УДК 517.946

І. М. Ісарюк, І. Д. Пукальський (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНИМИ УМОВАМИ І ВИРОДЖЕННЯМ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

We consider the second boundary-value problem for a parabolic equation with power singularities in the coefficients in space variables and impulsive conditions in the time variable. By using the maximum principle and *a priori* estimates, we establish the existence and uniqueness of the solution of the posed problem in Hölder spaces with power weights.

Рассмотрена вторая краевая задача для параболического уравнения со степенными особенностями в коэффициентах по пространственным переменным и импульсными условиями по временной переменной. С помощью принципа максимума и априорных оценок установлено существование и единственность решения поставленной задачи в гельдеровых пространствах со степенным весом.

Вступ. Математичне моделювання багатьох фізичних та хімічних явищ приводить до задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними. Зокрема, у рівнянні Шредінгера, яке описує стан квантомеханічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [1]. Дослідженню крайових задач з виродженнями та особливостями для рівнянь із частинними похідними присвячено праці [2 – 7]. У монографіях [5, 6] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші та крайових задач у просторах максимально широких класів функцій для рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких мають степеневі особливості обмеженого порядку на межі області.

Вивчення задач теорії автоматичного керування, теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до розв'язання періодичних крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчені у працях А. М. Самойленка і О. М. Перестюка [8, 9].

Питання існування періодичних розв'язків рівняння з частинними похідними гіперболічного типу з імпульсною дією вивчались у працях [11 – 13]. Класичним розв'язкам задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією присвячено другий розділ монографії [14].

У даній статті розглядається задача для лінійного параболічного рівняння другого порядку з імпульсними умовами за часовою змінною і степеневими особливостями довільного порядку у коефіцієнтах за просторовими змінними на координатних площинах. За допомогою апріорних оцінок та принципу максимуму встановлено існування та єдиність розв'язку поставленої задачі у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1. Постановка задачі та основні обмеження. Нехай $(x_1, \ldots, x_n)$ — координати точки $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j = \{x, x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j$, D — обмежена область з множини $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \in \mathbb{R}^n | x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, n\}\}$ з межею ∂D така, що $\partial D \cap \Omega_j \neq \varnothing$, $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$ — фіксовані додатні числа, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N+1}$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t, x)$, яка при $t \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1, \ldots, N\}$, $x \in D$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x), \qquad (1)$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x)=\varphi_0(x), \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x)-u(t_\lambda-0,x)=\psi_\lambda(t_\lambda,x)u(t_\lambda-0,x)+\varphi_\lambda(t_\lambda,x) \tag{3}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\to z\in\partial D}(\mathcal{B}u-g)(t,x)\equiv\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{k=1}^{n}b_k(t,x)\partial_{x_k}u+b_0(t,x)u-g(t,x)\right]=0. \tag{4}$$

Виродження коефіцієнтів рівняння (1) і крайової умови (4) у точці $P(t,x)\in D$ буде характеризувати функція $s(a_i,x_i)$, $s(a_i,x_i)=x_i^{a_i}$ при $0\le x_i\le 1$ і $s(a_i,x_i)=1$ при $x_i\ge 1$, a_i — дійсні числа, $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Позначимо через q, l, γ, μ_j, β_i, δ, α дійсні числа, $\alpha\in(0,1)$, $\gamma\ge 0$, $\mu_j\ge 0$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, $\beta_i\in(-\infty,+\infty)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\delta\ge 0$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $[l]$ — ціла частина l, $l=[l]+\{l\}$, l,q — додатні фіксовані числа.

Нехай $(x_1^{(1)},\ldots,x_i^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$ — координати точки $x^{(1)}$ області $\overline{D}=D\cup\partial D$, $(x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)}$, $x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$ — координати точки $x^{(2)}\in\overline{D}$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $R_i(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)}$, $x^{(2)})$ — довільні точки області $\overline{Q}=[t_0,t_{N+1})\times\overline{D}$, $Q^{(k)}=[t_k,t_{k+1})\times D$, $S(\gamma,x)=\min_i\{s(\gamma,x_i)\}$.

Означимо функціональний простір, в якому будемо вивчати задачу (1)–(4).

$C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ — множина функцій u, які мають неперервні частинні похідні при $t\ne t_\lambda$, $x\in D$ вигляду $\partial_t^i\partial_x^r u$, $2i+|r|\le[l]$, для яких скінченною є норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l=\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{[l]}+\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_l,$$

де

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0=\sup_k\{\sup_{\overline{Q^{(k)}}}|u|\}\equiv\|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{[l]}=\sup_k\sum_{2i+|r|\le[l]}\sup_{P\in Q^{(k)}}S(q+(2i+|r|)\gamma,x)\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,x_j)|\partial_t^i\partial_x^r u(P)|,$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_l=\sup_k\Bigg\{\sum_{2i+|r|=[l]}\sum_{\nu=1}^{n}\sup_{(P_1,H_\nu)\subset Q^{(k)}}\Bigg[S(q+l\gamma,\tilde{x})\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,\tilde{x_j})\times$$

$$\times|\partial_t^i\partial_x^r u(P_1)-\partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu)||x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}s(-\{l\}\beta_\nu,\tilde{x_\nu})\Bigg]+$$

$$+\sum_{2i+|r|=[l]}\sum_{\nu=1}^{n}\sup_{(R_\nu,H_\nu)\subset Q^{(k)}}S(q+l\gamma,x^{(2)})\prod_{j=1}^{n}s(-r_j\beta_j,\tilde{x_j^{(2)}})\times$$

$$\times|\partial_t^i\partial_x^r u(R_\nu)-\partial_t^i\partial_x^r u(H_\nu)||t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2}\right\}}\Bigg\},$$

$r = r(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — мультиіндекс на невід'ємних цілих числах, $|r| = r_1 + \ldots + r_n$, $S(a, \tilde{x}) = \min\{S(a, x^{(1)}), S(a, x^{(2)})\}$, $s(a_i, \tilde{x}_i) = \min\{s(a_i, x_i^{(1)}), s(a_i, x_i^{(2)})\}$.

Щодо параметрів задачі (1) – (4) вважаємо виконаними такі умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) A_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \le \pi_2 |\xi|^2,$$

де π_1, π_2 — фіксовані додатні сталі, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ та $s(\beta_i, x_i) s(\beta_j, x_j) A_{ij} \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s(\mu_i, x_i) A_i \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $s(\mu_0, x) A_0 \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $\inf_{\bar{Q}} A_0 \equiv a > 0$, $f \in C^{\alpha}(\gamma; \beta; \mu_0; Q)$, $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; D)$, $\varphi_\lambda \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_\lambda))$;

б) вектори $\overrightarrow{b}^{(s)} = \{s(\beta_1, x_1) b_1, \ldots, s(\beta_n, x_n) b_n\}$ і $\overrightarrow{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до Γ в точці $P(t, x) \in \Gamma$ кут менший за $\dfrac{\pi}{2}$; $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $s(\beta_i, x_i) b_i \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $S(\delta, x) b_0 \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$, $b_0(t, x)|_{\Gamma} > 0$, $g \in C^{1+\alpha}(\gamma; \beta; \delta; Q)$, $\psi_\lambda \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda))$, $\lim_{x \to z \in \partial D} (\mathcal{B}\varphi_0 - g)(t_0, x) = 0$,

$$[g(t_\lambda + 0, x) - g(t_\lambda - 0, x)]|_{\partial D} = [\psi_\lambda(t_\lambda, x) g(t_\lambda - 0, x) + \mathcal{B}\varphi_\lambda(t_\lambda, x)]|_{\partial D},$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k(t, x) \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x}\bigg|_{\partial D} = 0, \quad \gamma = \max\left\{\max_i (1 + \beta_i), \max_i (\mu_i - \beta_i), \frac{\mu_0}{2}, \delta\right\}.$$

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1) – (4) *виконано умови* а), б). *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (4) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ *і виконується нерівність*

$$\|u; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \le c \left\{ \sum_{k=1}^{N} \prod_{\lambda=k}^{N} (1 + \|\psi_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0) \times \right.$$
$$\times (\|\varphi_{k-1}; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k-1)}\|_{\alpha} +$$
$$+ \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha}) + \|\varphi_N; \gamma; \beta; 0; Q \cap (t = t_N)\|_{2+\alpha} +$$
$$\left. + \|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(N)}\|_{\alpha} + \|g; \gamma; \beta; \delta; Q^{(N)}\|_{1+\alpha} \right\}. \tag{5}$$

Для дослідження задачі (1) – (4) встановимо спочатку існування та єдиність розв'язків множини крайових задач із гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1) – (4).

2. Оцінка розв'язків крайових задач із гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \bigcap \{(t, x) \in Q^{(k)} | s(1, x_i) \ge m^{-1}\}$, $m \ge 1$, — послідовність областей, яка при $m \to \infty$ збігається до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t, x)$, які при $t \ne t_\lambda$ задовольняють рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\right] u_m(t,x) = f_m(t,x), \quad (6)$$

умови за змінною t:

$$u_m(t_0+0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \quad (7)$$

$$u_m(t_\lambda+0,x) - u_m(t_\lambda-0,x) = \psi_\lambda(t_\lambda,x)u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x) \quad (8)$$

і крайову умову

$$(\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(t,x)|_\Gamma \equiv \left.\left[\sum_{k=1}^{n} h_k(t,x)\partial_{x_k}u_m + h_0(t,x)u_m - g_m(t,x)\right]\right|_\Gamma = 0. \quad (9)$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 і функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в області $Q_m^{(k)}$ збігаються з коефіцієнтами A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0 і функціями f, φ_0, φ_λ, g відповідно, а в областях $Q \setminus Q_m^{(k)}$ вони є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0 і функцій f, φ_0, φ_λ, g із областей $Q_m^{(k)}$ в область $Q \setminus Q_m^{(k)}$ із збереженням норм і гладкості [15, с. 82].

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $u_m(t,x)$ — *класичний розв'язок задачі* (6)–(9) *в області* Q *і виконано умови* а), б). *Тоді для* $u_m(t,x)$ *справджується оцінка*

$$|u_m(t,x)| \le \sum_{k=1}^{N} \left\{ \prod_{\lambda=k}^{N} (1 + \|\psi_\lambda; Q \cap (t=t_\lambda)\|_0) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\|\varphi_m^{(k-1)}; Q \cap (t=t_{k-1})\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}\|_0 + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(k-1)}\|_0 \right) \right\} +$$

$$+ \|\varphi_N; Q \cap (t=t_N)\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(N)}\|_0 + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(N)}\|_0. \quad (10)$$

Доведення. Нехай $\max_{\overline{Q^{(k)}}} u_m(t,x) = u_m(R_1)$. Якщо точка $R_1 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то виконується умова (9). Оскільки $\dfrac{du_m(R_1)}{d\vec{b}} \ge 0$ (вектор $\vec{b}$ задовольняє умову б)), то з рівності $(\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(R_1) = 0$ маємо

$$u_m(R_1) \le \sup_{\overline{Q^{(k)}}} (g_m \cdot h_0^{-1}). \quad (11)$$

Якщо $R_1(t,x) \in Q^{(k)}$, то в точці R_1 мають місце співвідношення

$$\partial_t u_m(R_1) \ge 0, \quad \partial_{x_i} u_m(R_1) = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(R_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(R_1) \le 0 \quad (12)$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (12) і рівняння (6) у точці R_1 виконується нерівність

$$u_m(R_1) \leq \sup_{\overline{Q^{(k)}}} (f_m \cdot a_0^{-1}). \tag{13}$$

Нехай $\min_{\overline{Q^{(k)}}} u_m(t,x) = u_m(R_2)$. Якщо точка $R_2 \in [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, то $\dfrac{du_m(R_2)}{d\vec{b}} \leq 0$. Враховуючи крайову умову (9), маємо

$$u_m(R_2) \geq \inf_{\overline{Q^{(k)}}} (g_m \cdot h_0^{-1}). \tag{14}$$

Якщо $R_2(t,x) \in Q^{(k)}$, то в точці R_2 виконуються співвідношення

$$\partial_t u_m(R_2) \leq 0, \quad \partial_{x_i} u_m(R_2) = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(R_2) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_m(R_2) \geq 0 \tag{15}$$

і задовольняється рівняння (6). З урахуванням (15) і рівняння (6) в точці R_2 маємо

$$u_m(R_2) \geq \inf_{\overline{Q^{(k)}}} (f_m \cdot a_0^{-1}). \tag{16}$$

У випадку, коли $R_1 \in \overline{D}$ або $R_2 \in \overline{D}$, з початкової умови (7) одержуємо

$$|u_m| \leq \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0. \tag{17}$$

Враховуючи нерівності (11), (13), (14), (16), (17) при $k = 0$, отримуємо

$$\|u_m; Q^{(0)}\|_0 \leq \|f_m a_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0 + \|\varphi_m^{(0)}; D\|_0 + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(0)}\|_0. \tag{18}$$

Якщо $R_1 \in Q \cap (t = t_\lambda)$ або $R_2 \in Q \cap (t = t_\lambda)$, $\lambda \geq 1$, то, враховуючи умову (8), одержуємо співвідношення

$$\|u_m; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0 \leq (1 + \|\psi_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0) \|u_m; Q^{(\lambda-1)}\|_0 + \|\varphi_m^{(\lambda)}; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0, \tag{19}$$

$$\lambda \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Об'єднуючи нерівності (11), (13), (14), (16), (18), (19), отримуємо нерівність (10).

Теорему 2 доведено.

В області $Q^{(k)}$ розглянемо крайову задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x),$$

$$u_m(t_k + 0, x) = G_m^{(k)}(t_k, x), \tag{20}$$

$$(\mathcal{B}_1 u_m - g_m)(t,x)|_{\Gamma^{(k)}} \equiv 0,$$

де $\Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times \partial D$, $G_m^{(0)}(t_0, x) = \varphi_m^{(0)}(x)$, $x \in D$, $G_m^{(k)}(t_k, x) = (1 + \psi_k(t_k, x)) u_m(t_k - 0, x) + \varphi_m(t_k, x)$, $x \in Q \cap (t = t_k)$, $k \in \{1, \ldots, N\}$.

При виконанні умов а), б) розв'язок крайової задачі (20) в області $Q^{(k)}$ існує і єдиний у просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ [7, 14]. Знайдемо оцінку похідних розв'язку $u_m(t,x)$.

Введемо у просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|u_m; \gamma; \beta; q; Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u; \gamma; \beta; q; Q\|_l$, лише замість функцій $s(a_i, x_i)$ беремо $d(a_i, x_i)$, де $d(a_i, x_i) = \max(s(a_i, x_i), m^{-a_i})$ при $a_i \geq 0$ і $d(a_i, x_i) = \min(s(a_i, x_i), m^{-a_i})$ при $a_i < 0$.

Справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді для розв'язку задачі* (6)–(9) *правильною є оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\Bigg\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|\psi_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times$$

$$\times(\|\varphi_{k-1};\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_\alpha+\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha})\Bigg\}+\|\varphi_N;\gamma;\beta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(N)}\|_\alpha+\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\Bigg\}. \tag{21}$$

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності із [15, 16], маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q^{(k)}\|_0,$$

де ε — довільне дійсне число із $(0;1)$. Тому досить оцінити напівнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення напівнорми випливає існування в області $Q^{(k)}$ точок P_1, R_i, H_i, для яких виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\,\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}\le E_\mu,\quad \mu\in\{1,2\}, \tag{22}$$

де

$$E_1=\sum_{2i+|r|=2}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\alpha}S_1((2+\alpha)\gamma,\tilde x)d(-\alpha\beta_\nu,\tilde x_\nu)\prod_{j=1}^{n}d(-r_j\beta_j,\tilde x_j)\times$$

$$\times|\partial_t^i\partial_x^r u_m(H_\nu)-\partial_t^i\partial_x^r u_m(P_1)|,$$

$$E_2=\sum_{2i+|r|=2}\sum_{\nu=1}^{n}|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}S_1((2+\alpha)\gamma,\tilde x)\prod_{j=1}^{n}d(-r_j\beta_j,\tilde x_j)\times$$

$$\times|\partial_t^i\partial_x^r u_m(H_\nu)-\partial_t^i\partial_x^r u_m(R_\nu)|.$$

Тут $d(a_j,\tilde x_j)=\min(d(a_j,x_j^{(1)}),\,d(a_j,x_j^{(2)}))$, $S_1(a,\tilde x)=\min(\min_i d(a,x_i^{(1)}),\,\min_i d(a,x_i^{(2)}))$.

Нехай $|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|\le n^{-1}d(\gamma-\beta_\nu,\tilde x_\nu)\dfrac{\varepsilon_1}{4}\equiv T_1$, ε_1 — довільне число з інтервалу $(0;1)$, $|t^{(1)}-t^{(2)}|\le S_1(2\gamma,\tilde x)\dfrac{\varepsilon_1^2}{16}\equiv T_2$. Будемо вважати $|x_\nu^{(1)}-y_\nu|\ge 4T_1$, $y\in\partial D$ і $d(\gamma,\tilde x_j)=d(\gamma,x_j^{(1)})$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})\in Q^{(k)}$, $k\in\{0,1,\ldots,N\}$.

В області $Q^{(k)}$ задачу (20) запишемо у вигляді

$$\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]u_m=\sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(P)-a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m-\sum_{i=1}^{n}a_i(P)\partial_{x_i}u_m-$$

$$-a_0(P)u_m = f_m(t,x) \equiv F(t,x;u_m), \tag{23}$$

$$u_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x), \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)\partial_{x_i}u_m\Big|_{\Gamma^{(k)}} = \left\{\sum_{i=1}^{n}[h_i(P_1)-h_i(P)]\partial_{x_i}u_m - h_0(P)u_m + g_m(P)\right\}\Big|_{\Gamma^{(k)}} \equiv$$

$$\equiv \Phi_m(t,x;u_m)|_{\Gamma^{(k)}}\,. \tag{25}$$

Нехай V_τ — область із $Q^{(k)}$, $V_\tau = \{(t,x) \in Q^{(k)} : |t-t^{(1)}| \le \tau^2 T_2, |x_j - x_j^{(1)}| \le \tau T_1\}$. В задачі (23)–(25) виконаємо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, де $y_j = d(\beta_j, x_j^{(1)})x_j$. В результаті одержимо

$$(L_2v_m)(t,y) \equiv \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d\left(\beta_i,x_i^{(1)}\right)d\left(\beta_j,x_j^{(1)}\right)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right]v_m = F(t,Y;v_m), \tag{26}$$

$$v_m(t_k+0,y) = G_m^{(k)}(t_k,Y), \tag{27}$$

$$(\mathcal{B}_2v_m)(t,y)|_{\Gamma^{(k)}} \equiv \sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)d\left(\beta_i,x_i^{(1)}\right)\partial_{y_i}v_m\Big|_{\Gamma^{(k)}} = \Phi_m(t,Y;v_m)\Big|_{\Gamma^{(k)}}, \tag{28}$$

де $Y = \left(d\left(-\beta_1,x_1^{(1)}\right)y_1,\ldots,d\left(-\beta_n,x_n^{(1)}\right)y_n\right)$.

Позначимо $y_j^{(1)} = d(\beta_j,x_j^{(1)})x_j^{(1)}$, $V_\tau^{(1)} = \{(t,y) : |t-t^{(1)}| \le \tau^2T_2, |y_j - y_j^{(1)}| \le \tau\sqrt{T_1}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in V_{1/2}^{(1)}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y) \notin V_{3/4}^{(1)}, \quad |\partial_t^i\partial_y^r\eta| \le c_{ri}S_1(-(2i+|r|)\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $\omega_m(t,y) = v_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_3\omega_m)(t,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i,x_i^{(1)})d(\beta_j,x_j^{(1)})\{\partial_{y_i}v_m\partial_{y_j}\eta + \partial_{y_j}v_m\partial_{y_i}\eta + v_m\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta\}+$$

$$+\eta F(t,Y;v_m) - \omega_m\partial_t\eta \equiv F_1(t,y;v_m), \tag{29}$$

$$\omega_m(t_k+0,y) = G_m^{(k)}(t_k,Y)\eta(t_k+0,y), \tag{30}$$

$$(\mathcal{B}_3\omega_m)(t,y)|_{\Gamma^{(k)}} \equiv \left[\eta(t,y)\Phi_m(t,Y;v_m) - v_m\sum_{i=1}^{n} h_i(P_1)d(\beta_i,x_i^{(1)})\partial_{y_i}\eta\right]\Bigg|_{\Gamma^{(k)}} =$$

$$= \Phi_m^{(1)}(t,Y;v_m)\Big|_{\Gamma^{(k)}}. \tag{31}$$

На підставі теореми 5.3 із [7, с. 264] для розв'язку задачі (29)–(31) і довільних точок $\{M_1, M_2\} \subset V_{1/2}^{(1)}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)|\partial_t^i \partial_y^r v_m(M_1) - \partial_t^i \partial_y^r v_m(M_2)| \leq c(\|F_1\|_{C^{\alpha}(V_{3/4}^{(1)})} +$$

$$+\|\eta G_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)} \cap (t=t_k))} + \|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}^{(1)} \cap \Gamma^{(k)})}), \tag{32}$$

де $2i + |r| = 2$, $d(M_1, M_2)$ — параболічна відстань між точками M_1 і M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, y)$, знаходимо

$$\|F_1\|_{C^{\alpha}(V_{3/4}^{(1)})} \leq cS_1\left(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)}\right)\left(\left\|f_m; \gamma; 0; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\right\|_{\alpha} + \left\|v_m; V_{3/4}^{(1)}\right\|_0 +\right.$$

$$\left.+\left\|v_m; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(1)}\right\|_2\right),$$

$$\|\eta G_m^{(k)}\|_{C^{2+\alpha}(V_{3/4}^{(1)} \cap (t=t_k))} \leq cS_1\left(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)}\right)\left\|G_m^{(k)}; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(1)} \cap (t=t_k)\right\|_{2+\alpha}, \tag{33}$$

$$\|\Phi_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(V_{3/4}^{(1)} \cap \Gamma^{(k)})} \leq cS_1\left(-(2+\alpha)\gamma, x^{(1)}\right)\left(\left\|g_m; \gamma; 0; \gamma; V_{3/4}^{(1)}\right\|_{1+\alpha} +\right.$$

$$\left.+\left\|v_m; V_{3/4}^{(1)}\right\|_{\alpha} + \left\|v_m; \gamma; 0; 0; V_{3/4}^{(1)}\right\|_2\right).$$

Підставляючи (33) у (32) і повертаючись до змінних (t, x), отримуємо нерівність

$$E_\mu \leq \left(\varepsilon^{\alpha}(n+2) + \varepsilon_1 C n^2\right)\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} + c\Bigg(\left\|f_m; \gamma; 0; 2\gamma; Q^{(k)}\right\|_{\alpha} +$$

$$+\left\|g_m; \gamma; \beta; \gamma; Q^{(k)}\right\|_{1+\alpha} + \left\|G_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t=t_k)\right\|_{2+\alpha} + \left\|u_m; Q^{(k)}\right\|_0\Bigg). \tag{34}$$

Враховуючи значення виразу $G_m^{(k)}(t_k, x)$ при $k = 0$, маємо

$$\|G_m^{(0)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(0)} \cap (t=t_0)\|_{2+\alpha} = \|\varphi_m^{(0)}; \gamma; \beta; 0; D\|_{2+\alpha}. \tag{35}$$

У випадку $k \geq 1$ одержимо нерівності

$$\left\|G_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t=t_k)\right\|_{2+\alpha} \leq \left(1 + \|\psi_k; Q^{(k)} \cap (t=t_k)\|_0\right) \times$$

$$\times\left(\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha} + \left\|\varphi_m^{(k)}; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)} \cap (t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\right). \tag{36}$$

Об'єднуючи нерівності (22), (34), (35), (36) і вибираючи ε, ε_1 достатньо малими, отримуємо нерівності

$$\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} \leq c\left(\left\|f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q^{(k)}\right\|_{\alpha} + \left\|g_m; \gamma; \beta; \delta; Q^{(k)}\right\|_{1+\alpha}\right) +$$

$$+\left(1+\left\|\psi_k; Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_0\right)\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}. \tag{37}$$

Розглянемо випадок $|x_\nu^{(1)}-y_\nu|\le 4T_1$, $y\in\partial D$. Для простоти вважаємо $\nu=n$. Нехай $K(P)$ — куля радіуса R_0, $R_0>4(T_1 n+T_2)$, з центром у деякій точці $P\in\Gamma^{(k)}$, яка містить точки H_j, R_j, P_1. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити межу $\partial D\cap K(P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=W(\xi)$ із [15, с. 126]. В результаті такого перетворення область $Q^{(k)}\cap K(P)$ перейде в область Π, для точок якої $\xi_n\ge 0$.

Вважаємо, що $u_m(t,x)$, P_1, H_j, R_j при цьому перетворенні переходять відповідно в $\omega_m(t,\xi)$, M_1, Z_j, Θ_j. Позначимо коефіцієнти диференціальних виразів L_1, $\mathcal{B}_1$ в області Π через $\tilde a_{ij}(t,\xi)$, $\tilde a_i(t,\xi)$, $\tilde a_0(t,\xi)$, $\tilde h_i(t,\xi)$, $\tilde h_0(t,\xi)$. Тоді $\omega_m(t,\xi)$ буде розв'язком задачі

$$\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^n\tilde a_{ij}(M_1)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\right]\omega_m=\sum_{i,j=1}^n[\tilde a_{ij}(t,\xi)-\tilde a_{ij}(M_1)]\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\omega_m-\sum_{i=1}^n\tilde a_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}\omega_m-$$

$$-\tilde a_0(t,\xi)\omega_m+f_m(t,W(\xi)),$$

$$\omega_m(t_k+0,\xi)=G_m^{(k)}(t_k,W(\xi)),$$

$$\sum_{i=1}^n\tilde h_i(M_1)\partial_{\xi_i}\omega_m\Big|_{\xi_n=0}=\left\{\sum_{i=1}^n\left[\tilde h_i(M_1)-\tilde h_i(t,\xi)\right]\partial_{\xi_i}\omega_m-\tilde h_0(t,\xi)\omega_m+g_m(t,W(\xi))\right\}\Bigg|_{\xi_n=0}.$$

Повторюючи міркування, наведені при знаходженні оцінок розв'язку задачі (23)–(25), і використовуючи при цьому теорему 6.1 із [7, с. 264], одержуємо нерівність (37).

Якщо $\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|\ge T_1$, то

$$E_1\le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_2. \tag{38}$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge T_2$, то

$$E_2\le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_2. \tag{39}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності до (38), (39), знаходимо

$$E_\mu\le\varepsilon^\alpha\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q^{(k)}\|_0. \tag{40}$$

Оскільки

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha\le c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha,$$

$$\|g_m;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha}\le c\|g;\gamma;\beta;\delta;Q^{(k)}\|_{1+\alpha},$$

$$\|\varphi_m^{(k)};\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}\le c\|\varphi_k;\gamma;\beta;0;Q^{(k)}\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha},$$

то, об'єднавши нерівності (37), (40), одержимо оцінку (21).

Теорему 3 доведено.

Доведення теореми **1.** Права частина нерівності (21) не залежить від m. Крім того, послідовності $\{U_m^{(0)}\} \equiv \{u_m\}$, $\{U_m^{(1)}\} \equiv \{S_1(\gamma, x)d(-\beta_i, x_i)\partial_{x_i} u_m\}$, $\{U_m^{(2)}\} \equiv \{S_1(2\gamma, x)\partial_t u_m\}$, $\{U_m^{(3)}\} \equiv \{S_1(2\gamma, x)d(-\beta_i, x_i)d(-\beta_j, x_j)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m\}$ рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в областях $Q^{(k)}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{U_{m(j)}^{(\mu)}\}$, які рівномірно збіжні в $Q^{(k)}$ до $\{U_0^{(\mu)}\}$ при $m(j) \to \infty$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Переходячи до границі при $m(j) \to \infty$ в задачі (6)–(9), одержуємо, що $u(t, x) = U_0^{(0)}$ — єдиний розв'язок задачі (1)–(4), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma; \beta; 0; Q)$.

1. *Зейтц Ф.* Современная теория твердого тела. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949. — 736 с.
2. *Базалий Б. В., Краснощек Н. В.* Классическая разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного сильно вырождающегося параболического уравнения // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 10. — С. 1299–1320.
3. *Бицадзе А. Б.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
4. *Han Pigong.* Asymptotic behavior of solutions to semilinear elliptic equations with Harby potential // Proc. Amer. Math. Soc. — 2007. — **135**, № 2. — P. 365–372.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.
6. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі з особливостями. — Чернівці: Прут, 2003. — 248 с.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
8. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulse differential equations. — Singapore: World Sci., 1995.
9. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities. — Berlin: Walter de Gruyter Co., 2011.
10. *Bainov D. D, Simeonov P. S.* Systems with impulse effect stability, theory and applications. — New York etc.: Halsted Press, 1989. — 345 p.
11. *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with impulse influense // Ukr. Math. J. — 1997. — **49**, № 4. — P. 601–605.
12. *Bainov D. D., Minckev E., Myshkis A.* Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic system // Commun. Appl. Anal. — 1997. — **1**, № 4. — P. 1–14.
13. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболического типа с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 3. — С. 315–328.
14. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. — Чернівці: Рута, 2010. — 248 с.
15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 427 с.
16. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. — Чернівці: Рута, 2008. — 253 с.

Одержано 09.10.14,
після доопрацювання — 22.01.15