УДК 512.54

О. О. Безущак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
В. І. Сущанський (Сілез. техн. ун-т, Глівіце, Польща)

ГРУПИ ПЕРІОДИЧНО ВИЗНАЧЕНИХ ЛІНІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТОРУ

The notions of periodically defined and residual periodically defined linear transformations of an infinite-dimensional vector space V over the field K are introduced. A group of all strictly residual periodically defined transformations and its subgroups of u-periodically defined transformations (where u is a supernatural number) are investigated. An uncountable family of simple groups obtained as infinite-dimensional analogs of $PSL_n(K)$ are constructed.

Введены понятия периодически определенных и остаточно периодически определенных линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства V над полем K. Изучены группа всех строго остаточно периодически определенных преобразований и ее подгруппы u-периодически определенных преобразований (u — супернатуральное число). Построено континуальное семейство простых групп, которые являются бесконечномерными аналогами $PSL_n(K)$.

Вступ. Серед груп лінійних перетворень нескінченновимірних векторних просторів над полями найбільш вивченою є група $FGL(V)$ фінітарних перетворень, тобто таких, що діють тотожно на деякому підпросторі скінченної ковимірності [1 – 6]. Якщо основне поле є скінченним, ця група є локально скінченною і відіграє важливу роль у загальній теорії локально скінченних груп [7 – 9]. Поняття фінітарності перетворення не залежить від вибору бази у просторі V, тобто визначається самим простором. Визначення багатьох інших груп лінійних перетворень потребує фіксації бази. Такою є, зокрема, група стабільності бази B у просторі V, яка визначається рівністю

$$GL_{\mathrm{stab}}(V, B) = \{g \in GL(V) \,|\, gv = v \ \text{для майже всіх елементів } v \text{ бази } B\}.$$

Група стабільності кожної бази є фінітарною групою, причому $FGL(V)$ породжується групами стабільності найможливіших баз у просторі V. Якщо V — зліченний нескінченновимірний простір над зліченним полем K, то $GL_{\mathrm{stab}}(V, B)$ — зліченна група, тоді як $FGL(V)$ — континуальна група. Тому рівність $GL_{\mathrm{stab}}(V, B) = FGL(V)$ не може досягатися для жодної бази B простору V. Зазначимо також, що групи стабільності, які відповідають різним базам, спряжені у групі $GL(V)$ всіх невироджених лінійних перетворень простору V та ізоморфні групі $GL_{\mathrm{stab}}(K)$ невироджених фінітарних матриць над полем K. Для довільної бази $B = (e_i)_{i \in N}$ зліченновимірного простору V групу стабільності $GL_{\mathrm{stab}}(V, B)$ можна зобразити у вигляді індуктивної границі

$$\varinjlim_i \, (GL(V_i), \varphi_i)_{i \in N},$$

де $V_i = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i \rangle$, φ_i — природне занурення $GL(V_i)$ у $GL(V_{i+1})$, яке відповідає тотожному зануренню V_i у V_{i+1}.

Група $GL(V)$ містить і інші підгрупи, пов'язані з вибором бази, які природним чином характеризуються в термінах індуктивних границь скінченновимірних лінійних груп, але досі вони або зовсім не вивчалися, або ж вивчені мало.

У даній статті ми розглядаємо континуальну сім'ю таких підгруп, які можна задати за допомогою поняття „періодично визначених” перетворень простору V. Періодичність тут означає, що простір V розбивається на пряму суму підпросторів фіксованої вимірності, на кожному з яких перетворення діє, з точністю до позначення бази підпростору, однаково. Періодично визначені лінійні перетворення можна задавати нескінченновимірними матрицями, які мають блоково-діагональний вигляд, причому блоки по діагоналі періодично повторюються. Тому групи таких перетворень можна характеризувати також як індуктивні границі скінченновимірних лінійних груп з діагональними зануреннями, тобто зануреннями вигляду $a \to a \oplus a \oplus \ldots \oplus a$, де $\oplus$ — знак кронекерівської прямої суми матриць. Різним послідовностям діагональних занурень можуть відповідати однакові граничні групи відповідних прямих спектрів, а класифікація граничних груп з точністю до ізоморфізму здійснюється за допомогою супернатуральних чисел, які природно пов'язуються з прямими спектрами.

У роботі описується конструкція діагональних прямих спектрів, вивчаються основні властивості граничних груп і доводиться класифікаційна теорема. Отримані результати свідчать про певний „паралелізм” теорії груп періодично визначених перетворень з теорією фінітно апроксимовних C^*-алгебр [10, 11], класифікацією діагональних границь класичних алгебр Лі [12, 13] або симетричних чи знакозмінних груп [14, 15].

1. Подільні послідовності та супернатуральні числа. Послідовність $\chi = (n_i)_{i \in N}$ натуральних чисел називається подільною, якщо $n_i \,|\, n_{i+1}$ для довільного $i \in N$. Нехай DS — множина всіх подільних послідовностей. Будемо говорити, що послідовність $\chi = (n_i)_{i \in N}$ є дільником послідовності $\psi = (m_i)_{i \in N}$, якщо для довільного $i \in N$ існує такий індекс $j \in N$, що $n_i \,|\, m_j$.

Послідовності χ та ψ назвемо рівноподільними, якщо кожна з них є дільником іншої. Той факт, що χ є дільником ψ, позначатимемо символом $\chi \,|\, \psi$, а рівноподільність χ та ψ — символом $\chi \sim \psi$. Зрозуміло, що відношення рівноподільності є еквівалентністю на DS, тобто DS розбивається на класи рівноподільних послідовностей.

Супернатуральним числом (або числом Стейніца) називається формальний добуток вигляду

$$\prod_{p \in P} p^{\alpha_p}, \quad \alpha_p \in N \cup \{0, \infty\},$$

де P — множина простих чисел. Множину всіх супернатуральних чисел позначатимемо як SN. З означення випливає, що кожне натуральне число є супернатуральним, тобто $N \subset SN$. Числа з $SN \backslash N$ називатимемо нескінченними супернатуральними числами. Відношення подільності $|$ на N природним чином поширюється на SN. А саме, для супернатуральних чисел $u = \prod_p p^{\alpha_p}$ та $v = \prod_p p^{\beta_p}$ покладемо $u \,|\, v$ тоді й лише тоді, коли для всіх $p \in P$ виконується нерівність $\alpha_p \leq \beta_p$ (при цьому вважається, що ∞ є більшим за всі натуральні числа і нуль). Частково впорядкована множина $(SN, |)$ є ґраткою, причому ця ґратка буде повною, тобто для довільних двох елементів із SN існують точна верхня і точна нижня грані. Для наведених вище супернатуральних чисел u, v точною верхньою гранню і точною нижньою гранню будуть, відповідно, числа

$$u \vee v = \prod_{p \in P} p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}, \quad u \wedge v = \prod_{p \in P} p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}.$$

У ґратці супернатуральних чисел існують найбільший елемент — супернатуральне число $I = \prod_p p^{\infty}$ і найменший елемент — число 1. Кожна подільна послідовність $\chi = (n_i)_{i \in N}$ однозначно визначає певне супернатуральне число u так, що:

а) всі члени послідовності χ є дільниками числа u;

б) число u є найменшим у сенсі часткового порядку $|$ на SN супернатуральним числом, яке ділиться на всі члени послідовності χ.

Називатимемо число u характеристикою послідовності χ і позначатимемо $\operatorname{char} \chi$.

Лема 1. *Для довільних послідовностей χ, $\psi \in DS$ співвідношення $\chi \,|\, \psi$ виконується тоді й лише тоді, коли $\operatorname{char} \chi \,|\, \operatorname{char} \psi$. Зокрема, послідовності χ і ψ будуть рівноподільними тоді й лише тоді, коли виконується рівність $\operatorname{char} \chi = \operatorname{char} \psi$.*

Доведення — очевидна перевірка.

2. Періодично визначені лінійні перетворення. Нехай V — зліченновимірний лінійний простір над основним полем K, $B = (e_i)_{i \in N}$ — фіксована база простору V. Кожна послідовність n_1, n_2, ... натуральних чисел визначає розбиття бази на фрагменти

$$e_1, e_2, \ldots, e_{n_1} \,|\, e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2} \,|\, e_{n_1+n_2+1}, \ldots \ , \tag{1}$$

які містять n_1, n_2, ... векторів відповідно. Символом $V(l)$ позначимо підпростір простору V, натягнутий на вектори l-го фрагменту розбиття (1), тобто $V(l) = \langle e_{n_1+\ldots+n_{l-1}+1}, \ldots, e_{n_1+\ldots+n_{l-1}+n_l} \rangle$. Прямий розклад

$$V = \bigoplus_{l=1}^{\infty} V(l) \tag{2}$$

назвемо розкладом, що визначається послідовністю $n_1, n_2, \ldots$.

Лінійне перетворення $f : V \to V$ назвемо узгодженим з розкладом (2), якщо для довільного $l \in N$ має місце включення $f(V(l)) \subseteq V(l)$. Рівності для всіх $l \in N$ досягаються в тому і лише в тому випадку, коли f — невироджене перетворення. Кожне узгоджене з розкладом (2) лінійне перетворення f може бути задане в базі B своєю матрицею A_f, яка є нескінченновимірною блоково-діагональною матрицею. Для фіксованої послідовності $n_1, n_2, \ldots$ група всіх невироджених лінійних перетворень простору V, які узгоджені з розкладом (2) (чи, що те саме, з розбиттям (1)), ізоморфна (необмеженому) декартовому добутку повних матричних груп $GL_{n_l}(K)$, $l = 1, 2, \ldots$, вимірностей $n_1, n_2, \ldots$ над полем K. Усі такі матричні групи містяться в групі $GL_{rc}(K)$ всіх нескінченновимірних матриць, у кожному рядку і стовпчику яких лише скінченна кількість елементів, що відмінні від нуля [16, 17]. Відповідну їй (при фіксованій базі) групу оборотних лінійних перетворень простору V позначатимемо символом $GL_{rc}(V)$. Групи періодично визначених перетворень простору V визначаються як підгрупи групи $GL_{rc}(V)$.

Означення 1. *Лінійне перетворення $f : V \to V$ називається періодично визначеним щодо бази B, якщо знайдеться таке число $n \in N$, що перетворення f узгоджене з розбиттям бази B вигляду*

$$e_1, \ldots, e_n \,|\, e_{n+1}, \ldots, e_{2n} \,|\, e_{2n+1}, \ldots, e_{3n} \,|, \ \ldots \ , \tag{3}$$

причому матриця обмеження f на підпростір $V(l) = \langle e_{(l-1)n+1}, \ldots, e_{ln} \rangle$ не залежить від вибору числа l.

Кожне число n, для якого існує розбиття (3) зі вказаною властивістю, називається періодом визначеності лінійного перетворення f.

Нехай a — матриця обмеження періодично визначеного лінійного перетворення f на підпростір $V(l)$ у базі $e_{(l-1)n+1}, \ldots, e_{ln}$. Тоді матриця a_f перетворення f у базі B має вигляд

$$a_f = a \oplus a \oplus a \oplus \ldots = a^{\oplus\omega}, \tag{4}$$

де $\oplus$ — як і раніше, знак кронекерівської прямої суми матриць.

При фіксованому n група всіх періодично визначених щодо бази B невироджених лінійних перетворень простору V, які мають період n, ізоморфна групі $GL_n(V)$.

Означення 2. *Перетворення f простору V назвемо залишково періодично визначеним щодо бази B, якщо воно є періодично визначеним при деякому $n_0 \in N$ на підпросторі, натягнутому на вектори $e_{n_0+1}, e_{n_0+2}, \ldots$, причому підпростір, натягнутий на вектори $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_{n_0}$, є f-інваріантним. Число n_0 називатимемо передперіодом визначеності перетворення f.*

Кожне залишково періодично визначене перетворення $f\colon V \to V$ з передперіодом n_0 і періодом визначеності n у базі B задається матрицею вигляду

$$a_f = b \oplus a \oplus a \oplus \ldots = b \oplus a^{\oplus\omega}, \tag{5}$$

де b — деяка $(n_0 \times n_0)$-матриця над K. Зауважимо, що розклади (4) і (5) неоднозначні, оскільки період і передперіод періодично визначеного та залишково періодично визначеного перетворення визначаються неоднозначно. Розклади (4), (5) стають однозначними, якщо домовитися передперіод n_0 і період n вибирати узгоджено мінімально можливими (тоді будемо говорити про мінімальний передперіод та мінімальний період).

Далі вважатимемо, що база B є фіксованою, а перетворення, періодично визначені щодо бази B, називатимемо періодично визначеними чи, відповідно, залишково періодично визначеними перетвореннями простору V.

Зауважимо, що добуток залишково періодично визначених перетворень може й не бути залишково періодично визначеним. Справді, добуток підстановок α, β із симетричної групи $S(N)$ натурального ряду, які визначені такими розкладами на цикли: $\alpha = (1,2)(3,4)(5,6)\ldots$, $\beta = (1)(2,3)(4,5)(6,7)\ldots$, є нескінченним циклом $\alpha\beta = (1,2,3,4,\ldots)$. Це означає, що добуток матриць $a = t^{\oplus\omega}$ і $b = (1) \oplus t^{\oplus\omega}$, де $t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, є матрицею вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

яка не є залишково періодичною. Тому всі залишково періодично визначені невироджені перетворення простору V не утворюють підгрупу в $GL(V)$. Підгрупу отримаємо, накладаючи додаткове природне обмеження на такі перетворення.

Означення 3. *Залишково періодично визначене перетворення $u \in GL(V)$ називається строго залишково періодично визначеним, якщо його передперіод є кратним мінімальному періоду визначеності.*

Символом $GL^p(V)$ позначимо множину всіх періодично визначених невироджених лінійних перетворень простору V, а символом $GL^{sp}(V)$ — множину всіх строго залишково періодично визначених невироджених лінійних перетворень V.

Лема 2. *$GL^p(V)$ і $GL^{sp}(V)$ є підгрупами групи $GL_{rc}(V)$.*

Доведення. Включення $GL^p(V) \subset GL_{rc}(V)$, $GL^{sp}(V) \subset GL_{rc}(V)$ є очевидними. Для довільних залишково періодично визначених перетворень f, g таких, що

$$a_f = b_1 \oplus a_1^{\oplus\omega}, \quad a_g = b_2 \oplus a_2^{\oplus\omega}, \tag{6}$$

причому b_1, b_2 і, відповідно, a_1, a_2 — матриці однакових розмірів, маємо

$$a_{fg} = (b_1 \cdot b_2) \oplus (a_1 \cdot a_2)^{\oplus\omega}, \quad (a_f)^{-1} = b_1^{-1} \oplus (a_1^{-1})^{\oplus\omega}. \tag{7}$$

У загальному випадку розклади (6) для матриць a_f і a_g виберемо таким чином. Нехай початково b_1, b_2 — матриці розмірів m_1, m_2, а a_1, a_2 — матриці розмірів n_1, n_2 відповідно. Оскільки $f, g \in GL^{sp}(V)$, то $n_1 \,|\, m_1$, $n_2 \,|\, m_2$, звідки $n_1n_2 \,|\, m_1m_2$. Побудуємо новий розклад вигляду (6), в якому матриці b_1, b_2 мають однаковий розмір m_1m_2, а матриці a_1, a_2 — розмір n_1n_2. Оскільки виконується умова $n_1n_2 \,|\, m_1m_2$, то $f \cdot g \in GL^{sp}(V)$, тобто $GL^{sp}(V)$ замкнена щодо множення перетворень. З другої з рівностей (7) випливає її замкненість щодо взяття оберненого. Тому $GL^{sp}(V)$ є підгрупою в $GL_{rc}(V)$. Для $GL^p(V)$ міркування аналогічні.

Лему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** Групи $GL^p(V)$ і $GL^{sp}(V)$ містяться в деякій власній підгрупі $GL_{rc}(V)$ — групі обмежених (щодо бази B) перетворень простору V [18]. До неї належать ті і тільки ті перетворення, які разом з оберненими мають у базі B матриці вигляду $||a_{ij}||_{i,j \in N}$, $a_{ij} = 0$ при $|i-j| \geq k$, $k \in N$.

Якщо f міститься в підгрупі $GL_{\mathrm{stab}}(V)$ $(= GL_{\mathrm{stab}}(V, B))$ стабільних щодо бази B лінійних перетворень простору V, то матриця a_f перетворення f у базі B має розклад (5) вигляду

$$a_f = c \oplus (1)^{\oplus\omega} = c \oplus e, \tag{8}$$

де c — деяка матриця над K, e — нескінченновимірна одинична матриця. Зрозуміло, що $GL_{\mathrm{stab}}(V) < GL^{sp}(V)$.

Теорема 1. *Для довільного поля K і зліченновимірного простору V над K група $GL^{sp}(V)$ розкладається в напівпрямий добуток своїх підгруп $GL^p(V)$ і $GL_{\mathrm{stab}}(V)$:*

$$GL^{sp}(V) = GL^p(V) \rtimes GL_{\mathrm{stab}}(V).$$

Доведення. Для того щоб переконатися, що група $GL^{sp}(V)$ розкладається в напівпрямий добуток своїх підгруп $GL^p(V)$ і $GL_{\mathrm{stab}}(V)$, досить пересвідчитися, що виконуються такі умови:

(i) $GL^p(V) \cap GL_{\mathrm{stab}}(V) = \{e\}$;

(ii) $GL_{\mathrm{stab}}(V) \lhd GL^{sp}(V)$;

(iii) довільний елемент $f \in GL^{sp}(V)$ розкладається в добуток елементів цих підгруп.

Рівність (i) випливає з того, що в базі B матриці перетворень із $GL^p(V)$ мають розклади вигляду (4), а матриці перетворень із $GL_{\mathrm{stab}}(V)$ — розклади вигляду (8). Якщо перетворення f має матрицю вигляду (5), а перетворення g — матрицю вигляду (8), то можна вважати, що b і c — матриці однакової вимірності. Тому f-трансформа $g^f = f^{-1} \cdot g \cdot f$ перетворення g має матрицю вигляду $(b^{-1} \cdot c \cdot b) \oplus (a^{-1} \cdot a)^{\oplus\omega} = (b^{-1} \cdot c \cdot b) \oplus e$, тобто $g^f \in GL_{\mathrm{stab}}(V)$. Оскільки f і g вибрано довільним чином, то це означає, що має місце співвідношення (ii). Нарешті, нехай f

— довільний елемент з $GL^{sp}(V)$, причому в базі B його матриця a_f має вигляд (5) для деяких матриць a, b. Розглянемо перетворення $g \in GL^p(V)$, яке задане в базі B матрицею $a_g = a^{\oplus\omega}$ для вибраної матриці a. Оскільки $f \in GL^{sp}(V)$, то порядок a є дільником порядку b, тобто при деякому k матриці b і $b' = \underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{k \text{ разів}}$ мають однакові порядки. Тоді матрицю a_g можна записати у вигляді $a_g = b' \oplus a^{\oplus\omega} = (b' \oplus e) \cdot d$, де $d = e' \oplus a^{\oplus\omega}$, e' — одинична матриця такого ж порядку, як і матриці b та b'. Звідси дістаємо $a_f = (b \oplus e) \cdot d = (b \oplus e) \cdot (b'^{-1} \oplus e) \cdot a_g$. Оскільки $(b \oplus e) \cdot (b'^{-1} \oplus e) \in GL_{\text{stab}}(V)$, $a_g \in GL^p(V)$, то отримуємо потрібний розклад.

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що оскільки лінійні перетворення із групи $GL_{rc}(V)$ при фіксованій базі задаються матрицями, то підгрупи цієї групи мають (нескінченновимірні) матричні аналоги. Матричний аналог підгрупи $G(V)$ позначатимемо символом $G(K)$.

3. Групи періодично визначених лінійних перетворень, що визначаються супернатуральними числами. Для лінійного перетворення $f \in GL^p(V)$ символом $\mathrm{mp}(f)$ позначимо мінімальну розмірність блоків у розкладі (4) матриці a_f на нескінченну кронекерівську суму блоку a на себе, або, інакше кажучи, мінімальний період визначеності перетворення f.

Лема 3. *Для довільного супернатурального числа $u \in SN$ множина періодично визначених невироджених лінійних перетворень f із $GL^p(V)$ таких, що $\mathrm{mp}(f) \mid u$, утворює підгрупу групи $GL^p(V)$.*

Доведення. Оскільки $\mathrm{mp}(f) = \mathrm{mp}(f^{-1})$, то ця множина замкнена відносно взяття обернених перетворень. Нехай для перетворень $f, g \in GL^p(V)$ маємо $\mathrm{mp}(f) = k$, $\mathrm{mp}(g) = l$. Тоді з $k \mid u$, $l \mid u$ випливає, що НСК$(k,l) \mid u$. Розглядатимемо матриці a_f і a_g як блоково-діагональні, діагональні блоки a_1 і a_2 яких мають вимірність НСК(k,l) : $a_f = a_1^{\oplus\omega}$, $a_g = a_2^{\oplus\omega}$. Тоді $a_{fg} = a_f \cdot a_g = (a_1 \cdot a_2)^{\oplus\omega}$, тобто вимірність діагональних блоків a_{fg} є дільником u. Отже, дана множина замкнена відносно множення перетворень, а тому є підгрупою групи $GL^p(V)$.

Лему 3 доведено.

Позначимо підгрупу з леми 3 символом $GL^p_u(V)$. Перетворення із $GL^p_u(V)$ називатимемо u-періодично визначеними. Якщо число u є натуральним, то $GL^p_u(V) \simeq GL_u(K)$.

Лема 4. *Нехай $\chi = (n_i)_{i \in N}$ — подільна послідовність натуральних чисел, $u = \operatorname{char}\chi$. Тоді має місце рівність*

$$GL^p_u(V) = \bigcup_{i=1}^{\infty} GL^p_{n_i}(V). \tag{9}$$

Доведення. Нескінченновимірна матрична група $GL^p_n(V)$ складається з блоково-діагональних матриць вигляду $a^{\oplus\omega}$, $a \in GL_n(K)$ для деякого $n \in N$. Тому для довільних натуральних чисел n_1, n_2 включення $GL^p_{n_1}(V) \subseteq GL^p_{n_2}(V)$ має місце тоді й лише тоді, коли $n_1 \mid n_2$. Звідси, переходячи до лінійних перетворень, дістаємо, що група $GL^p_u(V)$ є об'єднанням своїх підгруп $GL^p_n(V)$, $n \mid u$. Оскільки $\operatorname{char}\chi = u$, то $n \mid u$ тоді й лише тоді, коли $n \mid n_i$ для деякого $i \in N$. В такому випадку $GL^p_n(V) \subseteq GL^p_{n_i}(V)$. Звідси отримуємо включення $GL^p_u(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} GL^p_{n_i}(V)$. Крім того, $n_i \mid u$, тому обернене включення також є правильним.

Лему 4 доведено.

Теорема 2. *Відображення $\psi\colon u \to GL^p_u(V)$ є ізоморфним зануренням ґратки супернатуральних чисел відносно порядку $\mid$ у ґратку підгруп групи $GL_{rc}(V)$ за включенням.*

Доведення. Якщо $u, v \in SN$ — такі числа, що $u \mid v$, то будь-який натуральний дільник u є одночасно дільником v. Отже, для довільного $n \in N$, $n \mid u$, маємо $GL^p_n(V) \subset GL^p_u(V)$. Звідси

$$\bigcup_{n\,|\,u} GL_n^p(V) \subseteq GL_v^p(V),$$

тобто $GL_u^p(V) \subseteq GL_v^p(V)$. Отже, відображення ψ узгоджене з відношенням порядку $|$ на SN і $\subseteq$ на множині підгруп групи $GL_{rc}(V)$.

Залишилося перевірити, що ψ є ін'єктивним відображенням, тобто для довільних супернатуральних чисел u, v з того, що $u \neq v$, випливає $GL_u^p(V) \neq GL_v^p(V)$. Припустимо, для визначеності, що $u\,|\,v$. Тоді існують такі просте число p і натуральне число k, що $p^k\,|\,v$, але $p^k \nmid u$. Тому в другому з розкладів

$$GL_u^p(V) = \bigcup_{n\,|\,u} GL_n^p(V), \quad GL_v^p(V) = \bigcup_{m\,|\,v} GL_m^p(V)$$

є доданки, яких немає в першому, але кожен доданок першого розкладу міститься в другому. Звідси дістаємо $GL_u^p(V) \neq GL_v^p(V)$.

Теорему 2 доведено.

***Наслідок* 1.** *Сім'я підгруп $GL_u^p(V)$, $u \in SN$, групи $GL_{rc}(V)$ щодо включення утворює підґратку в ґратці всіх підгруп групи $GL_{rc}(V)$. Ця підґратка ізоморфна ґратці супернатуральних чисел, тобто є повною.*

***Зауваження* 2.** Підгрупи $GL_u^p(V)$, які індексуються нескінченними супернатуральними числами, утворюють верхню напівґратку. Мінімальними елементами цієї напівґратки будуть підгрупи вигляду $GL_{p^\infty}^p(V)$, де p — деяке просте число.

4. Групи $GL_u^p(K)$ як індуктивні границі. Для довільного супернатурального числа u група u-періодично визначених невироджених лінійних перетворень простору V та її матричний аналог природним чином можуть бути сконструйовані за допомогою індуктивних границь. Опишемо цю конструкцію для матричних груп. Нехай k, n — натуральні числа.

Означення 4. *Діагональним зануренням кратності k групи $GL_n(K)$ назвемо її занурення d^k у групу $GL_{kn}(K)$, визначене рівністю*

$$d^k(a) = \underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{k}, \qquad a \in GL_n(K). \tag{10}$$

Безпосередньо перевіряється, що d^k є мономорфізмом $GL_n(K)$ в $GL_{kn}(K)$.

Нехай тепер $\chi = (n_i)_{i \in N}$ — подільна послідовність натуральних чисел, $s_1 = n_2/n_1$, $s_2 = n_3/n_2$, ... — послідовність факторів для χ. Для довільного $i \in N$ визначимо занурення d^{s_i} вигляду (10) групи $GL_{n_i}(K)$ в групу $GL_{n_{i+1}}(K)$. Таким чином, дістаємо прямий спектр груп

$$D(\chi) = \langle GL_{n_i}(K), d^{s_i} \rangle_{i \in N}. \tag{11}$$

Означення 5. *Граничну групу прямого спектра* (11) *назвемо граничною діагональною лінійною групою індексу χ.*

Теорема 3. *Гранична діагональна лінійна група індексу χ ізоморфна групі періодично визначених лінійних перетворень $GL_u^p(K)$, яка задається супернатуральним числом $u = \operatorname{char}\chi$.*

Доведення. Послідовність занурень $d^{s_1}, d^{s_2}, \ldots$ вигляду (10) однозначно визначає занурення $d\colon GL_{n_i}(K) \to GL_{rc}(K)$, причому має місце включення

$$d(GL_{n_i}(K)) \subset GL_{n_{i+1}}^p(K), \qquad i \in N.$$

При фіксованій базі B простору V група $d(GL_{n_i}(K))$ ізоморфна $GL^p_{n_i}(K)$. Кожна нитка $\lambda = = a_1 a_2 \ldots$ граничної групи

$$G = \varinjlim_i \, (GL_{n_i}(K), d^{s_i})_{i \in N}$$

однозначно задає нескінченну матрицю $d(\lambda)$, тобто маємо відображення граничної групи G в групу $\bigcup_{i=1}^{\infty} GL^p_{n_i}(K)$. Очевидно, це відображення є бієкцією, а узгодженість з груповими операціями в цих групах перевіряється безпосередньо. Отже, це відображення є ізоморфізмом, звідки й дістаємо потрібне.

Теорему 3 доведено.

5. Нормальні дільники групи $GL^p_u(K)$, $u \in SN \backslash N$. Для довільних натуральних чисел n, s ізоморфне занурення $d^s \colon GL_n(K) \to GL_{ns}(K)$ обмежується до занурення $SL_n(K) \to \to SL_{ns}(K)$, яке позначатимемо тим же символом. Тому для довільної подільної послідовності $\chi = (n_i)_{i \in N}$ з послідовністю факторів $(s_i)_{i \in N}$ можна розглядати прямий спектр груп

$$S(\chi) = \langle SL_{n_i}(K), d^{s_i} \rangle_{i \in N}. \tag{12}$$

Означення 6. *Граничну групу прямого спектра* (12) *називатимемо граничною спеціальною діагональною лінійною групою індексу* χ.

Зрозуміло, що групу $\varinjlim_i \, (SL_{n_i}(K), d^{s_i})_{i \in N}$ можна розглядати як підгрупу граничної групи прямого спектра $D(\chi)$, а отже, як підгрупу групи $GL^p_u(K)$, де $u = \operatorname{char} \chi$. Вона складається з блоково-діагональних матриць $a^{\oplus \omega}$, для яких $\det a = 1$. Позначатимемо цю групу символом $SL^p_u(K)$.

Лема 5. *Підгрупа $SL^p_u(K)$ збігається з комутантом групи $GL^p_u(K)$.*

Доведення. Для довільного набору групових слів $\mathcal{V}$ (елементів вільної групи зліченного рангу) оператори взяття вербальної $\mathcal{V}$-підгрупи і переходу до індуктивної границі комутують, тобто якщо $G = \varinjlim_i G_i$, то $\mathcal{V}(G) = \varinjlim_i \mathcal{V}(G_i)$. Застосовуючи цей факт до прямого спектра $D(\chi)$, $u = \operatorname{char} \chi$, і набору слів $\mathcal{V} = \{[x_1, x_2]\}$, дістаємо

$$\left(\varinjlim_i \, \langle GL_{n_i}(K), d^{s_i} \rangle_{i \in N}\right)' = \varinjlim_i \, \langle GL'_{n_i}(K), d^{s_i} \rangle_{i \in N} =$$

$$= \varinjlim_i \, \langle SL_{n_i}(K), d^{s_i} \rangle_{i \in N} = SL^p_u(K).$$

Лему 5 доведено.

Нехай $K^{*\,\omega}$ — група нескінченних послідовностей над мультиплікативною групою K^* поля K відносно дії множення. Послідовність $\chi = (k_i)_{i \in N}$ назвемо u-виділеною, де $u \in SN$, якщо існує натуральне число n, $n \,|\, u$, таке, що послідовність χ має вигляд $\chi = (1, \ldots, 1, a, 1, \ldots \ldots, 1, a, \ldots)$, де елемент $a \in K^*$, $a \neq 1$, зустрічається на місцях з номерами ln, $l \in N$. Підгрупу групи нескінченновимірних діагональних матриць над K, породжену всіма матрицями, на головній діагоналі яких стоять деякі u-виділені послідовності, позначимо $D^*_u(K)$.

Лема 6. *Для довільного супернатурального числа u фактор-група $GL^p_u(K) \,/\, SL^p_u(K)$ ізоморфна групі $D^*_u(K)$.*

Доведення. Кожну невироджену матрицю $a \in GL_n(K)$ можна розкласти на добуток двох матриць

$$a = a' \cdot b, \qquad a' \in SL_n(K), \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d \end{pmatrix},$$

де $d = \det a$. Тому кожну нескінченновимірну клітинно-діагональну матрицю $a \in GL(K)$ з клітинами вздовж діагоналі того самого розміру n можна розкласти на добуток двох клітинно-діагональних матриць з клітинами вздовж діагоналі того ж розміру n, причому клітини першої матриці завжди належать до $SL_n(K)$, а другої мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix},$$

де d — визначник відповідної клітини першої матриці. Звідси випливає, що будь-яка матриця вигляду $a^{\oplus\omega}$, $a \in GL_n(K)$, $n \,|\, u$, є добутком матриці з $SL_u^p(K)$ на матрицю з $D_u^*(K)$. Відображення, яке матриці a ставить у відповідність множник із $D_u^*(K)$ у такому розкладі, і буде потрібним ізоморфізмом.

Лему 6 доведено.

Як відомо, центр спеціальної лінійної групи $SL_n(K)$ складається зі скалярних матриць $a \cdot E$, де a — деякий корінь n-го степеня з 1 у полі K. Для супернатурального числа u символом C_u позначимо множину нескінченновимірних скалярних матриць $a \cdot e$, для яких a — корінь n-го степеня з 1 при деякому n, $n \,|\, u$. Зафіксувавши подільну послідовність $\chi = (n_i)_{i \in N}$ таку, що $\operatorname{char} \chi = u$, запишемо групу $GL_u^p(K)$ у вигляді об'єднання зростаючого ланцюга підгруп $GL_{n_1}(K) \subset GL_{n_2}(K) \subset \ldots$. Тоді $C_{n_1} \subset C_{n_2} \subset \ldots$ — зростаючий ланцюг відповідних нормальних підгруп скалярних матриць і $C_u = \bigcup_i C_{n_i}$ є нормальною в $GL_u^p(K)$.

Лема 7. *Нормальна підгрупа C_u збігається з центром групи $SL_u^p(K)$.*

Доведення. Кожна матриця з C_u комутує з довільною матрицею з $GL_u^p(K)$, а отже, міститься в центрі $SL_u^p(K)$. З іншого боку, центральні елементи в діагональному нескінченновимірному зануренні мають, як випливає з викладеного вище, необхідний вигляд, звідки й дістаємо потрібне.

Лему 7 доведено.

Теорема 4. *Для довільного супернатурального числа u фактор-група $SL_u^p(K)$ за центром C_u є простою групою.*

Доведення. При діагональному зануренні $d^s : SL_n(K) \to SL_{ns}(K)$ центр $SL_n(K)$ відображається в центральну підгрупу $SL_{ns}(K)$, причому занурення d^s індукує мономорфізм $\widehat{d^s} : PSL_n(K) \to PSL_{ns}(K)$. Звідси випливає, що фактор-група $SL_u^p(K)/C_u$ ізоморфна граничній групі прямого спектра спеціальних проективних лінійних груп. Оскільки кожна з цих груп є простою, то й гранична група цього прямого спектра є простою.

Теорему 4 доведено.

***Зауваження* 3.** Фактор-групу $SL_u^p(K)$ за центром C_u природно позначати символом $PSL_u^p(K)$ і називати граничною спеціальною проективною діагональною лінійною групою, яка визначається супернатуральним числом u.

Таким чином, отримуємо континуальну сім'ю простих груп, які параметризуються супернатуральними числами. Якщо поле K є локально скінченним, то кожна група цієї сім'ї буде локально скінченною групою.

Використавши теорему 4, охарактеризуємо ґратку нормальних дільників групи $GL_u^p(K)$. Для довільних ґраток Γ_1 і Γ_2 символом $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ позначимо їх з'єднання в такому ж порядку, тобто ґратку, елементами якої є елементи Γ_1 і Γ_2, причому ці дві підмножини елементів не перетинаються і кожен елемент із Γ_1 є більшим за будь-який елемент з Γ_2. Нехай $\Gamma_u(K)$ — ґратка підгруп групи $D_u^*(K)$, $\Delta_u(K)$ — ґратка підгруп групи C_u, а $\Lambda(K)$ — ґратка підгруп мультиплікативної групи K^* поля K. Оскільки група скалярних матриць із $GL_u^p(K)$ ізоморфна K^*, ґратку $\Delta_u(K)$ можна розглядати як підґратку ґратки $\Lambda(K)$.

Теорема 5. *Ґратка нормальних підгруп групи $GL_u^p(K)$ ізоморфна ґратці вигляду*

$$\Big(\,\Gamma_u(K)\,\circ\,\Delta_u(K)\,\Big)\bigcup\Big(\,\Lambda(K)\setminus\Delta_u(K)\,\Big).$$

Доведення. З теореми 4 легко отримуємо, що кожен нормальний дільник групи $GL_u^p(K)$ або міститься в її центрі, або містить її комутант. При цьому ті елементи центра $Z(GL_u^p(K))$, які містяться в $SL_u^p(K)$, належать підгрупі C_u. Кожна підгрупа $A < D_u^*(K)$ визначає певну надгрупу комутанта $SL_u^p(K)$ в $GL_u^p(K)$ — повний прообраз A при природному гомоморфізмі $GL_u^p(K)$ на $GL_u^p(K)\,/\,SL_u^p(K)$. А ґратка всіх підгруп групи $GL_u^p(K)$, які містять $SL_u^p(K)$, як легко зрозуміти, ізоморфна ґратці $\Gamma_u(K)$. Тому ті нормальні підгрупи групи $GL_u^p(K)$, які або містять $SL_u^p(K)$, або містяться в ній, утворюють ґратку, яка ізоморфна з'єднанню ґраток $\Gamma_u(K)\circ\Delta_u(K)$. Усі інші нормальні підгрупи $GL_u^p(K)$ містяться в центрі $Z(GL_u^p(K))$, тобто належать до множини підгруп $\Lambda(K)\setminus\Delta_u(K)$.

Теорему 5 доведено.

***Зауваження* 4.** За допомогою теорем 4 і 5 аналогічно можна охарактеризувати ґратку нормальних підгруп групи $GL_u^{sp}(K)$.

1. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **119**. – P. 400 – 448.
2. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey // Finite and Locally Finite Groups. – Kluwer Acad. Publ., 1995. – P. 111 – 146.
3. *Hall J. I.* Infinite alternating groups an finitary linear transformation groups // J. Algebra. – 1988. – **119**. – P. 337 – 359.
4. *Hall J.I.* Locally finite simple groups of finitary linear transformations // Finite and Locally Finite Groups. – Kluwer Acad. Publ., 1995. – P. 147 – 188.
5. *Belyaev V. V.* Structure of periodic finitary transformation groups // Algebra and Logic. – 1994. — **33**. – P. 195 – 204.
6. *Belyaev V. V.* Semisimple periodic groups of finitary transformations // Algebra and Logic. – 1993. – **32**. – P. 17 – 33.
7. *Kegel O., Wehrfritr B.* Locally finite groups. – Amsterdam: Noth-Holland, 1973. – 210 p.
8. *Leinen F., Pugliri O.* Cofined subgroups in periodic simple linear groups // Isr. J. Math. – 2002. – **128**. – P. 285 – 324.
9. *Hall J. I.* Periodic simple groups of finitary linear transformations // Ann. Math. – 2006. – **163**. – P. 445 – 498.
10. *Glimm J. G.* On sertain class of operator algebras // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – **95**. – P. 318 – 340.
11. *Bratteli O.* Inductive limits of finite dimentional algebras // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **171**. – P. 195 – 234.
12. *Baranov A. A.* Simple diagonal locally finite Lie algebras // Proc. London Math. Soc. – 1998. – **77**. – P. 362 – 386.
13. *Baranov A. A., Zhylinskii A. G.* Diagonal direct limits of simple Lie algebras // Communs Algebra. – 1999. – **27**. – P. 2749 – 2766.
14. *Kroshko N., Sushchansky V.* Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings // Arch. Math. – 1998. – **71**. – P. 173 – 182.
15. *Lavreniuk Ya., Nekrashevych V.* On classification of inductive limits of direct products of alternating groups // J. London Math. Soc. – 2007. – **75**. – P. 146 – 162.
16. *Vermes P.* Multiplicative groups of row- and column-finite matrices // Ann. Univ. Sci. Budapest Eotuos. Sec. Math. – 1962. – **5**. – P. 15 – 23.
17. *Holubowski W.* Groups of infinite matrices // Groups St. Andrews 2005. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. – Vol. 2. – P. 491 – 496.
18. *Голубовский В.* Новая мера роста групп и алгебр // Алгебра и анализ. – 2007. – № 19. – С. 69 – 91.

Одержано 13.11.14