УДК 517.968.22, 517.968.72

Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина (Тавр. нац. ун-т им. В. И. Вернадского, Симферополь)

ПОЛНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕРАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

We consider a Cauchy problem for the Volterra integrodifferential linear equations of the second order, which describe an evolution of dynamical systems with infinite number of degrees of freedom with regard for the relaxation effects.

Доведено теореми про розв'язність задач Коші для повних лінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра другого порядку у гільбертовому просторі. Для повного рівняння залежно від підпорядкованості операторних коефіцієнтів розглянуто три основних класи рівнянь.

1. Введение. В работе изучается в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задача Коши для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+(F+iG)\frac{du}{dt}+Bu+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_ku(s)ds = f(t), \qquad u(0)=u^0, \quad u'(0)=u^1. \quad (1.1)$$

Такие уравнения описывают, в частности, эволюцию динамических систем с бесконечным числом степеней свободы, причем учитываются эффекты релаксации.

Искомая функция $u=u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ задает поле смещений системы относительно состояния равновесия, а операторные коэффициенты в (1.1) имеют отчетливый физический смысл. Так, A является оператором кинетической энергии и потому $A=A^*>0$. Далее, B — оператор потенциальной энергии; если состояние равновесия системы статически устойчиво по линейному приближению, то $B=B^*\geqslant 0$. Оператор $F=F^*\geqslant 0$ учитывает диссипацию энергии, а оператор $G=G^*$ — действие кориолисовых (гироскопических) сил. Наконец, интегральные слагаемые учитывают явления релаксации.

В работе предполагается, что A — ограниченный оператор ($A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$), а коэффициенты F, G, B, C_k — неограниченные и, вообще говоря, некоммутирующие операторы, заданные на своих областях определения, плотных в $\mathcal{H}$. При этом считается, что эти операторы сравнимы по своим областям определения. Именно, выделяются такие классы уравнений, для которых один из операторов можно назвать главным; он имеет наиболее узкую область определения по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов.

Данная работа основана на подходах, изложенных в [1] и соответствующих случаю $A = I$, где I — единичный оператор. Отметим недавно вышедшую монографию [2], в которой изучаются задачи Коши для интегро-дифференциальных и функциональных уравнений, а также сопутствующие спектральные задачи в случае, когда один из коэффициентов является главным, а остальные — степени этого главного оператора.

Как известно, исследования линейных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого и второго порядков имеют обширную библиографию. Из последних публикаций отметим работы [3] (один операторный коэффициент и интегрирование от $-\infty$ до t), [4] (общие нелинейные проблемы для функций из $\mathbb{R}^n$), [5] (уравнения первого и второго порядков специального вида с $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}(\ldots)ds$), [6] (уравнение типа Гуртина – Пипкина, один операторный коэффициент), [7] (два сравнимых операторных коэффициента и интегрирование от $-\infty$ до t). Кроме того, во всех этих работах рассматривается вариант уравнений, разрешенных относительно старшей производной. В данной работе оператор A кинетической энергии, стоящий при второй производной, лишь положителен и может иметь неограниченный обратный оператор A^{-1}. Это обстоятельство налагает определенные требования на согласование областей определения, входящих в (1.1), операторных коэффициентов, которые, вообще говоря, не коммутируют, а лишь сравнимы по своим областям определения. Учитывая это, авторы данной статьи полагают, что и метод исследования, и результаты (достаточные условия существования сильного решения со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2})$), а также применение метода факторизации, позволяющее разделить уравнения на классы, являются новыми.

Отметим еще, что при доказательстве основных утверждений в данной работе используются следующие факты.

Теорема 1.1. *Пусть в интегральном уравнении Вольтерра второго рода*

$$u(t)-\int\limits_0^t V(t,s)u(s)ds=f(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.2}$$

выполнены следующие условия:

1) *заданная функция* $f(t)$ *непрерывна по* t *со значениями в банаховом пространстве* $\mathcal{E}$, *т. е.*

$$f(t)\in C([0,T];\mathcal{E});$$

2) *оператор-функция* $V(t,s)$, *заданная в треугольнике* $\Delta_T:=\{(t,s)\colon 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$, *сильно непрерывна по своим переменным и принимает значения из* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, *обозначение*

$$V(t,s)\in SC(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E})).$$

Тогда задача (1.2) *имеет единственное решение* $u(t)\in C([0,T];\mathcal{E})$, *и это решение может быть найдено методом последовательных приближений.*

Теорема 1.2 [1, с. 16 – 25]**.** *Пусть в задаче Коши для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка*

$$\frac{du}{dt}+Fu+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds=f(t),\quad u(0)=u^0, \tag{1.3}$$

выполнены следующие условия:

1) *оператор* $(-F)$ *является генератором* C_0*-полугруппы*;

2) $f(t)$ *удовлетворяет условию* $f(t)\in C^1([0,T];\mathcal{E})$;

3) $u^0\in\mathcal{D}(F)$;

4) $\mathcal{D}(C_k)\supset\mathcal{D}(F)$, $k=\overline{1,m}$;

5) $G_k(t,s)$, $\partial G_k(t,s)/\partial t\in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{E}))$, $k=\overline{1,m}.$

Тогда задача (1.3) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное решение, т. е. такую функцию* $u(t)$, *для которой все слагаемые в* (1.3) *являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{E})$ *и выполнено начальное условие* $u(0)=u^0$.

2. Полные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения второго порядка, неразрешенные относительно старшей производной. ***2.1. К постановке задачи.*** Рассмотрим задачу Коши (1.1) в предположениях п. 1, т. е. будем считать, что

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \qquad F = F^* \gg 0, \qquad B = B^* \gg 0, \qquad G = 0, \tag{2.1}$$

а ограничения на $G_k(t,s)$ и C_k сформулируем ниже. Уравнение вида (1.1) называют полным, поскольку его главная часть, не содержащая интегральных членов, состоит из слагаемых, зависящих не только от $u(t)$ и d^2u/dt^2, но и от du/dt.

Замечание **2.1.** Будем считать, что оператор A действует не в $\mathcal{H}$, а в шкале пространств $\mathcal{E}^\alpha$, построенной по оператору A^{-1} с первоначальной областью определения $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{H}$, тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}^0, \qquad \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{E}^1, \qquad \mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}, \tag{2.2}$$

причем $A^{-1/2} : \mathcal{E}^{\alpha/2} \to \mathcal{E}^{(\alpha-1)/2}$ — ограниченный оператор.

Определение 2.1. *Назовем сильным решением задачи Коши* (1.1) (*при* $G = 0$) *на отрезке* $[0,T]$ *такую функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, *для которой выполнены следующие условия*:

1) $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}B) := \mathcal{R}(B^{-1}A^{1/2}) \subset \mathcal{H}$;
2) $u'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(B^{1/2})) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;
3) $Au''(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;
4) *все слагаемые в уравнении* (1.1) *непрерывны по* t *и принадлежат пространству* $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;
5) *при любом* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (1.1);
6) *выполнены начальные условия* $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$.

Необходимыми условиями существования сильного решения задачи (1.1), (2.1) являются, как следует из определения 2.1, условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \qquad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \qquad f(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Наша цель — выяснить ограничения на операторы F, B, C_k и оператор-функции $G_k(t,s)$, $k = \overline{1,m}$, при которых имеет место утверждение о существовании сильного решения задачи (1.1) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$.

Будем считать, что задача (1.1) имеет сильное решение $u(t)$ в смысле определения 2.1, и осуществим переход от этой задачи к задаче Коши для системы двух интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Выполняя в (1.1) замену $A^{1/2}u =: v$ и применяя слева оператор $A^{-1/2}$ (это можно сделать для сильного решения), приходим к задаче

$$\begin{gathered}\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(s)ds = A^{-1/2}f(t), \\ v(0) = A^{1/2}u^0, \qquad v'(0) = A^{1/2}u^1.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь все слагаемые в уравнении являются элементами из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Введем далее новую искомую функцию:

$$-iB^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \qquad w(0) = 0. \tag{2.4}$$

В силу свойства 2 из определения 2.1 получаем, что $d^2w/dt^2 \in C([0,T];\mathcal{H})$, и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} + iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \qquad w'(0) = -iB^{1/2}A^{-1/2}v(0) = -iB^{1/2}u^0. \tag{2.5}$$

Введем здесь обозначения

$$\hat{G}_k(t,s){:=}A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2}, \quad \hat{C}_k{:=}A^{-1/2}C_kA^{-1/2}, \quad \hat{G}_k(t,s)\hat{C}_k{=}A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}, \tag{2.6}$$

$$\check{G}_k(t,s) := A^{-1/2}G_k(t,s), \quad \check{C}_k := C_kA^{-1/2}, \quad \check{G}_k(t,s)\check{C}_k = A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2} \tag{2.7}$$

и рассмотрим в дальнейшем два варианта, соответствующие случаям (2.6) и (2.7).

Из (2.3) – (2.7), а также с учетом соотношения $v(s) = \int_0^s v'(\xi)d\xi + v(0)$ приходим к выводу, что задача (1.1) равносильна задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}_0 z + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t \widetilde{V}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k z(\xi)d\xi = \widetilde{f}_0(t), \tag{2.8}$$

$$z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau, \tag{2.9}$$

$$z(t) = (z_1(t); z_2(t))^\tau := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \tag{2.10}$$

$$\widetilde{f}_0(t) := (A^{-1/2}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_ku^0ds; 0)^\tau, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{F}_0 := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := (\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2})) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}), \tag{2.13}$$

а операторы $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ в случае (2.6) заданы формулами

$$\widetilde{V}_k(t,\xi) := \mathrm{diag}(\hat{V}_k(t,\xi); 0), \qquad \hat{V}_k(t,\xi) := \int\limits_\xi^t \hat{G}_k(t,s)ds = \int\limits_\xi^t A^{-1/2}G_k(t,s)A^{1/2}ds, \tag{2.14}$$

$$\widetilde{C}_k := \mathrm{diag}(\hat{C}_k; 0), \qquad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\hat{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.15}$$

и формулами

$$\widetilde{V}_k(t,\xi) := \mathrm{diag}(\check{V}_k(t,\xi);0), \qquad \check{V}_k(t,\xi) := \int\limits_{\xi}^{t} \check{G}_k(t,s)ds = \int\limits_{\xi}^{t} A^{-1/2}G_k(t,s)ds, \tag{2.16}$$

$$\widetilde{C}_k := \mathrm{diag}(\check{C}_k;0), \qquad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\check{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k=\overline{1,m}, \tag{2.17}$$

в случае (2.7). (Здесь символом $(\cdot;\cdot)^\tau$ обозначена операция транспонирования, в данном случае вектор-строки.)

Дальнейшее изучение задачи (2.8) – (2.13) связано с уточнением взаимосвязей областей определения операторов $B^{1/2}A^{-1/2}$ и $A^{-1/2}FA^{-1/2}$. В данной работе будут рассмотрены следующие случаи:

1) малая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}); \tag{2.18}$$

2) средняя интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}); \tag{2.19}$$

3) большая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}). \tag{2.20}$$

Каждому из этих вариантов посвящен отдельный подпункт данного пункта.

Замечание 2.2. Правое включение в (2.20) очевидно, а для доказательства правого включения в (2.19) используется известное неравенство Гайнца (см., например, [8, с. 254]) и полярное представление неограниченного оператора (см. [9, с. 280 – 285]).

В самом деле, операторы $\widetilde{B} := A^{-1/2}BA^{-1/2}$ и $\widetilde{F} := A^{-1/2}FA^{-1/2}$, заданные на областях определения

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}), \qquad \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}F^{-1}A^{1/2}),$$

являются самосопряженными и положительно определенными, причем в силу (2.19) $\mathcal{D}(\widetilde{B}) \subset$ $\subset \mathcal{D}(\widetilde{F})$, откуда по неравенству Гайнца следует, что

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{F}^{1/2}).$$

Отсюда, с использованием полярных представлений для этих операторов, т. е. формул

$$\widetilde{B}^{1/2} = U_B B^{1/2}A^{-1/2}, \qquad \widetilde{F}^{1/2} = U_F F^{1/2}A^{-1/2},$$

где U_B и U_F — унитарные операторы, приходим к выводу, что

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}^{1/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}), \qquad \mathcal{D}(\widetilde{F}^{1/2}) = \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}),$$

и правое включение в (2.19) доказано.

2.2. Случай малой интенсивности внутренней диссипации. При условии (2.18) операторная матрица $\mathcal{F}_0$ из (2.12) корректно задана на области определения (см. (2.13))

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}B^{-1/2}) \oplus \mathcal{R}(B^{-1/2}A^{1/2}). \tag{2.21}$$

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие* (2.18). *Тогда оператор* $\mathcal{F}_0$, *заданный на области определения* (2.21), *является неограниченным максимальным аккретивным оператором*:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{F}_0 z, z)_{\mathcal{H}^2} = (A^{-1/2}FA^{-1/2}z_1, z_1)_{\mathcal{H}} = \left\|F^{1/2}A^{-1/2}z_1\right\|^2_{\mathcal{H}} \geqslant 0$$

$$\forall z(t) = (z_1(t); z_2(t))^{\tau} \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_0). \tag{2.22}$$

Он допускает факторизацию вида

$$\mathcal{F}_0 = \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= i\begin{pmatrix} I & -iA^{-1/2}FB^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2}B^{1/2} \\ B^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

где $A^{-1/2}FB^{-1/2} = (A^{-1/2}FA^{-1/2})(B^{1/2}A^{-1/2})^*$ — *ограниченный оператор, действующий в* $\mathcal{H}$ (*см.* (2.18)).

Следствие. *Оператор* $(-\mathcal{F}_0)$ *является генератором сжимающей* C_0*-полугруппы.*

Опираясь на установленные факты, применим к задаче (2.8) – (2.12), (2.21) теорему 1.2. По этой теореме получаем, что если выполнены условия:

1) $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{F}_0)$, $k = \overline{1,m}$,
2) $\widetilde{V}_k(t,s)$, $\partial\widetilde{V}_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2))$,
3) $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_0)$,
4) $\widetilde{f}_0(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2)$,

то задача (2.8) – (2.12), (2.21) имеет единственное сильное решение $z(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Будем считать сначала, что операторы $\widetilde{C}_k$ и оператор-функции $\widetilde{V}_k(t,s)$ заданы формулами (2.14), (2.15), (2.6), и установим условия, обеспечивающие выполнение свойств 1 – 4.

Условие 1 выполняется, если

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.24}$$

Далее, требования 2 выполняются, если имеют место условия

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.25}$$

Легко проверить также, что требование 3 равносильно условиям

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \qquad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}). \tag{2.26}$$

Наконец, можно убедиться, что условие 4 выполнено, если

$$f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{2.27}$$

Теорема 2.1. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* (2.1), *а также условия* (2.24) – (2.27). *Тогда эта задача имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$.

Аналогичным образом рассматривается вариант, когда операторы $\widetilde{C}_k$ и оператор-функции $\widetilde{V}_k(t,s)$ заданы формулами (2.16), (2.17), (2.7). Здесь вместо (2.24), (2.25) появляются условия

$$\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}, \tag{2.28}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{2.29}$$

Не повторяя выкладки, аналогичные выводу формул (2.24) – (2.27), сформулируем следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* (2.1), *а также условия* (2.26) – (2.29). *Тогда эта задача имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})=\mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$.

2.3. Случай большой интенсивности внутренней диссипации. Будем теперь считать, что в задаче (2.8) – (2.13) выполнены условия (2.20), т. е. рассмотрим случай большой интенсивности внутренней диссипации. Здесь операторная матрица $\mathcal{F}_0$ снова определяется формулой (2.12), однако теперь

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0)=\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})\oplus\mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}).$$

Для исследования задачи в этом варианте полезно выполнить замену искомой функции:

$$z(t)=e^{\alpha t}y(t), \quad \alpha>0. \tag{2.30}$$

Тогда для функции $y(t)$ получим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt}+\mathcal{F}_\alpha y+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi)d\xi=\widetilde{f}_\alpha(t), \tag{2.31}$$

$$y(0)=z(0)=(A^{1/2}u^1;-B^{1/2}u^0)^\tau, \tag{2.32}$$

$$\mathcal{F}_\alpha:=\mathcal{F}_0+\alpha\mathcal{I}=\mathcal{F}_{\alpha,1}+\mathrm{diag}(\alpha I;0), \qquad \mathcal{F}_{\alpha,1}:=\begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & \alpha I\end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)=\mathcal{D}(\mathcal{F}_0)=\mathcal{D}(\mathcal{F}_{\alpha,1})=\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})\oplus\mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}), \tag{2.34}$$

$$\widetilde{f}_\alpha(t):=e^{-\alpha t}\widetilde{f}_0(t), \qquad \widetilde{W}_k(t,\xi):=e^{-\alpha(t-\xi)}\widetilde{V}_k(t,\xi), \tag{2.35}$$

в которой функция $\widetilde{f}_0(t)$ задана формулой (2.11), а $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ заданы формулами (2.14), (2.15) в обозначениях (2.6) и формулами (2.16), (2.17) в обозначениях (2.7).

Лемма 2.2. *Оператор* $\mathcal{F}_\alpha$ *из* (2.33), (2.34) *является равномерно аккретивным на* $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)$, *т. е.*

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}_\alpha y,y)_{\mathcal{H}^2}\geqslant\alpha\|y\|^2_{\mathcal{H}^2} \quad \forall y\in\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha), \quad \alpha>0. \tag{2.36}$$

Доказательство. Этот факт непосредственно следует из (2.1) и определения (2.33) оператора $\mathcal{F}_\alpha$.

Введем теперь в рассмотрение следующие вспомогательные операторы:

$$V:=B^{1/2}F^{-1/2}, \qquad V^+:=F^{-1/2}B^{1/2}, \qquad \mathcal{D}(V^+):=\mathcal{D}(B^{1/2}).$$

Лемма 2.3. *Операторы V и V^+ имеют следующие свойства*:

$$V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \qquad V^+ = V^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}, \qquad \overline{V^+} = V^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \tag{2.37}$$

Доказательство. Оператор

$$V = B^{1/2}F^{-1/2} = (B^{1/2}A^{-1/2})(F^{1/2}A^{-1/2})^{-1}$$

ограничен и потому задан на всем $\mathcal{H}$ (см. замечание 2.2). Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(B^{1/2})$, $v \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(V^+u, v)_{\mathcal{H}} = (F^{-1/2}B^{1/2}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, B^{1/2}F^{-1/2}v)_{\mathcal{H}} = (u, Vv)_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда следует второе свойство (2.37), причем V^+ и V^* совпадают на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}(B^{1/2})$. Значит, замыкание по непрерывности оператора V^+ с $\mathcal{D}(B^{1/2})$ на все $\mathcal{H}$ совпадает с V^*.

Следствием лемм 2.2 и 2.3 является такое утверждение.

Теорема 2.3. *Операторная матрица $\mathcal{F}_\alpha$ из* (2.33), *заданная на области определения* (2.34), *допускает следующие представления*:

1) *в форме Шура – Фробениуса,*

$$\mathcal{F}_\alpha = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iVF^{-1/2}A^{1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^+ + \alpha I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} I & iA^{1/2}F^{-1/2}V^+ \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.38}$$

2) *с симметричными крайними множителями*

$$\mathcal{F}_\alpha = \begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iV^+ \\ iV & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Оператор $\mathcal{F}_\alpha$ допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора

$$\mathcal{F} := \overline{\mathcal{F}}_\alpha = \overline{\mathcal{F}}_1 + \mathrm{diag}(\alpha I; 0),$$

который представи́м в двух формах:

1) *в форме Шура – Фробениуса*

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iVF^{-1/2}A^{1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^* + \alpha I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} I & iA^{1/2}F^{-1/2}V^* \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.40}$$

2) *с симметричными крайними множителями,*

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iV^* \\ iV & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{1/2}A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Оператор $\mathcal{F}$ задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \big\{ y = (y_1; y_2)^\tau : y_1 \in \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}),\ F^{1/2}A^{-1/2}y_1 + iV^* y_2 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F^{1/2}) \big\} \tag{2.42}$$

и действует по закону

$$\mathcal{F}y = \begin{pmatrix} A^{-1/2}F^{1/2}(F^{1/2}A^{-1/2}y_1 + iV^*y_2) + \alpha y_1 \\ iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix}, \qquad y \in \mathcal{D}(\mathcal{F}). \tag{2.43}$$

Доказательство. Формулы (2.38), (2.39) проверяются непосредственно на элементах из $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)$. В формуле (2.38) второй и третий сомножители (в первом слагаемом справа) допускают замыкание путем замены V^+ на $V^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. После этого возникает оператор $\mathcal{F}$ из (2.40), первое слагаемое в котором является произведением замкнутых операторов, каждый из которых имеет ограниченный обратный, а второе слагаемое, очевидно, ограниченный оператор. Поэтому оператор $\mathcal{F}$ из (2.40) будет иметь в качестве области значений все пространство $\mathcal{H}^2$, т. е. будет максимальным равномерно аккретивным оператором, и для него сохраняется свойство (2.36) (см., например, [10, с. 109]).

Аналогичным образом устанавливаем, что оператор $\mathcal{F}$ из (2.41) также является максимальным равномерно аккретивным оператором. Заметим, наконец, что закон (2.43) действия оператора $\mathcal{F}$ следует как из представления (2.40), так и из (2.41), и проверяется непосредственно.

Опираясь на установленные свойства оператора $\mathcal{F}$, рассмотрим наряду с (2.31), (2.32) задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}y + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi)d\xi = \widetilde{f}_\alpha(t), \tag{2.44}$$

$$y(0) = \big(A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0\big)^\tau. \tag{2.45}$$

Поскольку $\mathcal{F}$ — максимальный равномерно аккретивный оператор, оператор $(-\mathcal{F})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Поэтому согласно теореме 1.2 задача (2.44), (2.45) имеет единственное сильное решение $y(t)$ на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия (в варианте (2.6), (2.14), (2.15)):

$$\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.46}$$

$$\widetilde{W}_k(t,\xi),\ \partial\widetilde{W}_k(t,\xi)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)), \tag{2.47}$$

$$y(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F}), \qquad \widetilde{f}_\alpha(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2). \tag{2.48}$$

Эти факты позволяют установить достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (2.1) в случае большой интенсивности диссипации энергии.

Теорема 2.4. *Пусть в задаче* (1.1), (2.1) *выполнены условия* (2.20) *и*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \qquad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{2.49}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.50}$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.51}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Доказательство. 1. Нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.49) – (2.51) имеют место свойства (2.46) – (2.48).

2. Дальнейшее доказательство данной теоремы проходит по следующей схеме. Обе задачи (2.44), (2.45), и (2.31), (2.32) допускают представление в виде задачи Коши для системы двух уравнений. Выясняется, что каждая из этих систем, а значит каждая из задач (2.44), (2.45) и (2.31), (2.32), в условиях теоремы имеет единственное сильное решение.

3. Последовательным обратным переходом от задачи (2.31), (2.32) к исходной задаче (1.1), (2.1) завершается доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $\widetilde{W}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ в (2.31) заданы формулами (2.35), (2.16), (2.17), (2.7), и приведем результат, аналогичный теореме 2.4, без доказательства.

Теорема 2.5. *Пусть в задаче* (1.1), (2.1) *выполнены условия* (2.20), (2.49), *а также*

$$\mathcal{D}(C_k A^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(F^{1/2}A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m},$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}.$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

2.4. Случай средней интенсивности внутренней диссипации энергии. Рассмотрим, наконец, вариант, когда в задаче (2.8) – (2.13) выполнены условия (2.19), т. е.

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}) \subset (F^{1/2}A^{-1/2}). \tag{2.52}$$

В этом случае в задаче Коши (2.31) – (2.35) оператор $\mathcal{F}_\alpha$ из (2.33) снова определен на $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha)$ из (2.34), однако имеет свойства, отличные от свойств операторов $\mathcal{F}_\alpha$ и $\overline{\mathcal{F}}_\alpha = \mathcal{F}$, полученных в пп. 2.3. При этом, по-прежнему, справедлива лемма 2.2, а вместо леммы 2.3 справедливо утверждение, которое сейчас будет сформулировано.

Введем в рассмотрение вспомогательные операторы

$$Q := B^{1/2}F^{-1}A^{1/2}, \qquad Q^+ := A^{1/2}F^{-1}B^{1/2}, \qquad \mathcal{D}(Q^+) := \mathcal{D}(B^{1/2}), \tag{2.53}$$

$$V := B^{1/2}F^{-1/2}, \qquad V^{-1} := F^{1/2}B^{-1/2}, \qquad \mathcal{D}(V) := \mathcal{R}(V^{-1}), \qquad \mathcal{R}(V) := \mathcal{D}(V^{-1}) = \mathcal{H},$$
$$V^+ := F^{-1/2}B^{1/2}, \quad (V^+)^{-1} = B^{-1/2}F^{1/2}, \quad \mathcal{D}(V^+) := \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad \mathcal{D}(V^+)^{-1} := \mathcal{D}(F^{1/2}). \tag{2.54}$$

Лемма 2.4. *Операторы* Q, Q^+, V *и* V^+ *имеют следующие свойства*:

$$Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \qquad Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(B^{1/2})}, \qquad \overline{Q^+} = Q^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

$$V^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \qquad (V^+)^{-1} = (V^{-1})^*|_{\mathcal{D}(F^{1/2})}, \qquad \overline{(V^+)^{-1}} = (V^*)^{-1} = (V^{-1})^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.3.

Из леммы 2.4 следует, что оператор $V := (V^{-1})^{-1}$ является, вообще говоря, неограниченным оператором, заданным на области определения $\mathcal{D}(V) := \mathcal{R}(V^{-1})$; соответственно V^* также, вообще говоря, неограничен и $\mathcal{D}(V^*) = \mathcal{R}((V^*)^{-1}) = \mathcal{R}((V^{-1})^*)$. При этом $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(V^*) = \mathcal{H}$.

Теорема 2.6. *Операторная матрица* $\mathcal{F}_\alpha$ *из* (2.33), (2.34) *в предположениях* (2.52) *допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{F}_\alpha = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^+ + \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iQ^+ \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где Q, Q^+, V *и* V^+ — *операторы, введенные формулами* (2.53), (2.54) *и имеющие свойства, описанные в лемме* 2.4.

Оператор $\mathcal{F}_\alpha$ *допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора* $\mathcal{F}$, *который представим в виде*

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}_\alpha = \begin{pmatrix} I & 0 \\ iQ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & 0 \\ 0 & VV^* + \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & iQ^* \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Он задан на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \left\{ y = (y_1; y_2)^\tau \in \mathcal{H}^2 : y_1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}),\ y_1 + iQ^* y_2 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \right\}$$

и действует по закону

$$\mathcal{F}y = \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2}(y_1 + iQ^* y_2) + \alpha y_1 \\ iB^{1/2}A^{-1/2}y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3.

Рассмотрим теперь, опираясь на свойства оператора $\mathcal{F}$, задачу Коши, обобщающую задачу (2.31), (2.32) в варианте (2.14), (2.15), (2.6), следующего вида:

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}y + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi)d\xi = \widetilde{f}_\alpha(t), \tag{2.55}$$

$$y(0) = \left(A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0\right)^\tau.$$

Так как здесь, согласно теореме 2.6, оператор $(-\mathcal{F})$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы, то эта задача, согласно теореме 1.2, имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) \supset \mathcal{D}(\mathcal{F})$, $k = \overline{1,m}$;
2) $\widetilde{W}_k(t,\xi)$, $\partial\widetilde{W}_k(t,\xi)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}^2))$;
3) $y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$;
4) $\widetilde{f}_\alpha(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}^2)$.

Свяжем с (2.55) задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в пространстве $\mathcal{H}$. Именно, назовем задачу Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + FA^{-1/2}\left(A^{1/2}\frac{du}{dt} + Q^*B^{1/2}u\right) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)ds = f(t), \tag{2.56}$$

$$u(0) = u^0, \qquad u'(0) = u^1,$$

задачей, ассоциированной с исходной задачей (1.1) в предположениях (2.1).

Определение 2.2. *Сильным решением ассоциированной задачи* (2.56) *на отрезке* $[0,T]$ *назовем функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})\subset\mathcal{H}$, *для которой выполнены следующие условия*:

1) $u(t)\in\mathcal{D}(B^{1/2})$ *и* $B^{1/2}u(t)\in C([0,T];\mathcal{H})$;

2) $A^{1/2}du/dt+Q^*B^{1/2}u\in\mathcal{D}(FA^{-1/2})$ *и* $FA^{-1/2}(A^{1/2}(du/dt)+Q^*B^{1/2}u(t))\in$ $\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

3) $Au(t)\in C^2([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4) *для любого* $t\in[0,T]$ *выполнены уравнение* (2.56), *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$, *и начальные условия.*

Оправданием для введения термина „ассоциированная” является следующий факт.

Лемма 2.5. *Если сильное решение* $u(t)$ *ассоциированной задачи* (2.56) *имеет дополнительные свойства гладкости*

$$u(t)\in\mathcal{D}(B),\qquad Bu(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})),\tag{2.57}$$

то оно является сильным решением задачи (1.1), (2.1) *в смысле определения* 2.1, *т. е. на отрезке* $[0,T]$ *и со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Доказательство. Действительно, если выполнены свойства (2.57), то

$$Q^*B^{1/2}u(t)=Q^+B^{1/2}u(t)=A^{1/2}F^{-1}Bu(t)\in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})).$$

Поэтому в (2.56) можно раскрыть скобки во втором слагаемом слева:

$$FA^{-1/2}\left(A^{1/2}\frac{du}{dt}+A^{1/2}F^{-1}Bu(t)\right)=F\frac{du}{dt}+Bu,$$

при этом здесь каждое слагаемое является элементом из $C\big([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})\big)$.

Таким образом, задача (2.56) является обобщением задачи (1.1), (2.1) на случай, когда не имеют место свойства (2.57).

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия*

$$u^0\in\mathcal{D}(A^{-1/2}B),\qquad u^1\in\mathcal{D}(A^{-1/2}F),\qquad f(t)\in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})),$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2})\supset\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}),\quad k=\overline{1,m},$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t\in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))),\quad k=\overline{1,m}.$$

Тогда ассоциированная задача (2.56) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное* (*в смысле определения* 2.2) *решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.

Приведем, наконец, без доказательства утверждение о разрешимости задачи (2.56) в варианте (2.7), (2.16), (2.17), (2.35).

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия*

$$u^0\in\mathcal{D}(A^{-1/2}B),\qquad u^1\in\mathcal{D}(A^{-1/2}F),\qquad f(t)\in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})),$$

$$\mathcal{D}(C_kA^{-1/2})\supset\mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2}),\quad k=\overline{1,m},$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}.$$

Тогда ассоциированная задача (2.56) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное* (*в смысле определения* 2.2) *решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

***Замечание* 2.3.** Требование $f(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$ в теоремах 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 2.7, 2.8 можно ослабить, заменив его условием

$$A^{-1/2} f(t) \in W_p^1([0,T]; \mathcal{H}), \quad p > 1,$$

$$\|f(t)\|_{W_p^1([0,T];\mathcal{H})} := \sum_{k=0}^{1} \left(\int_0^T \|f^{(k)}(t)\|_{\mathcal{H}}^p dt \right)^{1/p}.$$

Действительно, как показал С. Я. Якубов в [11], при $f(t) \in W_p^1([0,T]; \mathcal{H})$ задача Коши (1.3) для дифференциального (а не интегро-дифференциального) уравнения имеет сильное решение $u_0(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$. Именно это свойство использовано при доказательстве упомянутых теорем.

1. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: Специальный курс лекций. – Симферополь: ФЛП „Бондаренко О. А.", 2012. – 152 с.
2. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ // Совр. пробл. математики и механики. Математика. – 2011. – **8**, вып. 1. – С. 8 – 306.
3. *Poblete V.* Solutions of second-order integro-differential equations on periodic besov spaces // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2007. – **50**. – P. 477 – 492.
4. *Alikhani R., Bahrami F., Jabbari A.* Existence of global solutions to nonlinear fuzzy Volterra integro-differential equations // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. – 2012. – **75**. – P. 1810 – 1821.
5. *Trostorff S.* On integro-differential inclusions with operator-valued kernels // Math. Meth. Appl. Sci. / doi: 10.1002/mma.3111 – 2014.
6. *Vlasov V., Rautian N.* Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2014. – **236**. – P. 517 – 535.
7. *Diagana T.* Existence results for some damped second-order Volterra integro-differential equations // Appl. Math. and Comput. – 2014. – **237**. – P. 304 – 317.
8. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ (справочное пособие группы авторов под общей редакцией С. Г. Крейна). – М.: Наука, 1972. – 544 с.
9. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Уч. пос., 2-е изд. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 464 с.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
11. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.

Получено 07.09.13,
после доработки — 08.08.14