УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Абхаз. гос. ун-т, Сухум)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ ЛИНЕЙНЫМИ МЕТОДАМИ

We study some problems of approximation of the functions by linear methods of summation of their Fourier – Laplace series.

Досліджуються деякі питання наближення функцій лінійними методами підсумовування їх рядів Фур'є – Лапласа.

1. Некоторые сведения из гармонического анализа. Пусть

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \colon \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 = 1 \right\}, \quad m \geq 3,$$

— единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, dx — инвариантная относительно группы вращений $SO(m)$, нормированная единицей мера Хаара на S^{m-1}, $L_p(S^{m-1})$, $1 \leq p < \infty$, — пространство суммируемых в p-й степени на S^{m-1} функций $f(x)$, где норма задана равенством

$$\|f\|_{L_p(S^{m-1})} = \left(\int\limits_{S^{m-1}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$L_\infty(S^{m-1})$ — пространство измеримых существенно ограниченных на S^{m-1} функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(S^{m-1})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in S^{m-1}} |f(x)|,$$

$C(S^{m-1})$ — пространство непрерывных функций $f(x)$ на сфере S^{m-1}, в котором норма задается равенством

$$\|f\|_{C(S^{m-1})} = \max_{x \in S^{m-1}} |f(x)|.$$

Функцию $x^\alpha \overset{\text{df}}{=} \sum_{\nu=1}^{m} x_\nu^{\alpha_\nu}$, $\alpha_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu = k$, называют алгебраическим мономом порядка k от m переменных. Линейная комбинация мономов k-го порядка называется однородным полиномом k-го порядка. Если однородный полином k-го порядка $P_k(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta P_k(x) = 0,$$

то он называется m-мерным гармоническим однородным полиномом k-го порядка. Пространство $L_2(S^{m-1})$ разлагается в прямую ортогональную сумму конечномерных и неприводимых относительно группы $SO(m)$ подпространств H_k:

$$L_2(S^{m-1}) = \oplus \sum_{k=0}^{\infty} H_k.$$

Каждое пространство H_k состоит из сужений на сферу S^{m-1} однородных гармонических полиномов степени k от переменных $x_1, \ldots, x_m$ и является собственным подпространством оператора Δ_0 Лапласа – Бельтрами на сфере S^{m-1}, соответствующим собственному значению $\delta_k = -k(k+m-2)$. Элементы подпространства H_k называются сферическими гармониками степени k. Каждое подпространство содержит единственную зональную сферическую гармонику $z_k(x)$, вещественнозначную, зависящую только от $\theta = d\left(x, x^0\right)$ — сферического расстояния между точкой $x \in S^{m-1}$ и точкой $x^0 = (0, \ldots, 0, 1)$, такую, что для любой сферической гармоники $Y \in H_k$ ее значение в точке $x = \sigma x^0$, $\sigma \in SO(m)$, определяется с помощью равенства

$$Y(x) = Y\left(\sigma x^0\right) = \int\limits_{S^{m-1}} Y\left(x'\right) z_k\left(\sigma^{-1} x'\right) dx'.$$

Норма зональных сферических гармоник $z_k(x)$ в пространстве $L_2(S^{m-1})$ при $k \geq 2$ такова:

$$\|z_k(x)\|_{L_2(S^{m-1})} = \sqrt{\dim H_k} = \sqrt{\begin{pmatrix} m+k-1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m+k-3 \\ k-2 \end{pmatrix}} \asymp k^{\frac{m-2}{2}}.$$

Зональные сферические гармоники выражаются через полиномы Гегенбауэра $P_k^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(t)$ следующим образом:

$$z_k(x) = \tilde{z}_k(\theta) = \frac{2k+m-2}{m-2} P_k^{\left(\frac{m-2}{2}\right)}(\cos\theta).$$

Для зональной функции $g(x) = \tilde{g}(\theta) \in L(S^{m-1}) = L_1(S^{m-1})$ и функции $f \in L(S^{m-1})$ определяется свертка $[f * g](x)$ по формуле

$$[f * g](x) = [f * g]\left(\sigma x^0\right) = \int\limits_{S^{m-1}} f\left(x'\right) g\left(\sigma^{-1} x'\right) dx'.$$

При этом выполняется неравенство Юнга

$$\|f * g\|_{L_s(S^{m-1})} \leq \|f\|_{L_p(S^{m-1})} \|g\|_{L_q(S^{m-1})}, \tag{1}$$

где $1 \leq p, s, q \leq \infty$, $1/s = 1/q + 1/p - 1$.

Оператор ортогонального проектирования $Y_k^{(\lambda)} : L^2(S^{m-1}) \to H_k$ задается формулой

$$Y_k^{(\lambda)}(f; x) = [f * z_k](x). \tag{2}$$

Относительно приведенных выше элементов гармонического анализа на сфере S^{m-1} см. [1, 2].

2. Необходимые определения и постановка задачи. Пусть $\psi = \psi(k) = \psi(k, m)$, $k \in \mathbb{N}$, — произвольная функция натурального аргумента при каждом фиксированном m и

$$S^{(\lambda)}[f] = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}(f; x), \quad \lambda = \frac{m-2}{2}, \tag{3}$$

— ряд Фурье – Лапласа функции $f \in L(S^{m-1})$.

Если ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) Y_k^{(\lambda)}(f; x), \quad A_0 \equiv \mathrm{const},$$

является рядом Фурье – Лапласа некоторой функции $F \in L(S^{m-1})$, то по аналогии с 2π-периодическим случаем (см., например, [3]) функцию $F(x)$ назовем ψ-интегралом функции $f(x)\colon F = I^{\Psi} f$. Множество ψ-интегралов функций $f \in L(S^{m-1})$ обозначим $L^{\psi}(S^{m-1})$. Если $\mathfrak{N} \subset L(S^{m-1})$, то $L^{\psi}\mathfrak{N}$ будет обозначать множество $\bar{\psi}$-интегралов функций $f \in \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\psi(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} Y_k^{(\lambda)}(f;x)$$

является рядом Фурье – Лапласа некоторой функции $\varphi \in L(S^{m-1})$. Функция $\varphi(x)$ называется ψ-производной функции $f(x)\colon \varphi(x) = D^{\psi}(f;x) = f^{\psi}(x)$. Таким образом,

$$S^{(\lambda)}[f^{\psi}] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} Y_k^{(\lambda)}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}\big(f^{\psi};x\big).$$

Подмножество функций $f \in L(S^{m-1})$, имеющих ψ-производные, обозначим через $\bar{L}^{\psi}(S^{m-1})$. Если $f \in \bar{L}^{\psi}(S^{m-1})$ и $f^{\psi} \in \mathfrak{N}$, пишем $f \in \bar{L}^{\psi}\mathfrak{N}$.

Связь между ψ-интегралами и ψ-производными устанавливается в следующем утверждении.

Предложение 1. *Если функция f принадлежит $L(S^{m-1})$, ряд* (3) — *ее ряд Фурье – Лапласа и $\psi(k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то $I^{\psi}(f;x)$ имеет ψ-производную и $D^{\psi}\big(I^{\psi}(f;x)\big) = f(x) - C_0$, $C_0 = Y_0^{(\lambda)}(f;x) = \mathrm{const}$.*

Если f принадлежит $L^{\psi}(S^{m-1})$, ряд (3) — *ее ряд Фурье – Лапласа, то функция $D^{\psi}(f;x)$ имеет ψ-интеграл и при этом $I^{\psi}\big(D^{\psi}(f;x)\big) = f(x) + A_0$, $A_0 \equiv \mathrm{const}$, $\bar{L}^{\psi}(S^{m-1}) = L^{\psi}(S^{m-1})$.*

Доказательство следует непосредственно из определений ψ-интеграла и ψ-производной функции $f \in L(S^{m-1})$.

Предположим, далее, что функция $\psi = \psi(k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ такова, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) z_k(x) \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой зональной функции

$$g_{\psi} = \tilde{g}_{\psi}(\theta) \in L(S^{m-1}).$$

Известно (см., например, [4]), что если $\psi(k) = \psi(k,m) = (k(k+m-2))^{-\frac{r}{2}}$, $r > 0$, то существует зональная функция $g_r(x) = \tilde{g}_r(\theta) \in L(S^{m-1})$ такая, что ряд (4) является ее рядом Фурье.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Если ряд* (4) *является рядом Фурье функции $g_{\psi} \in L(S^{m-1})$, то функция f принадлежит $L^{\psi}(S^{m-1})$ тогда и только тогда, когда почти всюду на S^{m-1} выполняется равенство*

$$f(x) = C_0 + \big[f^{\psi} * g_{\psi}\big](x), \qquad C_0 = Y_0^{(\lambda)}(f;x) = \mathrm{const}. \tag{5}$$

Доказательство. Если f принадлежит $L^{\psi}(S^{m-1})$, то

$$Y_k^{(\lambda)}(f;x) = \psi(k)Y_k^{(\lambda)}\big(f^{\psi};x\big), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Используя формулы (2), (6) и ассоциативность свертки, находим

$$S^{(\lambda)}[f^{\psi} * g_{\psi}] = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}\left([f^{\psi} * g_{\psi}];x\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big[[f^{\psi} * g_{\psi}] * z_k\Big](x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[f^{\psi} * [g_{\psi} * z_k]\Big](x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\Big[f^{\psi} * Y_k^{(\lambda)}(g_{\psi};\cdot)\Big](x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[f^{\psi} * \psi(k)z_k\Big](x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\Big[f^{\psi} * z_k\Big](x) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)Y_k^{(\lambda)}\left(f^{\psi};x\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(\lambda)}(f;x) = S^{(\lambda)}[f - C_0].$$

Таким образом, $f(x) = C_0 + \big[f^{\psi} * g_{\psi}\big](x)$ почти всюду на S^{m-1}.

Обратно, пусть выполнено равенство (5). Тогда, вновь используя (2) и ассоциативность свертки, имеем

$$\frac{1}{\psi(k)}Y_k^{(\lambda)}(f;x) = \frac{1}{\psi(k)}[f * z_k](x) = \frac{1}{\psi(k)}\Big[C_0 + \big[f^{\psi} * g_{\psi}\big] * z_k\Big](x) =$$

$$= \frac{1}{\psi(k)}\Big[[f^{\psi} * g_{\psi}] * z_k\Big](x) = \frac{1}{\psi(k)}\Big[f^{\psi} * [g_{\psi} * z_k]\Big](x) =$$

$$= \frac{1}{\psi(k)}\Big[f^{\psi} * Y_k^{(\lambda)}(g_{\psi};\cdot)\Big](x) = \frac{1}{\psi(k)}\Big[f^{\psi} * \psi(k)z_k\Big](x) =$$

$$= \Big[f^{\psi} * z_k\Big](x) = Y_k^{(\lambda)}\big(f^{\psi};x\big) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Предложение 2 доказано.

Обозначим через $C_p^{\psi}(S^{m-1})$, $1 \leq p \leq \infty$, множество всех функций $f(x)$, которые представляются в виде свертки

$$f(x) = C_0 + \int\limits_{S^{m-1}} h\left(x'\right)g_{\psi}\left(\sigma^{-1}x'\right)dx', \qquad h(x) \in B_p^0(S^{m-1}), \tag{7}$$

$$B_p^0(S^{m-1}) = \left\{h(x) \in L_p(S^{m-1})\colon \|h\|_{L_p(S^{m-1})} \leq 1,\ Y_0^{(\lambda)}(h) = \int\limits_{S^{m-1}} h(x)dx = 0\right\},$$

с фиксированным ядром $g_\psi(x) = \tilde{g}_\psi(\theta) \in L_{p'}(S^{m-1})$, $1/p + 1/p' = 1$, ряд Фурье которого имеет вид (4).

Поскольку $h \in L_p(S^{m-1})$, $g_\psi \in L_{p'}(S^{m-1})$, то $C_p^\psi(S^{m-1}) \subset C(S^{m-1})$. Если $\psi(k) = (k(k+ +m-2))^{-r/2}$, $r > 0$, то классы $C_p^\psi(S^{m-1})$ переходят в известные классы $W_p^r(S^{m-1})$, при этом если $r > \dfrac{m-1}{p}$, $1 < p < \infty$, то $g_\psi = g_r \in L_{p'}(S^{m-1})$, и если $r > m-1$, то $g_r \in C(S^{m-1})$.

Ясно, что при $p = 2$ включение $g_\psi \in L_2(S^{m-1})$ эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) a_k < \infty, \qquad a_k = \|z_k(x)\|^2_{L_2(S^{m-1})}. \tag{8}$$

Будем считать, что последовательность $\psi(k)$ является сужением на множестве натуральных чисел некоторой непрерывной функции $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t \ge 1$. Множество всех выпуклых вниз при $t \ge 1$ функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условию $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$, обозначают через $\mathfrak{M}$. Согласно [3, с. 160], каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие пару функций $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t)$ с помощью формул

$$\eta(t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \qquad \mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t}, \quad t \ge 1, \tag{9}$$

где $\psi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi(\cdot)$.

Величина $\eta(t) - t$ на основании ее определения — длина отрезка $[t, \eta(t)]$, на котором значение функции $\psi(t)$ уменьшается ровно в два раза. В связи с этим функцию $\mu(\psi; t)$ называют модулем полураспада функции $\psi(t)$. Из множества $\mathfrak{M}$ можно выделять различные подмножества в соответствии со свойствами функций $\mu(\psi, t)$ и $\eta(t)$ (см. [3]).

Рассмотрим линейные полиномиальные методы приближения функций из классов $L^\psi(S^{m-1}) \cap C(S^{m-1})$.

Пусть $\alpha = \left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $k = 0, 1, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$, — бесконечная треугольная матрица чисел таких, что

$$\alpha_0^{(n)} = 1, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad \alpha_k^{(n)} = 0, \quad k = n, n+1, \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = 1, \tag{10}$$

и линейный оператор $U_n^{(\lambda)} = U_n^{(\lambda)}(\alpha)$ каждой функции $f \in L^\psi(S^{m-1})$ ставит в соответствие сферический полином

$$U_n^{(\lambda)}(f; x; \alpha) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} Y_k^{(\lambda)}(f; x), \qquad Y_0^{(\lambda)}(f; x) = C_0 = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Если

$$\alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

то полином $U_n^{(\lambda)}(f; x; \alpha)$ является частичной суммой Фурье $S_n^{(\lambda)}(f; x)$ степени n функции $f(x)$.

Для оператора $U_n^{(\lambda)}$ рассмотрим величину

$$\mathcal{E}_n\Big(C_2^{\psi}(S^{m-1});\alpha\Big)_C = \sup_{f\in C_2^{\psi}(S^{m-1})}\Big\|f(x) - U_{n-1}^{(\lambda)}(f;x;\alpha)\Big\|_{C(S^{m-1})}. \tag{12}$$

В данной работе рассматривается, в частности, задача нахождения точных значений величин (12).

Пусть, далее, $f \in L_p(S^{m-1})$, $1 \le p \le \infty$, и

$$E_n(f)_p = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_{L_p(S^{m-1})}$$

— наилучшее приближение $f(x)$ в метрике пространства $L_p(S^{m-1})$ сферическими полиномами

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k(x), \qquad Y_k(x) \in H_k, \quad x \in S^{m-1},$$

степени не выше $n-1$.

Если $\mathfrak{N} \subset C(S^{m-1})$, $U_n^{(\lambda)}$ — линейный оператор вида (11), то величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_C = \inf_{U_{n-1}^{(\lambda)}} \sup_{f\in\mathfrak{N}} \Big\|f - U_{n-1}^{(\lambda)}(f)\Big\|_{C(S^{m-1})} \tag{13}$$

называют наилучшим линейным приближением класса $\mathfrak{N}$ с помощью линейных операторов вида (11) в метрике пространства $C(S^{m-1})$, а оператор $\bar{U}_{n-1}^{(\lambda)}(f)$, который реализует инфимум в правой части (13), называется наилучшим линейным оператором приближения класса $\mathfrak{N}$. В работе показывается, что величина $\mathcal{E}_n\Big(C_p^{\psi}(S^{m-1})\Big)_C$ совпадает с наилучшим приближением ядра $g_\psi(x) = \tilde{g}_\psi(\theta) \in L_{p'}(S^{m-1})$, $1/p\ + 1/p'\ = 1$, в метрике пространства $L_{p'}(S^{m-1})$, а также устанавливаются некоторые оценки норм отклонений

$$\rho_n^{(\lambda)}(f;x) = f(x) - S_{n-1}^{(\lambda)}(f;x)$$

в пространстве $L_s(S^{m-1})$ через наилучшие приближения ψ-производных $f^{\psi}(x)$ в пространстве $L_p(S^{m-1})$ $1 \le p,\, s \le \infty$, для быстро убывающих функций $\psi(\cdot)$. При этом оценки имеют общий характер в том смысле, что в них параметры m, p и s независимы между собой.

Задачи аналогичного характера в случае тригонометрических рядов Фурье 2π -периодических функций ставились и изучались в работах [3, 5, 6].

3. Основные результаты. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция* $\psi = \psi(k)$ *удовлетворяет условию* (8), *а* $\alpha = \Big\|\alpha_k^{(n)}\Big\|$ *— условиям* (10). *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n(C_2^{\psi}(S^{m-1});\alpha)_C = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\big(1-\alpha_k^{(n)}\big)^2\psi^2(k)a_k + \sum_{k=n}^{\infty}\psi^2(k)a_k\right)^{1/2}, \tag{14}$$

где

$$a_k = \|z_k(x)\|^2_{L_2(S^{m-1})}.$$

Приведем некоторые следствия из теоремы 1. Для сумм Фурье – Лапласа в силу (14) справедливо равенство

$$\mathcal{E}_n(C_2^{\psi}(S^{m-1}); S_{n-1}^{(\lambda)})_C = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) a_k\right)^{1/2}. \tag{15}$$

При $\psi(k) = \psi(k,m) = (k(k+m-2))^{-r/2}$, $r > 0$, с учетом соотношения $a_k \asymp k^{m-2}$ из (15) получаем порядковое соотношение

$$\mathcal{E}_n(W_2^r(S^{m-1}); S_{n-1}^{(\lambda)})_C \asymp n^{\frac{m-1}{2}-r}, \quad r > \frac{m-1}{2},$$

которое было получено в [7].

Если

$$\alpha_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le n-l, \\ 1 - \dfrac{k-n+l}{l}, & n-l < k \le n-1, \\ 0, & k > n-1, \end{cases}$$

то

$$U_n^{(\lambda)}(f;x;\alpha) = V_{n,l}^{(\lambda)}(f;x)$$

— суммы Валле Пуссена. Тогда из (14) получаем

$$\mathcal{E}_n(C_2^{\psi}(S^{m-1}); V_{n-1,l}^{(\lambda)})_C = \left(\frac{1}{l}\sum_{k=n-l+1}^{n-1}(k-n+l)^2\psi^2(k)a_k + \sum_{k=n}^{\infty}\psi^2(k)a_k\right)^{1/2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\psi = \psi(k) \ne 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *и* $g_\psi \in L_{p'}(S^{m-1})$, $1/p + 1/p' = 1$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\big(C_p^{\psi}(S^{m-1})\big)_C = E_n(g_\psi)_{p'}. \tag{16}$$

Лемма 1. *Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) z_k(x), \quad x \in S^{m-1},$$

является рядом Фурье некоторой ограниченной на сфере S^{m-1} *зональной функции* $g_\psi(x) = \tilde{g}_\psi(\theta)$. *Тогда если* $1 \le p$, $s \le \infty$, *то для любой функции* $f \in L^{\psi}L_p(S^{m-1})$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|\rho_n^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{L_S(S^{m-1})} \le K_\lambda E_n(f^{\psi})_p \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) k^{m-2}, \quad \lambda = \frac{m-2}{2}, \tag{17}$$

где $K_\lambda = K(\lambda)$ *— множитель, не зависящий от* n, p, s *и* $f(x) \in L^{\psi}L_p(S^{m-1})$.

Теорема 3. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}$, *функция* $\psi(t)t^{m-2}$, $m \geq 3$, *монотонно убывая, стремится к нулю, а функция* $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ *удовлетворяет условиям*:

1) $\eta(t) - t \leq K \ \forall t \geq 1$,

2) $\eta(t) \leq \beta t$, $0 < \beta < 2^{\frac{1}{m-2}}$, $\forall t \geq 1$.

Тогда если $1 \leq p, s \leq \infty$, *то для любой функции* $f \in L^\psi L_p(S^{m-1})$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_S \leq \left\| \rho_n^{(\lambda)}(f;x) \right\|_{L_S(S^{m-1})} \leq K_\lambda \psi(n) n^{m-2} E_n\big(f^\psi\big)_{p'}, \tag{18}$$

где K_λ — *множитель, имеющий такой же смысл, как и в неравенстве* (17).

Обозначая

$$L_p^\psi(S^{m-1}) = \left\{ f(x) \in L^\psi L_p(S^{m-1}) \colon f^\psi \in B_p^o(S^{m-1}) \right\},$$

в условиях теоремы 3 из (18) получаем оценки

$$\sup_{f \in L_p^\psi(S^{m-1})} E_n(f)_S \leq \sup_{f \in L_p^\psi(S^{m-1})} \left\| \rho_n^{(\lambda)}(f;x) \right\|_{L_S(S^{m-1})} \leq K_\lambda \psi(n) n^{m-2}.$$

Условиям теоремы 3 удовлетворяет, в частности, функция $\psi(t) = \exp(-t^r)$ при $r \geq m-2$, для которой

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = (\ln 2 + t^r)^{1/r}, \quad t \geq 1.$$

Очевидно, что условие 1 выполняется. Условие 2 следует из того, что

$$\eta(t) \leq (\ln 2 + 1)^{1/r} t, \quad t \geq 1.$$

Тогда, полагая $\beta = (\ln 2 + 1)^{1/r}$, имеем

$$\beta^{m-2} = (\ln 2 + 1)^{\frac{m-2}{r}} < 2.$$

4. Доказательство основных результатов. ***Доказательство теоремы* 1.** В силу (7), формулы (2) и ассоциативности свертки имеем

$$f(x) - U_{n-1}^{(\lambda)}(f;x;\alpha) = \big[f^\psi * g_\psi\big](x) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} [f * z_k](x) =$$

$$= \big[f^\psi * g_\psi\big](x) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \left[[f * g_\psi] * z_k\right](x) =$$

$$= \big[f^\psi * g_\psi\big](x) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \Big[f^\psi * [g_\psi * z_k]\Big](x) =$$

$$= \big[f^\psi * g_\psi\big](x) - \sum_{k=1}^{n-1} \Big[f^\psi * \alpha_k^{(n)} [g_\psi * z_k]\Big](x) =$$

$$= \left[f^{\psi} * g_{\psi}\right](x) - \left[f^{\psi} * \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \left[g_{\psi} * z_k\right]\right](x) =$$

$$= \left[f^{\psi} * g_{\psi}\right](x) - \left[f^{\psi} * \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} Y_k^{(\lambda)} \left(g^{\psi}; x\right)\right](x) =$$

$$= \left[f^{\psi} * g_{\psi}\right](x) - \left[f^{\psi} * \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \psi(k) z_k(\cdot)\right](x) =$$

$$= \left[f^{\psi} * \left(g_{\psi}(\cdot) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \psi(k) z_k(\cdot)\right)\right](x) = \left[f^{\psi} * g_{\psi,n}\right](x), \tag{19}$$

где

$$g_{\psi,n}\left(x, \alpha\right) \overset{\mathrm{df}}{=} g_{\psi}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(n)} \psi(k) z_k(x)$$

и

$$S\left[g_{\psi,n}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \alpha_k^{(n)}\right) \psi(k) z_k(x) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) z_k(x).$$

Для произвольной функции $u \in L_{p'}(S^{m-1})$, $1 \le p' \le \infty$, имеет место соотношение двойственности [8, с. 27]

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \|u - a\|_{L_{p'}}(S^{m-1}) = \sup_{\varphi \in B_p^0(S^{m-1})} \int\limits_{S^{m-1}} u(t) \varphi(t)\, dt, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{20}$$

В силу инвариантности классов $C_2^{\psi}(S^{m-1})$ и оператора $U_n^{(\lambda)}(\alpha)$ относительно сдвигов, с учетом равенства (19), условия (8) и соотношения (20) при $p = p' = 2$, а также равенства Парсеваля находим

$$\mathcal{E}_n\Big(C_2^{\psi}(S^{m-1}); \alpha\Big)_C = \sup_{f \in C_2^{\psi}(S^{m-1})} \left\| f(x) - U_{n-1}^{(\lambda)}\left(f; x; \alpha\right) \right\|_{C(S^{m-1})} =$$

$$= \sup_{f \in C_2^{\psi}(S^{m-1})} \left| f\left(x^0\right) - U_{n-1}^{(\lambda)}\left(f; x^0; \alpha\right) \right| =$$

$$= \sup_{h \in B_2^0(S^{m-1})} \left| \int\limits_{S^{m-1}} h(x) g_{\psi,n}\left(x, \alpha\right) dx \right| =$$

$$= \inf_{a \in \mathbb{R}} \left\| g_{\psi,n}\left(x, \alpha\right) - a \right\|_{L_2(S^{m-1})} =$$

$$= \inf_{a\in\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \alpha_k^{(n)}\right)^2 \psi^2(k) \|z_k\|^2_{L_2(S^{m-1})} + \sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) \|z_k\|^2_{L_2(S^{m-1})} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \inf_{a\in\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \alpha_k^{(n)}\right)^2 \psi^2(k) a_k + \sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) a_k \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Если $\psi(k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то для любой функции $f \in C_p^{\psi}(S^{m-1})$ и зонального сферического полинома

$$T_{n-1}^0(t) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k(t)$$

с нулевым средним значением $\left(Y_0^{(\lambda)}\left(T_{n-1}; \cdot\right) = 0\right)$ на сфере S^{m-1} имеем

$$C_0 + \int\limits_{S^{m-1}} f^{\psi}\left(x'\right) T_{n-1}^0\left(\sigma^{-1} x'\right) dx' =$$

$$= C_0 + \left[f^{\psi} * T_{n-1}^0\right](x) = c_0 + \left[f^{\psi} * \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k\right](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left[f^{\psi} * z_k\right](x) = C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left[f^{\psi} * \frac{\psi(k)}{\psi(k)} z_k\right](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{1}{\psi(k)} \left[f^{\psi} * \psi(k) z_k\right](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{1}{\psi(k)} \left[f^{\psi} * Y_k^{(\lambda)}\left(g_{\psi}; \cdot\right)\right](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{1}{\psi(k)} \left[f^{\psi} * [g_{\psi} * z_k]\right](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{1}{\psi(k)} \left[\left[f^{\psi} * g_{\psi}\right] * z_k\right](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{1}{\psi(k)} [f * z_k](x) = C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{1}{\psi(k)} Y_k^{(\lambda)}(f; x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} Y_k^{(\lambda)}(f;x) = U_{n-1}^{(\lambda)}\left(f;x;\alpha\right),$$

где

$$\alpha_k^{(n)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{c_k}{\psi(k)}.$$

Обратно, произвольный сферический полином $U_{n-1}\left(f;x;\alpha\right)$ вида (11) представляется в виде свертки

$$C_0 + \int\limits_{S^{m-1}} f^{\psi}\left(x'\right) T_{n-1}^{0}\left(\sigma^{-1}x'\right) dx'$$

с полиномом $T_{n-1}^0(t)$, коэффициенты которого имеют вид

$$c_k = \psi(k)\alpha_k^{(n)}.$$

В самом деле, на основании формулы (2) и свойств свертки находим

$$U_{n-1}^{(\lambda)}\left(f;x;\alpha\right) = C_0 + \sum_{k=n}^{n-1} \alpha_k^{(n)} Y_k(f;x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=n}^{n-1} \alpha_k^{(n)} [f * z_k](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=n}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \Big[\left[f^{\psi} * g_{\psi}\right] * z_k\Big](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=n}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \Big[f^{\psi} * \left[g_{\psi} * z_k\right]\Big](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=n}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \Big[f^{\psi} * \psi(k) z_k\Big](x) =$$

$$= C_0 + \sum_{k=n}^{n-1} \Big[f^{\psi} * \alpha_k^{(n)} \psi(k) z_k\Big](x) =$$

$$= C_0 + \left[f^{\psi} * \sum_{k=n}^{n-1} \alpha_k^{(n)} \psi(k) z_k\right](x) = C_0 + \Big[f^{\psi} * T_{n-1}^0\Big](x) =$$

$$= C_0 + \int\limits_{S^{m-1}} f^{\psi}\left(x'\right) T_{n-1}^{0}\left(\sigma^{-1}x'\right) dx',$$

где $T^0_{n-1}(t)$ — зональный полином с коэффициентами

$$c_k = \alpha_k^{(n)} \psi(k).$$

Поэтому с учетом (1) и соотношения двойственности (20) получаем

$$\mathcal{E}_n \left(C_p^{\psi}; S^{m-1} \right)_C = \inf_{U_{n-1}^{(\lambda)}} \sup_{f \in C_p^{\psi}(S^{m-1})} \left\| f - U_{n-1}^{(\lambda)}(f) \right\|_{C(S^{m-1})} =$$

$$= \inf_{T^0_{n-1}} \sup_{f \in C_p^{\psi}(S^{m-1})} \left\| \left[f^{\psi} * \left[g_{\psi} - T^0_{n-1} \right] \right](x) \right\|_{C(S^{m-1})} =$$

$$= \inf_{T^0_{n-1}} \sup_{h \in B_p^0(S^{m-1})} \left| \int\limits_{S^{m-1}} h(t) \left(g_{\psi}(t) - T^0_{n-1}(t) \right) dt \right| =$$

$$= \inf_{T^0_{n-1}} \inf_{a \in \mathbb{R}} \left\| g_{\psi}(t) - T^0_{n-1}(t) - a \right\|_{L_{p'}(S^{m-1})} = E_n(g_{\psi})_{p'}.$$

Равенство (16) установлено.

Теорема 2 доказана.

Из рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 2, следует, что при $\psi(k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, для класса $C_p^{\psi}(S^{m-1})$ среди всех линейных методов приближения $U_{n-1}^{(\lambda)}$ вида (11) наилучшим является метод $\bar{U}_{n-1}^{(\lambda)}(f; x; \alpha)$, который порождается матрицей $\alpha = \left\| \alpha_k^{(n)} \right\|$ с элементами

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{\bar{c}_k}{\psi(k)}, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad \alpha_k^{(n)} = 0, \quad k > n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где $\bar{c}_k$ — коэффициенты полинома наилучшего приближения ядра $g_{\psi}(x)$ в метрике пространства $L_{p'}(S^{m-1})$. Поскольку $E_n(g_{\psi})_2 = \left\| g_{\psi} - S_{n-1}^{(\lambda)}(g_{\psi}) \right\|_{L_2(S^{m-1})}$, наилучшим линейным методом приближения $\bar{U}_{n-1}^{(\lambda)}$ классов $C_p^{\psi}(S^{m-1})$ является метод $\alpha = \left\| \alpha_k^{(n)} \right\|$, определяемый равенством (21), в котором $\bar{c}_k$ — коэффициенты Фурье функции $g_{\psi}(x)$.

Доказательство леммы **1.** Согласно предложению 2 почти всюду на S^{m-1} имеем представление

$$\rho_n^{(\lambda)}(f; x) = f(x) - S_{n-1}^{(\lambda)}(f; x) = \left[f^{\psi} * g_{\psi,n} \right](x),$$

где

$$g_{\psi,n}(x) = \tilde{g}_{\psi,n}(\theta) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) z_k(x).$$

Поскольку функция $g_{\psi,n}(x)$ ортогональна любому сферическому полиному $T_{n-1}(x)$, имеем

$$\rho_n^{(\lambda)}(f; x) = \left[\left(f^{\psi} - T_{n-1} \right) * g_{\psi,n} \right](x).$$

На основании неравенства Юнга для сверток (1) находим

$$\left\|\rho_n^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{L_S(S^{m-1})} = \left\|\left[\left(f^{\psi} - T_{n-1}\right) * g_{\psi,n}\right](x)\right\|_{L_S(S^{m-1})} \leq$$

$$\leq \left\|f^{\psi}(x) - T_{n-1}(x)\right\|_{L_p(S^{m-1})} \|g_{\psi,n}(x)\|_{L_q(S^{m-1})},$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1, \quad 1 \leq p \leq s \leq \infty.$$

Вследствие неравенства (см., например, [7])

$$|z_k(x)| \leq K_\lambda k^{2\lambda}, \qquad K_\lambda = K(\lambda), \quad \lambda = \frac{m-2}{2}, \tag{22}$$

учитывая, что $q^{-1} \in [0,1]$, получаем

$$\|g_{\psi,n}(x)\|_{L_q(S^{m-1})} \leq \|g_{\psi,n}(x)\|_{L_\infty(S^{m-1})} \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \|z_k(x)\|_{L_\infty(S^{m-1})} \leq K_\lambda \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) k^{m-2}.$$

Следовательно,

$$\left\|\rho_n^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{L_s(S^{m-1}})} \leq K_\lambda \left\|f^{\psi}(x) - T_{n-1}(x)\right\|_{L_p(S^{m-1})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) k^{m-2}.$$

Если $1 \leq s < p \leq \infty$, в силу неравенства Гельдера

$$\left\|\rho_n^{(\lambda)}(f;x)\right\|_{L_S(S^{m-1})} \leq \left\|\left[\left(f^{\psi} - T_{n-1}\right) * g_{\psi,n}\right](x)\right\|_{L_p(S^{m-1})} \leq$$

$$\leq \left\|f^{\psi}(x) - T_{n-1}(x)\right\|_{L_p(S^{m-1})} \|g_{\psi,n}(x)\|_{L_\infty(S^{m-1})} \leq$$

$$\leq K_\lambda \left\|f^{\psi}(x) - T_{n-1}(x)\right\|_{L_p(S^{m-1})} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) k^{m-2}.$$

Выбирая в качестве $T_{n-1}(x)$ полином $T_n^*(x)$ наилучшего приближения в $L_p(S^{m-1})$ производной $f^{\psi}(x)$, приходим к неравенству (17).

Лемма 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 3** основано на лемме 1. Требуется показать, что в условиях теоремы 3

$$J_n \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) k^{m-2} \leq c\psi(n) n^{m-2}, \quad c = \text{const} > 0. \tag{23}$$

Положим $t_0 = n$, $t_i = \eta\left(\psi; t_{i-1}\right)$, $i \in \mathbb{N}$, где $\eta(\psi,t)$ — величина, определяемая формулой (9). Поскольку $\psi\left(t_i\right) \leq \psi(n) 2^{-i}$, используя условие 1, находим

$$J_n \leq \int\limits_n^\infty \psi(v)\, v^{m-2} dv = \sum_{i=0}^\infty \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \psi(v)\, v^{m-2} dv \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^\infty \psi(t_i)\, t_i{}^{m-2}(t_{i+1} - t_i) \leq$$

$$\leq \psi(n) \sum_{i=0}^\infty 2^{-i} t_i^{m-2}(t_{i+1} - t_i) \leq K\psi(n) \sum_{i=0}^\infty 2^{-i} t_i^{m-2},$$

$$K = \text{const} > 0.$$

В силу условия 2

$$t_i = \eta(t_{i-1}) \leq \beta t_{i-1} = \beta\eta(t_{i-2}) \leq \beta^2 t_{i-2} \leq \ldots \leq \beta^i n,$$

$$t_i^{m-2} \leq \beta^{i(m-2)} \cdot n^{m-2}, \qquad 0 < \beta < 2^{\frac{1}{m-2}}, \quad m \geq 3.$$

Поэтому

$$J_n \leq K\psi(n) n^{m-2} \sum_{i=0}^\infty 2^{-i}\beta^{i(m-2)} \leq K_1 \psi(n) n^{m-2}, \qquad K_1 = \text{const} > 0.$$

На основании неравенств (22), (23) и условий теоремы устанавливаем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^\infty \psi(k) z_k(x), \quad x \in S^{m-1}.$$

Поэтому сумма $g_\psi(x) = \tilde{g}_\psi(\theta)$ этого ряда является непрерывной на S^{m-1} функцией. Применяя лемму 1, приходим к оценкам (18).

Теорема 3 доказана.

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 588 с.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
4. *Askey R., Wainger S.* On the behavior of special classes of ultrasherical expansions // J. Anal. Math. – 1965. – **15**. – P. 193 – 244.
5. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 5. – С. 683 – 689.
6. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Рівномірні наближення класів $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій лінійними методами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 181 – 189.
7. *Камзолов А. И.* О приближении гладких функций на сфере S^n методом Фурье // Мат. заметки. – 1982. – **31**, № 6. – С. 847 – 853.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.

Получено 03.09.13,
после доработки — 22.11.13