобієвих матриць

$$J_{b_1,b_2}^{a_1,a_2} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_2 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad a_1, a_2 > 0, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R},$$

на головній діагоналі яких розташовані числа b_1, b_2, 0, $0, \ldots$, а на двох побічних — a_1, a_2, 1, $1, \ldots$. У випадках, коли $a_1 = a_2 = 1$, такі матриці будемо позначати через J_{b_1,b_2}, при $b_2 = 0$ — через J_{b_1}, а при $b_1 = b_2 = 0$ — через J_0. У випадку, коли $b_1 = b_2 = 0$, матриці Якобі позначаємо через J^{a_1,a_2}, а при $a_2 = 1$ — через J^{a_1}.

Теорема 1. *Матриця Якобі $J_{b_1,b_2}^{a_1,a_2}$ породжує у просторі $l_2(\mathbb{N})$ обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається з однократної абсолютно неперервної компоненти, що збігається з інтервалом $[-2, 2]$, та ще не більше ніж чотирьох власних значень λ, що є нулями спектрального полінома*

$$p(\lambda) = \left[(\lambda - b_1)(\lambda - b_2) - a_1^2\right]\left[(\lambda - b_1)((1 - a_2^2)\lambda - b_2) - a_1^2\right] + a_2^4(\lambda - b_1)^2, \tag{4}$$

з умовою, що число $\mu = \dfrac{(\lambda - b_1)(\lambda - b_2) - a_1^2}{a_2^2(\lambda - b_1)}$ за модулем менше, ніж 1. Числа μ є нулями полінома $\gamma(\mu) = 1 + \gamma_1\mu + \gamma_2\mu^2 + \gamma_3\mu^3 + \gamma_4\mu^4$, де $\gamma_1 = -b_1 - b_2$, $\gamma_2 = 2 + b_1b_2 - a_1^2 - a_2^2$, $\gamma_3 = b_1a_2^2 - b_1 - b_2$, $\gamma_4 = 1 - a_2^2$. Кожному власному значенню $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ у просторі $l_2(\mathbb{N})$ відповідає власний вектор вигляду

$$e_\mu = \left(\frac{a_1}{a_2(\mu + \mu^{-1} - b_1)}, a_2^{-1}, \mu, \mu^2, \mu^3, \ldots, \mu^j, \ldots\right). \tag{5}$$

При цьому кожному $\lambda \in [-2, 2]$ відповідає узагальнений власний вектор

$$\varphi(\lambda) = (a_1a_2, a_2(\lambda - b_1), \varphi_2(\lambda), \varphi_3(\lambda) \ldots, \varphi_j(\lambda), \ldots), \tag{6}$$

де

$$\varphi_2(\lambda) = (\lambda - b_1)(\lambda - b_2) - a_1^2,$$

$$\varphi_j(\lambda) = \varphi_2(\lambda)P_{j-2}(\lambda) - a_2^2(\lambda - b_1)P_{j-3}(\lambda), \quad j \geq 2,$$

$$\varphi_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{4} \gamma_k P_{j-k}(\lambda), \quad j \geq 4, \quad \gamma_0 = 1,$$

поліноми $P_j(\lambda)$ визначено у вступі.

Справджуються розклад за наведеними власними вектор-функціями та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю $\rho(\lambda) = \dfrac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2\pi p(\lambda)}$ абсолютно неперервного спектра.

Доведення. Той факт, що спектр матриці Якобі $J_{b_1,b_2}^{a_1,a_2}$ складається з однократної абсолютно неперервної компоненти і ще не більш ніж зі скінченної кількості власних значень, що лежать ззовні інтервалу $[-2, 2]$, випливає із загальної спектральної теорії якобієвих матриць [11, 12].

Із цієї теорії випливають і можливість розкладу за власними вектор-функціями, і рівність Парсеваля. Тому потребує перевірки лише правильність формул для $e_\mu, \varphi(\lambda)$ і спектральної щільності $\rho(\lambda)$. Правильність формул (5) і (6) для $e_\mu, \varphi(\lambda)$ безпосередньо перевіряється із рівностей $J_{b_1,b_2}^{a_1,a_2} e_\mu = (\mu + \mu^{-1}) e_\mu$ і $J_{b_1,b_2}^{a_1,a_2} \varphi(\lambda) = \lambda \varphi(\lambda)$.

Явний вигляд спектральної щільності $\rho(\lambda)$ можна отримати так. По-перше, при фіксованому $\lambda \in [-2, 2]$ вектор $\varphi(\lambda)$ ортогональний усім власним векторам вигляду (5). Якщо вектор $x = (x_0, x_1, \ldots) \in l_2$ ортогональний усім власним векторам e_μ, то його перетворення Фур'є за узагальненими власними векторами дає функцію

$$\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi(\lambda))_{l_2} = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \varphi_j(\lambda). \tag{7}$$

Оскільки поліноми $\varphi_j(\lambda)$ явно виражаються через поліноми $P_j(\lambda)$, а множина поліномів $\{P_j(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$ утворює ортонормовану систему у просторі $L_2([-2, 2], \rho_0(\lambda) d\lambda)$, де $\rho_0(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4 - \lambda^2}$, то із (7) отримуємо

$$\int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda) \varphi(\lambda) \rho_0(\lambda) d\lambda = X_k, \tag{8}$$

де X_k явно виражається через компоненти вектора x:

$$X_k = \begin{cases} a_1 a_2 x_0 - b_1 a_2 x_1 + (b_1 b_2 - a_1^2 + 1) x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4, & \text{якщо } k = 0, \\ a_2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_3 + \gamma_3 x_4 + \gamma_4 x_5, & \text{якщо} \quad k = 1, \\ x_k + \gamma_1 x_{k+1} + \gamma_2 x_{k+2} + \gamma_3 x_{k+3} + \gamma_4 x_{k+4}, & \text{якщо} \quad k \geq 2. \end{cases} \tag{9}$$

З іншого боку, зі спектральної теореми для якобієвих матриць випливає, що існує така щільність $\rho(\lambda)$, що вектор x (а отже, і його компоненти) явно виражаються через $\widetilde{x}(\lambda)$:

$$x_j = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda) \varphi_j(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{10}$$

Підстановка (10) у праву частину (8) з урахуванням (9) приводить до тотожності

$$\int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda) P_j(\lambda) p(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda) P_j(\lambda) \rho_0(\lambda) d\lambda, \tag{11}$$

де поліном $p(\lambda)$ визначено у (4). Оскільки тотожність (11) виконується для довільного j і довільної функції $\widetilde{x}(\lambda)$, то $\rho(\lambda) = \dfrac{\rho_0(\lambda)}{p(\lambda)}$, що і потрібно було довести.

Зауважимо, що доведення теореми можна провести і безпосередньо, не використовуючи результатів зі спектральної теорії якобієвих матриць, як це зроблено у роботах [9, 10].

Із теореми 1 як частковий випадок при $b_2 = 0$, $b_1 = b$, $a_2 = 1$, $a_1 = a$ отримуємо таку теорему.

Теорема 2. *Матриця Якобі* J_b^a *породжує у просторі* $l_2(\mathbb{N})$ *обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається з однократної абсолютно неперервної компоненти, що збігається з інтервалом* $[-2, 2]$, *та ще не більше ніж двох власних значень* λ, *що є нулями спектрального полінома*

$$p(\lambda) = a^4 + b^2 + b(a^2 - 2)\lambda - (a^2 - 1)\lambda^2, \tag{12}$$

з умовою, що число $\mu = \dfrac{\lambda - b}{a^2}$ *за модулем менше, ніж* 1.

Необхідною і достатньою умовою, щоб матриця J_b^a *мала*:

1) *два власних значення, є умова* $a^2 > 2$, $|b| < a^2 - 2$;

2) *одне власне значення, є умова* $|b| \geq a^2 - 2$ *і тоді* $\operatorname{sign}\lambda = \operatorname{sign} b$;

3) *не мала власних значень, є умова* $a^2 \leq 2$, $|b| \leq 2 - a^2$.

Кожному власному значенню $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ *у просторі* $l_2(\mathbb{N})$ *відповідає власний вектор вигляду*

$$e_\mu = (a^{-1}, \mu, \mu^2, \mu^3, \ldots, \mu^j, \ldots). \tag{13}$$

При цьому кожному $\lambda \in [-2, 2]$ *відповідає узагальнений власний вектор*

$$\varphi(\lambda) = (a, P_1(\lambda) - bP_0(\lambda), P_2(\lambda) - bP_1(\lambda) - (a^2 - 1)P_0(\lambda), \ldots, P_{j-1}(\lambda) -$$

$$- bP_{j-2}(\lambda) - (a^2 - 1)P_{j-3}(\lambda), \ldots). \tag{14}$$

Справджуються розклад за наведеними власними вектор-функціями та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю $\rho(\lambda) = \dfrac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2\pi p(\lambda)}$ *абсолютно неперервного спектра.*

Наведемо ще один частковий випадок теореми 1, коли $b_1 = b_2 = 0$.

Теорема 3. *Матриця Якобі* J^{a_1, a_2} *породжує у просторі* $l_2(\mathbb{N})$ *обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається з однократної абсолютно неперервної компоненти, що збігається з інтервалом* $[-2, 2]$, *та ще не більше ніж чотирьох власних значень* λ, *що є нулями спектрального полінома*

$$p(\lambda) = a_1^4 + [a_1^2(a_2^2 - 2) + a_2^4]\lambda^2 - (a_2^2 - 1)\lambda^4, \tag{15}$$

з умовою, що число $\mu^2 = \dfrac{\lambda^2 - a_1^2 - a_2^2}{a_2^2}$ *менше, ніж* 1.

Кожному власному значенню $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ *у просторі* $l_2(\mathbb{N})$ *відповідає власний вектор вигляду*

$$e_\mu = \left(\frac{a_1}{a_2(\mu + \mu^{-1})}, a_2^{-1}, \mu, \mu^2, \mu^3, \ldots, \mu^j, \ldots \right). \tag{16}$$

При цьому кожному $\lambda \in [-2, 2]$ *відповідає узагальнений власний вектор*

$$\varphi(\lambda) = (a_1 a_2, a_2 P_1(\lambda), P_2(\lambda) - (a_1^2 - 1)P_0(\lambda), \ldots, P_j(\lambda) -$$

$$- (2 - a_1^2 - a_2^2)P_{j-2}(\lambda) - (a_2^2 - 1)P_{j-4}(\lambda), \ldots). \tag{17}$$

Справджуються розклад за наведеними власними вектор-функціями та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю $\rho(\lambda) = \dfrac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2\pi p(\lambda)}$ *абсолютно неперервного спектра.*

Із теореми 1 як частковий випадок при $a_2 = 1$, $a_1 = a$ отримуємо таку теорему.

Теорема 4. *Матриця Якобі* $J^a_{b_1,b_2}$ *породжує у просторі* $l_2(\mathbb{N})$ *обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається з однократної абсолютно неперервної компоненти, що збігається з інтервалом* $[-2, 2]$, *та ще не більше ніж трьох власних значень* λ, *що є нулями спектрального полінома*

$$p(\lambda) = (b_1b_2 - a)^2 + b_1^2 - [2b_1 + (b_1 + 2b_2)(b_1b_2 - a)]\lambda + [b_2(2b_1 + b_2) + 1 - a^2]\lambda^2 - b_2\lambda^3, \quad (18)$$

з умовою, що число $\mu = \dfrac{\lambda - b_1}{b_2\lambda + a^2 - b_1b_2}$ *за модулем менше, ніж* 1.

Кожному власному значенню $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ *у просторі* $l_2(\mathbb{N})$ *відповідає власний вектор вигляду*

$$e_\mu = \left(\frac{a}{\mu + \mu^{-1} - b_1}, 1, \mu, \mu^2, \mu^3, \ldots, \mu^j, \ldots\right). \quad (19)$$

При цьому кожному $\lambda \in [-2, 2]$ *відповідає узагальнений власний вектор*

$$\varphi(\lambda) = (a, P_1(\lambda) - bP_0(\lambda), P_2(\lambda) - (b_1 + b_2)P_1(\lambda) + (1 - a^2 + b_1b_2)P_0(\lambda), \ldots$$

$$\ldots, P_j(\lambda) - (b_1 + b_2)P_{j-1}(\lambda) + (1 - a^2 + b_1b_2)P_{j-2}(\lambda) - b_2P_{j-3}(\lambda), \ldots). \quad (20)$$

Справджуються розклад за наведеними власними вектор-функціями та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю $\rho(\lambda) = \dfrac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2\pi p(\lambda)}$ *абсолютно неперервного спектра.*

3. Зірковий граф. Нехай $S(n, 1; m, \infty)$ — зірковий граф із n однореберними та m нескінченними променями. Випадок $m = 1$ і $n = 0$ розглянуто у роботах [9, 10]. Матриця суміжності графа $S(n, 1; m, \infty)$ породжує обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, де V — множина вершин графа $S(n, 1; m, \infty)$. Оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ діє на вектор $x \in l_2(V)$ так:

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{A}_{n,m}x)_0 = \sum_{j=1}^{n} x^j + \sum_{j=n+1}^{n+m} x_1^j,\\
&(\mathbb{A}_{n,m}x)^j = x_0 \quad \text{для кожного} \quad j = \overline{1, n},\\
&(\mathbb{A}_{n,m}x)_i^j = x_{i-1}^j + x_{i+1}^j,\\
&x_0^j \equiv x_0 \quad \text{для кожного} \quad j = \overline{n+1, n+m},\ i \geq 1.
\end{aligned} \quad (21)$$

Тут компоненти векторів x та $\mathbb{A}_{n,m}x$ із простору $l_2(V)$, що відповідають центру зіркового графа, позначаємо нижнім індексом 0, а компоненти, що відповідають i-й вершині на j-му нескінченному промені, — нижнім індексом i та верхнім індексом j $(j = \overline{n+1, n+m})$; компоненти, що відповідають висячій вершині на j-му однореберному промені — верхнім індексом j $(j = \overline{1, n})$.

Теорема 5. *Оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ вигляду* (21), *що відповідає зірковому графу $S(n,1;m,\infty)$, є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(V)$. При $m,n\geq 1$ існує унітарний оператор $\mathfrak{U}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$ такий, що*

$$\mathfrak{U}\mathbb{A}_{n,m}\mathfrak{U}^{-1}=O_{n-1}\oplus J^{\sqrt{n},\sqrt{m}}\oplus\underbrace{J_0\oplus\ldots\oplus J_0}_{m-1},$$

де O_{n-1} — нульова матриця розміру $(n-1)\times(n-1)$, а $J^{\sqrt{n},\sqrt{m}}$, J_0 — матриці Якобі.

Доведення. Нехай $\{e_0,e^j,e_i^k\}_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m}$ — стандартний базис у просторі $l_2(V)$, пов'язаний із вказаною нумерацією вершин V зіркового графа $S(n,1;m,\infty)$. Розглянемо дві дійсні унітарні матриці $U^k=\|u_{ij}^k\|_{i,j=1}^k$, $k=n,m$, у яких перший рядок складається із чисел $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, тобто $u_{1j}^k=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $j=1,\ldots,n$, $k=n,m$, а всі інші елементи вибрано так, щоб матриці U^k були дійсними й унітарними. Тоді

$$\sum_{j=1}^k u_{\alpha j}^k u_{\beta j}^k=\delta_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta=\overline{1,k},$$

де $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Звідси випливає, що

$$\sum_{j=1}^k u_{ij}^k=0\quad\text{при}\quad i=2,\ldots,k.$$

Розглянемо у просторі $l_2(V)$ новий базис $\{\widehat{e}_0,\widehat{e}^j,\widehat{e}_i^k\}_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m}$ такий, що

$$\widehat{e}_0=e_0,\qquad \widehat{e}^1=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n e^j,\qquad \widehat{e}^j=\sum_{s=1}^n u_{js}^n e^s,\quad j=2,3,\ldots,n,$$

$$\widehat{e}_i^1=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^m e_i^j,\qquad \widehat{e}_i^k=\sum_{s=1}^m u_{ks}^m e_i^s,\quad k=n+2,\ldots,n+m,\quad i\in\mathbb{N}.$$

Згідно з (21) оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ діє на вихідний базис так:

$$\mathbb{A}_{n,m}e_0=\sum_{j=1}^n e^j+\sum_{k=n+1}^{n+m}e_1^k,$$

$$\mathbb{A}_{n,m}e^j=e_0\quad\text{для кожного}\quad j=\overline{1,n},$$

$$\mathbb{A}_{n,m}e_i^k=e_{i-1}^k+e_{i+1}^k,$$

$$e_0^k\equiv e_0\quad\text{для кожного}\quad k=\overline{n+1,n+m},\ i\geq 1.$$

Враховуючи зв'язок між новим та вихідним базисами, маємо

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}^1=\sqrt{n}\widehat{e}_0,\qquad \mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_0=\sqrt{n}\widehat{e}^1+\sqrt{m}\widehat{e}_1^1,$$

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}^j = 0 \quad \text{для кожного} \quad j = \overline{2,n},$$

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_1^n = \sqrt{n}\widehat{e}_0 + \widehat{e}_2^n, \qquad \mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_i^j = \widehat{e}_{i-1}^j + \widehat{e}_{i+1}^j, \quad i \geq 2, \quad j \geq n,$$

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_1^j = \widehat{e}_2^j, \quad j \geq n+1.$$

Ці співвідношення показують, що у підпросторі розмірності $n-1$ з базисом $\{\widehat{e}^j\}_{j=2}^n$ оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ діє як нульовий, у підпросторах H^k з базисом $\{\widehat{e}_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ при кожному $k = \overline{n+1, n+m}$ — як матриця Якобі J_0, а у підпросторі H^1 з базисом $\{\widehat{e}_0, \widehat{e}^1, \widehat{e}_i^n\}_{i\in\mathbb{N}}$ — як матриця Якобі $J^{\sqrt{n},\sqrt{m}}$.

Таким чином, оператор $\mathfrak{U}$ у просторі $l_2(V)$, який переводить базис $\{e_0, e^j, e_i^k\}_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m}$ у базис $\{\widehat{e}_0, \widehat{e}^j, \widehat{e}_i^k\}_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m}$, є унітарним і задовольняє твердження теореми.

Теорему 5 доведено.

Із теореми 5 випливає, що спектр зіркового зв'язного графа $S(n,1;m,\infty)$ складається із m-кратної абсолютно неперервної компоненти, що збігається з інтервалом $[-2,2]$, та із власних значень: $\lambda = 0$ кратності $n-1$ та $\lambda_\pm = \pm\sqrt{\dfrac{nm + m^2 - 2n + m\sqrt{(n+m)^2 - 4n}}{2(m-1)}}$. Індекс графа $S(n,1;m,\infty)$, тобто спектральний радіус оператора $\mathbb{A}_{n,m}$, визначається числом $\operatorname{ind} S(n,1;m,\infty) = \lambda_+$.

4. Повний граф. Розглянемо повний граф із $n+m$ вершин, кожні дві вершини якого з'єднано ребром, до кожної із m фіксованих вершин якого приєднано нескінченний промінь. Будемо позначати такий граф через $K(n,m,\infty)$ і вважати, що вершини занумеровано так, що перші n є вільними, а до наступних m приєднано промені. Матриця суміжності такого графа визначає обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, де V — множина вершин графа $K(n,m,\infty)$. Оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ діє на вектор $x = (x_1^j, x_i^k)_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m} \in l_2(V)$ так:

$$(\mathbb{A}_{n,m}x)_1^j = \sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{n+m} x_1^\alpha \quad \text{для кожного} \quad j = \overline{1,n},$$

$$(\mathbb{A}_{n,m}x)_1^k = \sum_{\alpha=1,\alpha\neq k}^{n+m} x_1^\alpha + x_2^k \quad \text{для кожного} \quad k = \overline{n+1, n+m}, \tag{22}$$

$$(\mathbb{A}_{n,m}x)_i^k = x_{i-1}^k + x_{i+1}^k \quad \text{для кожного} \quad k = \overline{n+1, n+m}, \quad i \geq 2.$$

Теорема 6. *Оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ вигляду* (22), *що відповідає графу $K(n,m,\infty)$, є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(V)$. Існує унітарний оператор $\mathfrak{U}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$ такий, що*

$$\mathfrak{U}\mathbb{A}_{n,m}\mathfrak{U}^{-1} = -I_{n-1} \oplus J_{n-1,m-1}^{\sqrt{nm}} \oplus \underbrace{J_0 \oplus \ldots \oplus J_0}_{m-1},$$

де I_{n-1} — одинична матриця розміру $(n-1)\times(n-1)$, а $J_{n-1,m-1}^{\sqrt{nm}}$, J_0 — матриці Якобі.

Доведення аналогічне доведенню теореми 5 з використанням унітарних матриць $U^k = \|u_{ij}^k\|_{i,j=1}^k$, $k = n, m$. Дійсно, якщо $\{e_1^j, e_i^k\}_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m}$ — стандартний базис у просторі

$l_2(V)$, пов'язаний із вказаною нумерацією вершин V графа $K(n,m,\infty)$, то новий базис можна визначити так:

$$\widehat{e}_1^j = \sum_{\alpha=1}^{n} u_{j\alpha}^n e_1^\alpha, \quad j = 1,\ldots,n,$$

$$\widehat{e}_i^j = \sum_{\alpha=1}^{m} u_{j-n,\alpha}^m e_i^{\alpha+n}, \qquad j = n+1,\ldots,n+m, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Оператор $\mathbb{A}_{n,m}$ діє на базисні вектори нового базису таким чином:

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_1^1 = (n-1)\widehat{e}_1^1 + \sqrt{nm}\widehat{e}_1^{n+1},$$

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_1^j = -\widehat{e}_1^j \quad \text{для кожного} \quad j = \overline{2,n},$$

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_1^{n+1} = (m-1)\widehat{e}_1^{n+1} + \sqrt{nm}\widehat{e}_1^1 + \widehat{e}_2^{n+1},$$

$$\mathbb{A}_{n,m}\widehat{e}_i^j = \widehat{e}_{i-1}^j + \widehat{e}_{i+1}^j, \qquad \widehat{e}_0^j = 0, \quad i \geq 1, \quad j = n+1,\ldots,n+m.$$

Отже, оператор $\mathfrak{U}$ у просторі $l_2(V)$, який переводить базис $\{e_1^j, e_i^k\}_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m}$ у базис $\{\widehat{e}_1^j, \widehat{e}_i^j\}_{j=1,k=n+1,i\in\mathbb{N}}^{n,\quad n+m}$, є унітарним і задовольняє твердження теореми.

Теорему 6 доведено.

Із теореми 6 випливає, що спектр графа $K(n,m,\infty)$ складається із m-кратної абсолютно неперервної компоненти, що збігається з інтервалом $[-2,2]$, з $(n-1)$-кратного власного значення $\lambda = -1$, якому відповідають фінітні власні вектори, та ще із власних значень λ, що є нулями кубічного многочлена

$$p(\lambda) = n^2m^2 + (n-1)^2 + [2nm(m-1) + (n-1)(nm-2)]\lambda +$$

$$+[(m-1)(n+m-2) + 1 - nm]\lambda^2 - (m-1)\lambda^3,$$

для яких число $\mu = \dfrac{\lambda - n + 1}{(m-1)\lambda + nm}$ за модулем менше 1. Іншими словами, власні значення мають вигляд $\lambda = \mu + \mu^{-1}$, де μ ($|\mu| < 1$) є дійсним коренем рівняння

$$(m-1)\mu^3 + (nm-1)\mu^2 + (n+m-2)\mu - 1 = 0. \tag{23}$$

При $m,n \geq 1$ завжди існує один потрібний додатний корінь рівняння (23). Для того щоб існували два розв'язки (додатний і від'ємний), необхідно і достатньо, щоб $mn + 1 > 2m + n$. Ця умова завжди виконується, якщо $m,n \geq 3$. У рівнянні (23) три розв'язки з умовою $|\mu| < 1$ неможливі.

У випадку, коли $n = 1$, тобто у повного графа з $m+1$ вершинами, лише до однієї вершини якого не приєднано промінь, є лише одне власне значення, що є дійсним нулем многочлена

$$m^2 + 2m(m-1)\lambda + (m-1)(m-2)\lambda^2 - (m-1)\lambda^3.$$

Наближене значення цього власного числа можна подати у вигляді $\lambda = m + m^{-1} - \frac{1}{m^2 + 3m - 2}$, що добре наближає точне значення при великих m, а при всіх $m \geq 2$ похибка не перевищує $1,5$ відсотка.

5. Циклічний граф. Нехай $C(n, \infty)$ — циклічний граф із n вершин, до кожної із яких приєднано нескінченний промінь. Будемо нумерувати послідовно вершини, що лежать на циклі, і промені, що виходять із цих вершин, верхнім індексом $j (\operatorname{mod} n)$, тобто числами $0, 1, \ldots, n-1$, а вершини, що лежать на самих променях у послідовному порядку, — нижнім індексом $i \geq 1$.

Матриця суміжності графа $C(n, \infty)$ визначає обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{A}_n$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, де V — множина вершин графа $C(n, \infty)$. Оператор $\mathbb{A}_n$ діє на вектор $x = (x_1^j)_{j=0, i \in \mathbb{N}}^{n-1} \in l_2(V)$ таким чином:

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_n x)_1^j &= x_1^{j-1} + x_1^{j+1} + x_2^j, \\ (\mathbb{A}_n x)_i^j &= x_{i-1}^j + x_{i+1}^j, \qquad i \geq 2, \quad j = 0, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{24}$$

Розглянемо детально спектральний аналіз циклічних графів із приєднаними променями для випадків $n = 4, 6, 8, 12$, для яких усі величини можна подати у простому явному вигляді.

Теорема 7. *Оператор $\mathbb{A}_n$ вигляду* (24), *що відповідає матриці суміжності графа $C(n, \infty)$, є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(V)$. Існують такі унітарні оператори $\mathfrak{U}_n$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, що оператор $\mathbb{A}_n$ унітарно еквівалентний, а оператор $\mathfrak{U}\mathbb{A}_n\mathfrak{U}^{-1}$ збігається з ортогональною сумою якобієвих матриць*

$$J^{\sqrt{5}} \oplus J_0 \oplus J_0 \oplus J_0 \quad \textit{при} \quad n = 4,$$

$$J^{\sqrt{5}} \oplus J^{\sqrt{2}} \oplus J^{\sqrt{2}} \oplus J_0 \oplus J_0 \oplus J_0 \quad \textit{при} \quad n = 6,$$

$$J^{\sqrt{5}} \oplus J^{\sqrt{3}} \oplus J^{\sqrt{3}} \oplus \underbrace{J_0 \oplus \ldots \oplus J_0}_{5} \quad \textit{при} \quad n = 8,$$

$$J^{\sqrt{5}} \oplus J^{2} \oplus J^{2} \oplus J^{\sqrt{2}} \oplus J^{\sqrt{2}} \oplus \underbrace{J_0 \oplus \ldots \oplus J_0}_{7} \quad \textit{при} \quad n = 12.$$

Доведення. Розглянемо випадок $n = 4$. Нехай $\{e_i^j\}$, $j = 0, 1, 2, 3$, $i \in \mathbb{N}$, — стандартний базис у просторі $l_2(V)$, V — множина вершин графа $C(4, \infty)$ із вказаною нумерацією вершин. Тоді оператор $\mathbb{A}_4$, що відповідає матриці суміжності графа $C(4, \infty)$, діє в стандартному базисі таким чином:

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_n x)_1^j &= x_1^{j-1} + x_1^{j+1} + x_2^j, \\ (\mathbb{A}_n x)_i^j &= x_{i-1}^j + x_{i+1}^j, \qquad i \geq 2, \quad j = 0, \ldots, 3. \end{aligned} \tag{25}$$

Розглянемо новий базис $\{\widehat{e}_i^j\}$, $j = 0, 1, 2, 3$, $i \in \mathbb{N}$, у просторі $l_2(V)$:

$$\widehat{e}_1^0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1^0 + e_1^2), & i = 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}[e_i^0 + e_i^2 + 2(e_{i-1}^1 + e_{i-1}^3)], & i \geq 2, \end{cases}$$

$$\widehat{e}_i^1 = \frac{1}{\sqrt{10}}[e_i^1 + e_i^3 - 2(e_{i+1}^0 + e_{i+1}^2)], \quad i \in \mathbb{N},$$
$$\widehat{e}_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^0 - e_i^2), \qquad \widehat{e}_i^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^1 - e_i^3), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Легко бачити, що у підпросторах H^j з базисом $\{\widehat{e}_i^j\}$, $j = 0,1,2,3,\ i \in \mathbb{N}$, оператор $\mathbb{A}_4$ діє як матриця Якобі $J^{\sqrt{5}}$ у підпросторі H^0 і як J_0 у підпросторах H^j, $j = 1,2,3$.

Таким чином, оператор $\mathfrak{U}$ у просторі $l_2(V)$, який переводить базис $\{e_i^j\}$, $j = 0,1,2,3,\ i \in \mathbb{N}$, у базис $\{\widehat{e}_i^j\}$, $j = 0,1,2,3,\ i \in \mathbb{N}$, є унітарним і задовольняє твердження теореми для графа $C(4,\infty)$.

Для випадків $n = 6,8,12$ доведення аналогічне. Наведемо явний вигляд нового базису лише у випадку $n = 6$:

$$\widehat{e}_i^0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1^0 + e_1^2 + e_1^4), & i = 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{15}}[e_i^0 + e_i^2 + e_i^4 + 2(e_{i-1}^1 + e_{i-1}^3 + e_{i-1}^5)], & i \geq 2, \end{cases}$$

$$\widehat{e}_i^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(e_1^1 - e_1^5 + e_1^0 - e_1^4), & i = 1, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}[e_{i-1}^1 - e_{i-1}^3 + e_{i-1}^2 - e_{i-1}^4 + e_i^0 + e_i^1 - e_i^4 - e_i^5], & i \geq 2, \end{cases}$$

$$\widehat{e}_i^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(e_1^1 - e_1^2 - e_1^3 + e_1^4), & i = 1, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}[e_{i-1}^0 - e_{i-1}^1 - e_{i-1}^4 + e_{i-1}^5 + e_i^1 - e_i^2 - e_i^3 + e_i^4], & i \geq 2, \end{cases}$$

$$\widehat{e}_i^3 = \frac{1}{\sqrt{15}}[e_i^1 + e_i^3 + e_i^5 - 2(e_{i+1}^0 + e_{i+1}^2 + e_{i+1}^4)], \quad i \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{e}_i^4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}[e_{i+1}^0 + e_{i+1}^1 - e_{i+1}^4 - e_{i+1}^5 - e_i^1 - e_i^2 + e_i^3 + e_i^4], \quad i \in \mathbb{N},$$

$$\widehat{e}_i^5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}[e_{i+1}^1 - e_{i+1}^2 - e_{i+1}^3 + e_{i+1}^4 - e_i^0 + e_i^1 + e_i^4 - e_i^5], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Легко бачити, що у підпросторах H^j з базисом $\{\widehat{e}_i^j\}$, $j = \overline{0,5},\ i \in \mathbb{N}$, оператор $\mathbb{A}_6$ діє як матриця Якобі $J^{\sqrt{5}}$ у підпросторі H^0, як $J^{\sqrt{2}}$ у підпросторах H^1, H^2 і як J_0 у підпросторах H^j, $j = 3,4,5$.

Таким чином, оператор $\mathfrak{U}$ у просторі $l_2(V)$, який переводить базис $\{e_i^j\}$, $j = \overline{0,5},\ i \in \mathbb{N}$, у базис $\{\widehat{e}_i^j\}$, $j = \overline{0,5},\ i \in \mathbb{N}$, є унітарним і задовольняє твердження теореми для графа $C(6,\infty)$.

Теорему доведено.

На основі теореми 7 робимо висновки. Спектральний аналіз циклічних графів $C(n,\infty)$ із нескінченними променями можна подати у явному вигляді. Зокрема, спектр графів $C(n,\infty)$ при $n = 4,6,8,12$ містить n-кратну абсолютно неперервну компоненту, що збігається з інтервалом

$[-2, 2]$, завжди два власних значення $\pm\frac{5}{2}$ та ще два власних значення $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$ кратності 2 при $n = 8$; два власних значення $\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$ кратності 2 при $n = 12$.

1. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов, теория и применение. – Киев: Наук. думка, 1984.
2. *Москалева Ю. П., Самойленко Ю. С.* Введение в спектральную теорию графов. – Киев: Центр учеб. лит., 2007. – 114 с.
3. *Brouwer A. E.* Spectra of graphs. – New York etc.: Springer, 2012.
4. *Mohar B.* The spectrum of an infinite graph // Linear Algebra and Appl. – 1982. – **48**. – P. 245 – 256.
5. *Mohar B., Woess W.* A survey on spectra of infinite graphs // Bull. London Math. Soc. – 1989. – **21**. – P. 209 – 234.
6. *Mantoiu M., Richard S., Tiedra de Aldecoa R.* Spectral analysis for adjacency operators on graphs // arXiv:math-ph/0603020v1 7 Mar 2006.
7. *von Below J.* An index theory for uniformly locally finite graphs // Linear Algebra and Appl. – 2009. – **431**. – P. 1 – 19.
8. *Покорный Ю. В.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах . – М.: Физматлит, 2004.
9. *Лебідь В. О., Нижник Л. П.* Спектральний аналіз зіркового графа з одним нескінченним променем // Наук. зап. НаУКМА. – 2013. – **139**. – С. 18 – 22.
10. *Лебідь В. О., Нижник Л. П.* Спектральний аналіз локально скінченних графів з одним нескінченним променем // Доп. НАН України. – 2014. – № 3. – С. 29 – 35.
11. *Simon B.* Szego's theorem and its descendants: spectral theory for L_2 perturbations of orthogonal polynomials. – Princeton; New York: Princeton Univ. Press, 2011. – xii + 650 p.
12. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.

Одержано 29.05.14