УДК 517.925.7

**А. А. Мохонько, А. З. Мохонько** (Нац. ун-т „Львов. политехника”)

# ТЕОРЕМА МАЛЬМКВИСТА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ

An analog of the Malmquist theorem on the growth of solutions of the differential equation $f' = P(z,f)/Q(z,f)$, where $P(z,f)$ and $Q(z,f)$ are polynomials in all variables, is proved for the case where the coefficients and solutions of this equation have a branching point in infinity (e.g., a logarithmic singularity).

Доведено аналог теореми Мальмквіста про ріст розв'язків диференціального рівняння $f' = P(z,f)/Q(z,f)$, в якому $P(z,f)$ і $Q(z,f)$ — многочлени за всіма змінними, для випадку, коли коефіцієнти рівняння та його розв'язки мають точку галуження (наприклад, логарифмічну особливу точку).

Обозначим через $A_b$ кольцо всех аналитических в $G = \big\{z\colon r_0 \leqslant |z| < +\infty\big\}$ функций, единственной особой точкой которых является $\infty$. Для функций $f \in A_b$ точка $\infty$ может быть либо логарифмической особой точкой, либо алгебраической точкой ветвления порядка $n-1$, если в $\infty$ соединяются $n$ ветвей функции $f$ (в частности, точкой ветвления нулевого порядка, если $f$ — однозначная голоморфная в $G$ функция). Кольцо $A_b$ целостное (без делителей нуля), поэтому его можно погрузить в поле [1, с. 53, 59]. Через $M_b$ обозначим наименьшее поле такое, что $A_b \subset M_b$. Для функции $f \in M_b$ удобно также использовать обозначение $f(z),\ z \in G$.

Если $f \in M_b$, то кроме точки ветвления в $\infty$ особыми точками функции $f$ могут быть только полюсы, изолированные на римановой поверхности аналитической функции $f(z),\ z \in G$.

Пусть $f \in M_b$. Далее, для определенности, считаем, что функция $f$ имеет в $\infty$ логарифмическую особую точку, так как для конечнозначных (однозначных) и бесконечнозначных функций определения и обозначения неванлинновских характеристик $T(r,f)$, $S_{\alpha,\beta}(r,f)$ существенно отличаются [2, с. 23, 37].

Выберем произвольные $\alpha,\ \beta,\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Через $f(z),\ z \in g_{\alpha\beta} = \big\{z = re^{i\theta}\colon \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ r_0 \leqslant r < +\infty\big\}$, обозначим однозначную ветвь функции $f \in M_b$ в угловой области $g_{\alpha,\beta}$ на римановой поверхности аналитической функции $f(z),\ z \in G$. (Более подробное определение однозначной ветви, а также определения арифметических операций над многозначными функциями см., например, в [3, с. 478].) Неванлинновские характеристики ветви $f(z),\ z \in g_{\alpha\beta}$, определяются следующим образом [2, с. 40] $(k = \pi/(\beta-\alpha),\ \ln^+ x = \max(\ln x, 0),\ x \geqslant 0)$ :

$$A_{\alpha\beta}(r,f) = \frac{k}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{1}{t^{k+1}} - \frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)\Big[\ln^+|f(te^{i\alpha})| + \ln^+|f(te^{i\beta})|\Big]\,dt,$$

$$B_{\alpha\beta}(r,f) = \frac{2k}{\pi r^k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^+\big|f(re^{i\theta})\big|\sin\big(k(\theta-\alpha)\big)d\theta, \qquad (1)$$

$$C_{\alpha\beta}(r,f) = 2k\int\limits_{r_0}^{r}c_{\alpha\beta}(t,f)\left(\frac{1}{t^{k+1}} + \frac{t^{k-1}}{r^{2k}}\right)dt,$$

где $c_{\alpha\beta}(t,f) = c_{\alpha\beta}(t,\infty,f) = \sum_{\substack{r_0<|\rho_n|\leqslant t\\ \alpha\leqslant\psi_n\leqslant\beta}} \sin\bigl(k(\psi_n-\alpha)\bigr)$, а $\rho_n e^{i\psi_n}$ — полюсы функции $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, рассматриваемые с учетом кратности,

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = A_{\alpha\beta}(r,f) + B_{\alpha\beta}(r,f) + C_{\alpha\beta}(r,f). \tag{2}$$

Символы Ландау $O(\ldots)$, $o(\ldots)$ в статье используются при $r\to+\infty$.

Напомним, что функция $f\in M_b$ имеет конечный порядок роста $\rho$, если

$$\rho = \sup_{\forall\alpha,\beta} \varlimsup_{r\to+\infty} \ln^+ S_{\alpha\beta}(r,f)/\ln r < +\infty, \quad -\infty<\alpha<\beta<+\infty. \tag{3}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f' = \frac{P(z,f)}{Q(z,f)} = \frac{\sum_{j=0}^{t} p_{j1}(z)f^j}{\sum_{j=0}^{s} p_{j2}(z)f^j}, \quad p_{jq}\in M_b. \tag{4}$$

Пусть $f(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, $p_{jq}(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, — однозначные ветви функций $f, p_{jq}\in M_b$ такие, что при подстановке $f(z)$, $p_{jq}(z)$, $z\in g_{\alpha\beta}$, в (4) вместо соответственно $f(z), p_{iq}(z)$ образуется тождество в $g_{\alpha\beta}$.

Основным результатом статьи является следующая теоерма.

**Теорема** *Пусть функция $f\in M_b$ конечного порядка — решение уравнения* (4). *Если* (4) *не является уравнением Риккати $f' = p_{21}f^2 + p_{11}f + p_{01}$, $p_{j1}\in M_b$, $j=0,1,2$, то*

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = O\Bigl(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\Bigr) + O(1) \quad \forall\alpha,\beta. \tag{5}$$

*Если, кроме того, $f$ имеет в $\infty$ изолированную точку ветвления, а уравнение* (4) *не является линейным уравнением $f' = p_{11}f + p_{01}$, $p_{j1}\in M_b$, $j=0,1$, то также выполняется* (5).

Пусть, в частности, в уравнении (4) все коэффициенты имеют вид

$$p_{jq}(z) = h_{jq}(z)z^{a_{jq}}(\ln z)^{b_{jq}}, \qquad h_{jq}(z) = c_{jq} + o(1), \qquad c_{jq}\in\mathbb{C}, \quad c_{t1}, c_{s2}\neq 0, \tag{6}$$

$a_{jq}, b_{jq}\in\mathbb{R}; p_{jq}\in M_b$. Например, $p_{jq}(z) = \sin\dfrac{1}{\sqrt{z}}\ln z \sim z^{-\frac12}\ln z$, $z\to\infty$. Известно (см. [4]), что в этом случае любое решение $f\in M_b$ уравнения (4) имеет конечный порядок роста. Поэтому из теоремы получаем такое следствие.

***Следствие*** *Пусть функция $f\in M_b$ является решением уравнения* (4), (6). *Если* (4) *не является уравнением Риккати, то выполняется соотношение* (5). *Если $f$ имеет в $\infty$ изолированную точку ветвления, а уравнение* (4) *не является линейным, то также выполняется соотношение* (5).

***Замечание*** Соотношение (5) означает, что из уравнений (4) только уравнения Риккати могут иметь решения $f\in M_b$ конечного порядка, скорость роста которых превышает скорость роста коэффициентов. Например, если все коэффициенты $p_{jq}$ уравнения (4) — рациональные функции (следовательно, $p_{jq}$ имеют вид (6), если $b_{jq}=0$), а уравнение (4) не является уравнением Риккати, то любое однозначное мероморфное решение уравнения (4) также является рациональной функцией (теорема Мальмквиста [5]). Действительно, любая трансцендентная функция растет быстрее любой рациональной функции [2, с. 49] ((6.26), (6.27)).

Неванлинновские характеристики имеют такие свойства [2, с. 41, 45]: если $f, g \in M_b$ и $f(z), g(z), z \in g_{\alpha\beta},$ — однозначные ветви этих функций в угловой области $g_{\alpha\beta}$, то

$$\begin{gathered} S_{\alpha\beta}(r, f+g) \leqslant S_{\alpha\beta}(r, f) + S_{\alpha\beta}(r, g) + \ln 2, \\ S_{\alpha\beta}(r, f\cdot g) \leqslant S_{\alpha\beta}(r, f) + S_{\alpha\beta}(r, g), \\ S_{\alpha\beta}(r, f^2) = 2S_{\alpha\beta}(r, f), \\ S_{\alpha\beta}(r, 1/f) = S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1). \end{gathered} \tag{7}$$

Справедлива следующая теорема [6]: *Пусть*

$$F = P(f)/Q(f) = \frac{\sum_{j=0}^{t} p_{j1} f^j}{\sum_{j=0}^{s} p_{j2} f^j}, \quad d = \max(t, s), \tag{8}$$

$f, p_{jq} \in M_b$; $p_{t1}, p_{s2} \neq 0$, *причем* $P(f), Q(f)$ *взаимно просты как многочлены от* $f$ *над полем* $M_b$. *Тогда*

$$S_{\alpha\beta}(r, F) = d\cdot S_{\alpha\beta}(r, f) + O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, p_{jq})\right) + O(1). \tag{9}$$

Нам понадобится следующая лемма [7].

**Лемма** *Если функция* $f$ *принадлежит* $M_b$ *и имеет конечный порядок роста, то для любой однозначной ветви* $f(z), z \in g_{\alpha\beta}$, *выполняется*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1). \tag{10}$$

***Доказательство теоремы.*** Выполним в (4) замену $f = u^{-1} + \kappa$, где $\kappa$ — такая константа, что $P(z,\kappa), Q(z,\kappa) \not\equiv 0$. Получим

$$u' = \frac{R(z,u)}{V(z,u)}, \tag{11}$$

где $R, V$ — многочлены относительно $u$ с коэффициентами $P_{jq}$, являющимися линейными комбинациями коэффициентов $p_{jq}$ уравнения (4). Степени $R, V$ относительно $u$ равны соответственно $t$ и $t-2$ (если $t-2 \geqslant s$) и $s+2$ и $s$ (если $t-2 < s$). Пусть, для определенности, $t-2 \geqslant s$. Тогда $\deg_u R/V = t$. Применяя к (11) формулу (9), получаем

$$S_{\alpha\beta}(r, u') = t\cdot S_{\alpha\beta}(r, u) + O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, P_{jq})\right) + O(1). \tag{12}$$

Поскольку коэффициенты $P_{jq}$ являются линейными комбинациями коэффициентов $p_{jq}$ уравнения (4), из (7) следует $S_{\alpha\beta}(r, P_{jq}) = O\Big(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r, p_{jq})\Big) + O(1)$. Отсюда с учетом (12) имеем

$$S_{\alpha\beta}(r,u') = t\cdot S_{\alpha\beta}(r,u) + O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1). \tag{13}$$

Каждому полюсу порядка $m$ функции $u(z), z\in g_{\alpha\beta}$, соответствует полюс порядка $m+1$ производной $u'(z), z\in g_{\alpha\beta}$. Поэтому $c_{\alpha\beta}(t,\infty,u')\leqslant 2c_{\alpha\beta}(t,\infty,u)$,

$$C_{\alpha\beta}(r,u')\leqslant 2C_{\alpha\beta}(r,u). \tag{14}$$

Учитывая свойства неванлинновских характеристик, имеем [2, с. 45]

$$A_{\alpha\beta}(r,u') + B_{\alpha\beta}(r,u') = A_{\alpha\beta}\left(r, u\frac{u'}{u}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, u\frac{u'}{u}\right)\leqslant$$

$$\leqslant A_{\alpha\beta}(r,u) + A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{u'}{u}\right) + B_{\alpha\beta}(r,u) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{u'}{u}\right). \tag{15}$$

По условию, функция $f\in M_b$ имеет конечный порядок роста. Согласно первой основной теореме теории распределения значений Неванлинны [2, с. 39],

$$S_{\alpha\beta}(r,f) = S_{\alpha\beta}(r,u^{-1}+\kappa) = S_{\alpha\beta}(r,u) + O(1). \tag{16}$$

Таким образом, функция $u = 1/(f-\kappa)$ также имеет конечный порядок. Для функций конечного порядка выполняется (10). Поэтому из (15) получаем

$$A_{\alpha\beta}(r,u') + B_{\alpha\beta}(r,u')\leqslant A_{\alpha\beta}(r,u) + B_{\alpha\beta}(r,u) + O(1). \tag{17}$$

Из определения характеристики $S_{\alpha\beta}(r,u)$ и из (14), (17) следует, что

$$S_{\alpha\beta}(t,u')\leqslant 2S_{\alpha\beta}(t,u) + O(1).$$

Отсюда, учитывая (13), имеем

$$2S_{\alpha\beta}(t,u)\geqslant t\cdot S_{\alpha\beta}(r,u) + O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1).$$

Таким образом, если $t>2$, то

$$(t-2)S_{\alpha\beta}(r,u) = O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1),$$

$$S_{\alpha\beta}(r,u) = O\left(\sum_{j,q} S_{\alpha\beta}(r,p_{jq})\right) + O(1).$$

Из этого соотношения и из (16) следует (5).

Пусть $t\leqslant 2$. По предположению $t-2\geqslant s$. Следовательно, $0\geqslant t-2\geqslant s\geqslant 0$, поэтому $s=0$, $t\leqslant 2$ и (4) — уравнение Риккати.

Было доказано, что если уравнение (4) не является уравнением Риккати, то выполняется (5). Пусть (4) является уравнением Риккати, т. е. либо имеет вид

$$f' = p_{21}(z)f^2 + p_{11}(z)f + p_{01}(z), \qquad p_{21}(z) \not\equiv 0, \quad z \in G, \tag{18}$$

либо является линейным уравнением $f' = p_{11}f + p_{01}$, $p_{j1} \in M_b$. Покажем, что если $f \in M_b$ с изолированной особой точкой в $\infty$ имеет конечный порядок роста и является решением уравнения (18), то выполняется соотношение (5). Применяя к (18) формулу (9), получаем

$$S_{\alpha\beta}(r, f') = 2S_{\alpha\beta}(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{2} S_{\alpha\beta}(r, p_{j1})\right) + O(1). \tag{19}$$

Функция $f \in M_b$ с изолированной особой точкой в $\infty$ не имеет полюсов, поэтому

$$C_{\alpha\beta}(r, u') = C_{\alpha\beta}(r, u) \equiv 0, \quad r \geqslant r_0.$$

Отсюда, учитывая (17) и определение характеристики $S_{\alpha\beta}(r, f)$, имеем

$$S_{\alpha\beta}(r, f') \leqslant S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1).$$

Из этого неравенства и из (19) следует

$$S_{\alpha\beta}(r, f) \geqslant 2S_{\alpha\beta}(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{2} S_{\alpha\beta}(r, p_{j1})\right) + O(1),$$

или $S_{\alpha\beta}(r, f) = O\Big(\sum_{j=0}^{2} S_{\alpha\beta}(r, p_{j1})\Big) + O(1)$.

Теорема доказана.

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. *Мохонько А. А.* Теорема Мальмквиста для решений дифференциальных уравнений в окрестности логарифмической особой точки // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 476 – 483.
4. *Mokhon'ko A. Z., Mokhon'ko V. D.* On order of growth of analytic solutions for algebraic differential equations having logarithmic singularity // Math. Stud. – 2000. – **13**, № 2. – P. 203 – 218.
5. *Malmquist J.* Sur les fonctions á un nombre fini de branches définies par les equations différentielles du premier order // Acta Math. – 1913. – **36**. – P. 297 – 343.
6. *Мохонько А. З.* Поле алгеброидных функций и оценки их неванлинновских характеристик // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 3. – С. 213 – 218.
7. *Мохонько А. А., Мохонько А. З.* Дефектные значения решений дифференциальных уравнений с точкой ветвления // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 7. – С. 939 – 957.
8. *Mokhon'ko A. A., Mokhon'ko A. Z.* On the logarithmic derivative of meromorphic functions // Top. Anal. and Appl. NATO Sci. Ser. II. – 2004. – **147**. – P. 91 – 103.

Получено 20.03.12,
после доработки — 19.11.13