УДК 517.927

Є. В. Гнип (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ СЛОБОДЕЦЬКОГО

For the system of linear ordinary differential equations of the first order, we study the broadest class of inhomogeneous boundary-value problems whose solutions belong to the Slobodetsky space $W_p^{s+1}\left((a,b),\mathbb{C}^m\right)$ with $m\in\mathbb{N}$, $s>0$, and $p\in(1,\infty)$. We prove a theorem on the Fredholm property of these problems. We also establish conditions under which the problems are uniquely solvable in the Slobodetsky space and their solutions are continuous in this space with respect to the parameter.

Для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка исследуется наиболее широкий класс неоднородных краевых задач, решения которых принадлежат пространству Слободецкого $W_p^{s+1}\left((a,b),\mathbb{C}^m\right)$, где $m\in\mathbb{N}$, $s>0$ и $p\in(1,\infty)$. Доказана теорема о фредгольмовости этих задач. Установлены условия их однозначной разрешимости и непрерывности решений по параметру в этом пространстве.

Вступ. Питання, пов'язані з граничним переходом у системах диференціальних рівнянь, виникають у багатьох задачах. Ці питання найкраще досліджено щодо задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Більш складний випадок загальних крайових задач вивчав І. Т. Кігурадзе [1 – 3] та його послідовники. У роботах Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця і Н. В. Реви [4, 5] отримано суттєві узагальнення цих результатів. Вони стосуються неперервності за параметром розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку у рівномірній нормі. Для систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків ці питання досліджено В. А. Михайлецем, Г. О. Чехановою [6] і В. О. Солдатовим [7].

У роботах [8, 9] введено і досліджено досить широкий клас лінійних крайових задач — тотальних щодо просторів Соболєва. Для нього доведено теореми про неперервність за параметром розв'язків у цих просторах. Пізніше тотальні крайові задачі було введено і досліджено для систем диференціальних рівнянь високого порядку [10]. Доведено фредгольмовість цих задач, знайдено достатні умови їх коректної розв'язності та неперервної залежності за параметром їх розв'язків у вказаних просторах.$\pmod f$

Мета даної роботи — перенести вказані результати на системи диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Слободецького [11, 12].

Зазначимо, що загальні теореми про граничний перехід у загальних і тотальних крайових задачах мають різні застосування до багатоточкових крайових задач [13, 14] у дослідженні граничних властивостей функції Гріна крайових задач [4, 6], у спектральній теорії диференціальних операторів [15 – 17]. Крім того, використаний у роботі підхід можна застосувати і для інших функціональних просторів [18, 19].

1. Постановка задачі. Нехай задано числа $p\in(1,\infty)$, $m\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{Z}_+$, $s:=$ $:=[s]+\{s\}$, де $[s]\in\mathbb{N}$, $0\leq\{s\}<1$, і скінченний інтервал $(a,b)\subset\mathbb{R}$. Позначимо через $W_p^s:=W_p^s\left((a,b),\mathbb{C}\right)$, $\left(W_p^s\right)^m:=W_p^s\left((a,b),\mathbb{C}^m\right)$, $\left(W_p^s\right)^{m\times m}:=W_p^s\left((a,b),\mathbb{C}^{m\times m}\right)$ простори Слободецького на інтервалі (a,b) відповідно комплекснозначних функцій, вектор-функцій і матриць-функцій.

Простір Слободецького W_p^s з нецілим додатним s означається [11] (п.2.5.1, зауваження 4) як простір функцій f, що належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і задовольняють умову

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{|f^{[s]}(x) - f^{[s]}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}} dxdy \right)^{1/p} < +\infty,$$

де $\|f\|_{[s],p}$ — норма у просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Тут $W_p^0 := L_p$. Функціонал $\|f\|_{s,p}$ є нормою на просторі W_p^s.

***Зауваження* 1.** Нехай $s \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, $s := [s] + \{s\}$. Функція f належить W_p^s тоді і тільки тоді, коли $f \in L_p$, $f^{([s])} \in W_p^{\{s\}}$, до того ж виконується еквівалентність норм

$$\|f\|_{s,p} \asymp \|f\|_{0,p} + \|f^{([s])}\|_{\{s\},p}.$$

(див. [11], п. 4.4.1, зауваження 2).

Відомо, що якщо функція f належить W_p^s, то f буде неперервною на $[a,b]$ при $s > \dfrac{1}{p}$.

Нехай $M(W_p^s) := \{\varphi \colon \varphi f \in W_p^s \;\; \forall f \in W_p^s\}$ — простір мультиплікаторів на класі W_p^s. При $s \in \left(0, \dfrac{1}{p}\right]$ і $p > 1$ простір W_p^s містить необмежені функції, які не будуть мультиплікаторами у W_p^s. Тому для вказаних значень s і p простір W_p^s не є алгеброю відносно множення.

Розглянемо лінійну крайову задачу на просторі $(W_p^{s+1})^m$ для системи m диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$By(\cdot) = c. \tag{2}$$

Тут матриця-функція $A(\cdot)$ належить простору $(W_p^s)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot)$ — простору $(W_p^s)^m$, вектор c — простору $\mathbb{C}^m$, а B — лінійний неперервний оператор

$$B \colon (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m.$$

Розв'язком цієї крайової задачі є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^m$, яка задовольняє рівняння (1) у кожній точці (a,b) (при $[s] = 0$ майже скрізь). Крім того, $y(\cdot)$ повинна задовольняти рівність (2).

Якщо y належить W_p^{s+1}, то y' належить W_p^s як узагальнена похідна. Якщо $[s] = 0$, то $W_p^{s+1} \subset W_p^1 \subset AC[a,b]$ і y' існує майже скрізь на (a,b). Якщо $[s] \geq 1$, то $W_p^{s+1} \subset W_p^2 \subset$ $\subset C^1[a,b]$ і y' — класична похідна, абсолютно неперервна на $[a,b]$.

Неоднорідна крайова умова (2) охоплює всі класичні види крайових умов: задачі Коші, двота багатоточкові, інтегральні та мішані крайові задачі, а також ряд некласичних задач, бо може містити похідні аж до порядку $[s] \geq 1$. За аналогією з [8, 9] крайову задачу (1), (2) можна називати тотальною щодо простору W_p^{s+1}.

Якщо крайова задача (1), (2) залежить від малого параметра $\varepsilon \geq 0$, то природно виникає питання про неперервність розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ такої задачі за параметром ε у банаховому просторі $\left(W_p^{s+1}\right)^m$. Мета даної роботи полягає в тому, щоб знайти достатні умови однозначної розв'язності цієї задачі та виконання граничної властивості

$$\|y(\cdot,\varepsilon) - y(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{3}$$

2. Формулювання основних результатів. Сформулюємо основні результати статті, які будуть доведені в пп. 4 і 5.

Запишемо неоднорідну крайову задачу (1), (2) у вигляді операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c).$$

Теорема 1. *Відображення* $y \mapsto (L, B)y$, *де* $y \in \left(W_p^{s+1}\right)^m$, *є обмеженим лінійним оператором*

$$(L, B)\colon \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m.$$

Цей оператор фредгольмів з індексом 0.

Сформулюємо критерій оборотності оператора (L, B), тобто умови, коли неоднорідна крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правої частини диференціального рівняння та крайової умови.

Оскільки $A(\cdot) \in \left(W_p^s\right)^{m\times m} \subset (L_1)^{m\times m}$, то позначимо через $Y(\cdot) \in (AC[a, b])^{m\times m} \subset \subset \left(W_p^{s+1}\right)^{m\times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = 0, \quad t \in (a, b), \tag{4}$$

$$Y(a) = I_m, \tag{5}$$

де I_m — одинична матриця розмірності $m \times m$. Позначимо

$$[BY(t)] := \left(B\begin{pmatrix} y_{1,1}(t) \\ \vdots \\ y_{m,1}(t)\end{pmatrix} \ldots B\begin{pmatrix} y_{1,m}(t) \\ \vdots \\ y_{m,m}(t)\end{pmatrix}\right).$$

Цю матрицю отримуємо в результаті дії оператора B на стовпчики матриці $Y(t)$.

Теорема 2. *Оператор* (L, B) *оборотний тоді і тільки тоді, коли квадратна* $(m \times m)$-*матриця* $[BY(\cdot)]$ *невироджена.*

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ сім'ю тотальних щодо простору W_p^{s+1} крайових задач вигляду

$$y'(t, \varepsilon) + A(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad t \in (a, b), \tag{6}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{7}$$

де при кожному фіксованому значенні параметра ε матриця-функція $A(\cdot, \varepsilon)$ належить простору $\left(W_p^s\right)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot; \varepsilon)$ — простору $\left(W_p^s\right)^m$, $c(\varepsilon)$ — простору $\mathbb{C}^m$, а $B(\varepsilon)$ — лінійний неперервний оператор:

$$B(\varepsilon)\colon \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \mathbb{C}^m.$$

Для того щоб співвідношення (3) мало зміст, будемо далі вважати, що виконується таке припущення.

Припущення $\mathcal{E}$. *Однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t, 0) = -A(t, 0)y(t, 0), \quad t \in (a, b),$$

$$B(0)y(\cdot, 0) = 0$$

має лише тривіальний розв'язок.

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі умови:*
1) $\|A(\cdot,\varepsilon) - A(\cdot,0)\|_{s,p} \to 0$;
2) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *для довільного* $y \in \left(W_p^{s+1}\right)^m$.
Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*
Якщо, крім цього,
3) $\|f(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot,0)\|_{s,p} \to 0,\ c(\varepsilon) \to c(0)$,
то розв'язок $y(\cdot,\varepsilon)$ *задачі* (6), (7) *задовольняє граничну властивість* (3).

Зазначимо, що в умовах теореми 3 оператор $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ збігається до оператора $(L(0), B(0))$ в сильній операторній топології, але, взагалі кажучи, не збігається за нормою.

3. Допоміжні твердження. Встановимо кілька допоміжних тверджень, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Лема 1. *Для довільних матриці-функції* $Y(\cdot) \in \left(W_p^{s+1}\right)^{m\times m}$, *вектора* $q \in \mathbb{C}^m$ *та лінійного неперервного оператора* $B\colon (W_p^{s+1})^m \to \mathbb{C}^m$ *справджується рівність*

$$B(Y(t)\cdot q) = [BY(t)]\,q.$$

Ця рівність перевіряється безпосередньо.

Лема 2. *Нехай* $p > 1,\ s \in (0,1)$. *Тоді* $W_p^1 \subset M(W_p^s)$ *і виконується нерівність*

$$\|\varphi\|_{M(W_p^s)} \le c\|\varphi\|_{1,p},$$

де c *— деяка стала.*

Доведення. Якщо функція φ належить W_p^1, то, оскільки цей клас є банаховою алгеброю,

$$\|\varphi y\|_{1,p} \le c_1\|\varphi\|_{1,p}$$

для довільного $y \in W_p^1$, де стала $c_1 > 0$ не залежить від y. Крім того, оскільки $W_p^1 \subset C[a,b]$ за теоремою про вкладення Соболєва, то

$$\|\varphi y\|_p \le c_2\|\varphi\|_p$$

для довільного $y \in L_p$, де стала $c_2 > 0$ не залежить від y, а $\|\cdot\|_p$ — норма в L_p.

Тому лінійний оператор множення на функцію $\varphi \in W_p^1$ неперервно діє з W_p^1 в себе і з L_p в себе. За інтерполяційною теоремою [11] (п. 4.3.1, теорема 1) оператор є обмеженим і в банаховому просторі W_p^s, де $s \in (0,1)$.

Лему 2 доведено.

Зауваження 2. Якщо $s \in \left(\dfrac{1}{p}, 1\right)$, то твердження леми випливає з того, що простір W_p^s є банаховою алгеброю.

Лема 3. *Нехай матриця-функція* $Y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^{m\times m}$ *є невиродженою. Тоді* $Y^{-1}(\cdot)$ *належить* $(W_p^{s+1})^{m\times m}$.

Доведення. Спочатку доведемо дане твердження для скалярного випадку $m = 1$ методом математичної індукції по $[s]$.

1. Нехай $[s] = 1$, тоді функція $Y(\cdot) \in W_p^{1+\{s\}}$. Оскільки $W_p^{1+\{s\}} \subset AC[a,b]$, то за умовою $(\exists c > 1)(\forall t \in [a,b])\colon c^{-1} \le |Y(t)| \le c$. Тоді $(Y^{-1}(\cdot))' = -Y'(\cdot)\cdot Y^{-2}(\cdot) \in L_p(a,b)$, тобто $Y^{-1}(\cdot) \in W_p^1$.

Окрім того,

$$\int_a^b\int_a^b \frac{|(Y^{-1}(x))'-(Y^{-1}(y))'|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}\,dxdy \le \int_a^b\int_a^b \frac{|Y'(x)Y^2(y)-Y'(y)Y^2(x)|^p}{|Y^2(x)|^p|Y^2(y)|^p|x-y|^{1+\{s\}p}}\,dxdy \le$$

$$\le c^4\int_a^b\int_a^b \frac{|Y'(x)Y^2(y)-Y'(y)Y^2(x)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}\,dxdy \le c^4\left(\int_a^b\int_a^b \frac{|Y'(x)Y^2(y)-Y'(y)Y^2(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}\,dxdy+\right.$$

$$\left.+\int_a^b\int_a^b \frac{|Y'(y)Y^2(y)-Y'(x)Y^2(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}\,dxdy+\int_a^b\int_a^b \frac{|Y'(x)Y^2(x)-Y'(y)Y^2(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}dxdy\right) \le$$

$$\le 2c^6\int_a^b\int_a^b \frac{|(Y(x))'-(Y(y))'|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}dxdy + c^4\int_a^b\int_a^b \frac{|Y'(x)Y^2(x)-Y'(y)Y^2(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}dxdy < +\infty,$$

оскільки $Y'(\cdot)\in W_p^{\{s\}}$ і $Y'(\cdot)Y^2(\cdot)\in W_p^{\{s\}}$ на підставі умови $Y(\cdot)\in W_p^{1+\{s\}}$ і леми 2.

Отже, $Y^{-1}(\cdot)\in W_p^{1+\{s\}}$.

2. Припустимо тепер, що при $[s]=k$ як тільки $Y(\cdot)\in W_p^{s+1}$, то $Y^{-1}(\cdot)\in W_p^{s+1}$.

3. Доведемо лему для випадку $[s]=k+1$. Оскільки $Y(\cdot)\in W_p^{s+1}$, то $Y'(\cdot)\in W_p^s$ і $Y(\cdot)\in W_p^s$. Тоді згідно з попереднім пунктом $Y^{-1}(\cdot)\in W_p^s$ і

$$(Y^{-1}(\cdot))^{([s]+1)} = -(Y'(\cdot)\cdot Y^{-2}(\cdot))^{([s])}\in W_p^{\{s\}}, \tag{8}$$

$Y'(\cdot)\cdot Y^{-2}(\cdot)\in W_p^s$, оскільки W_p^s є алгеброю. Властивість (8) разом з $Y^{-1}\in L_p$ обумовлює потрібне включення $Y^{-1}\in W_p^{s+1}$.

Отже, лему для випадку $m=1$ доведено. Нехай тепер матриця $Y(\cdot)$ має розмірність $m\times m$. Використовуючи відому формулу, маємо

$$Y^{-1}(t)=\frac{1}{\det Y(t)}\,Y^T(t). \tag{9}$$

Якщо $Y(\cdot)$ належить $(W_p^s)^{m\times m}$, то $Y^T(\cdot)$ — матриця із алгебраїчних доповнень — також належить простору $(W_p^s)^{m\times m}$. Тоді, використовуючи доведений вище факт і рівність (9), отримуємо, що і $Y^{-1}(\cdot)$ належить $(W_p^s)^{m\times m}$.

Лему 3 доведено.

Введемо метричний простір матриць-функцій

$$(\mathcal{Y}_p^{s+1}) := \left\{Y(t)\in (W_p^{s+1})^{m\times m}\colon Y(a)=I_m, \det Y(t)\neq 0\right\}$$

з метрикою

$$d_p^{s+1}(Y,Z) := \|Y(\cdot)-Z(\cdot)\|_{s+1,p}.$$

Теорема 4. *Нелінійне відображення* $\gamma\colon A\mapsto Y$, *де* $A\in (W_p^s)^{m\times m}$, *а* $Y\in AC[a,b]$ — *розв'язок задачі* (4), (5), *є гомеоморфізмом банахового простору* $(W_p^s)^{m\times m}$ *на метричний простір* $(\mathcal{Y}_p^{s+1})$.

Доведення теореми розіб'ємо на три частини.

1. Покажемо спочатку, що це відображення є бієкцією. Скористаємося методом математичної індукції по $[s]$.

1.1. Покажемо справедливість твердження для випадку $[s]=0$. Оскільки $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$ і всі елементи матриці-функції обмежені на $[a,b]$, то $Y'(\cdot)=-A(\cdot)Y(\cdot)\in(L_p)^{m\times m}$. Отже, $Y(\cdot)\in(W_p^1)^{m\times m}$. Тому $Y'(\cdot)=-A(\cdot)Y(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$ за лемою 2. Звідси $Y(\cdot)\in(W_p^{s+1})^{m\times m}$.

1.2. Припустимо, що для $[s]=k$ правильною є імплікація $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}\Rightarrow Y(\cdot)\in$ $\in(W_p^{s+1})^{m\times m}$.

1.3. Проведемо тепер доведення для $[s]=k+1$. Нехай $A(\cdot)\in(W_p^{s+1})^{m\times m}$. За індуктивним припущенням матрицант $Y(\cdot)$ належить $(W_p^{s+1})^{m\times m}$. Тоді $Y'(\cdot)=-A(\cdot)Y(\cdot)$ належатиме простору $(W_p^{s+1})^{m\times m}$, оскільки W_p^{s+1} є алгеброю. Отже, $Y(\cdot)\in(W_p^{s+2})^{m\times m}$. Таким чином, відображення $\gamma\colon(W_p^s)^{m\times m}\to(\mathcal{Y}_p^{s+1})$ є ін'єктивним, оскільки $A(\cdot)=Y'(\cdot)Y(\cdot)$.

Покажемо, що це відображення є сюр'єктивним. Нехай $Y(\cdot)\in(\mathcal{Y}_p^{s+1})$, покладемо $A(\cdot):=$ $:=Y'(\cdot)Y(\cdot)$. Оскільки $Y'(\cdot)$ належить $(W_p^s)^{m\times m}$ і за лемою 3 $Y^{-1}(\cdot)$ належить $(W_p^{s+1})^{m\times m}$, то $Y'(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$ належить $(W_p^s)^{m\times m}$. Тому матрична функція $A(\cdot)$ належить $(W_p^s)^{m\times m}$. У випадку $0<s<1$ це випливає з леми 2, а у випадку $s\ge 1$ — з того, що W_p^s є алгеброю. Тепер $Y(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші (4), (5), де $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$, тобто $\gamma(A(\cdot))=Y(\cdot)$. Отже, відображення γ є сюр'єктивним. Таким чином, маємо бієкцію

$$\gamma\colon(W_p^s)^{m\times m}\leftrightarrow(\mathcal{Y}_p^{s+1}). \tag{10}$$

2. Покажемо, що розв'язок $Y(\cdot)\in(\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (4) неперервно залежить від коефіцієнта $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$ при $m\in\mathbb{N},\ s>0,\ p>1$.

Знову застосуємо принцип математичної індукції по $[s]$.

2.1. Доведемо твердження для випадку $[s]=0$, тобто покажемо неперервну залежність розв'язку $Y(\cdot)\in(\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (4) від коефіцієнта $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$.

Для цього розглянемо параметризовану числом $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ сім'ю матричних задач вигляду

$$Y'(t,\varepsilon)=-A(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon),\quad t\in(a,b), \tag{11}$$

$$Y(a,\varepsilon)=I_m,\quad a\in[a,b], \tag{12}$$

де $A(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^s)^{m\times m}$.

Нехай при $\varepsilon\to 0+$ виконується умова

$$\|A(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)\|_{s,p}\to 0, \tag{13}$$

яка рівносильна такій:

$$\|A(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)\|_p\to 0, \tag{14}$$

і

$$\int_a^b\int_a^b\frac{|(A(x,\varepsilon)-A(x,0))-(A(y,\varepsilon)-A(y,0))|^p}{|x-y|^{1+sp}}\,dxdy\to 0.$$

Покажемо, що в такому випадку однозначно визначені розв'язки задач (11), (12) задовольняють граничне співвідношення

$$\|Y(\cdot,\varepsilon)-Y(\cdot,0)\|_{s+1,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+. \tag{15}$$

В роботі [20] встановлено, що якщо виконується (14), то

$$\|Y(\cdot,\varepsilon)-Y(\cdot,0)\|_{1,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{16}$$

Залишилось тепер оцінити ліву частину (15):

$$\|Y'(\cdot,\varepsilon)-Y'(\cdot,0)\|_{s,p}=\|A(\cdot,\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)Y(\cdot,0)\|_{s,p}\leq$$
$$\leq\|A(\cdot,\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,\varepsilon)Y(\cdot,0)\|_{s,p}+\|A(\cdot,\varepsilon)Y(\cdot,0)-A(\cdot,0)Y(\cdot,0)\|_{s,p}\leq$$
$$\leq c\|A(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p}\|Y(\cdot,\varepsilon)-Y(\cdot,0)\|_{1,p}+c\|A(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)\|_{s,p}\|Y(\cdot,0)\|_{1,p}.$$

Звідси на підставі леми 2 та умов (13), (16) отримуємо (15).

2.2. Припустимо, що умови леми виконуються для випадку $[s]=k$ і розв'язок $Y(\cdot)\in(\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (4) неперервно залежить від коефіцієнта $A(\cdot)\in(W_p^s)^{m\times m}$.

2.3. Доведемо тепер правильність твердження для $[s]=k+1$. Нехай при $\varepsilon\to 0+$ виконано умову

$$\|A(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)\|_{s,p}\to 0.$$

Тоді

$$\|A(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)\|_{s-1,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

і за індуктивним припущенням

$$\|Y(\cdot,\varepsilon)-Y(\cdot,0)\|_{s,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Тому

$$\|Y'(\cdot,\varepsilon)-Y'(\cdot,0)\|_{s,p}=\|A(\cdot,\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)Y(\cdot,0)\|_{s,p}\leq$$
$$\leq\|A(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)\|_{s,p}\|Y(\cdot,\varepsilon)\|_{s,p}+\|Y(\cdot,\varepsilon)-Y(\cdot,0)\|_{s,p}\|A(\cdot,0)\|_{s,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Отже, виконується (15).

Таким чином, неперервність відображення (10) доведено для всіх s.

3. Залишилось показати, що коефіцієнти $A(\cdot,\varepsilon)\in(W_p^s)^{m\times m}$ неперервно залежать від розв'язків $Y(\cdot,\varepsilon)\in(\mathcal{Y}_p^{s+1})$ рівняння (11).

Нехай для розв'язків задач (11), (12) виконується співвідношення (15). Тоді

$$\|Y'(\cdot,\varepsilon)-Y'(\cdot,0)\|_{s,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

а згідно з лемою 3 і

$$\|Y^{-1}(\cdot,\varepsilon)-Y^{-1}(\cdot,0)\|_{s+1,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+,$$

оскільки $(W_p^s)^{m\times m}$ — банахова алгебра. Тому

$$\|A(\cdot,\varepsilon)-A(\cdot,0)\|_{s,p}=\|Y'(\cdot,\varepsilon)Y^{-1}(\cdot,\varepsilon)-Y'(\cdot,0)Y^{-1}(\cdot,0)\|_{s,p}\to 0,\quad \varepsilon\to 0+\,.$$

Таким чином, встановлено бінеперервність відображення

$$A(\cdot)\mapsto Y(\cdot)\colon(W_p^s)^{m\times m}\to(\mathcal{Y}_p^{s+1}).$$

Теорему 4 доведено.

4. Доведення теорем 1 і 2. ***Доведення теореми* 1.** Обмеженість лінійного оператора $L\colon \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \left(W_p^s\right)^m$ випливає з означення норм у просторах Слободецького, при $s \in \left(0, \dfrac{1}{p}\right]$ — з леми 2 і при $s > \dfrac{1}{p}$ — з того, що W_p^s є банаховою алгеброю. Оператор B обмежений за означенням. Доведемо фредгольмовість оператора (L, B).

Означимо лінійний обмежений оператор $C\colon \left(W_p^{s+1}\right)^m \to \mathbb{C}^m$, поклавши

$$Cy := y(a).$$

Оскільки неоднорідна задача Коші

$$(L, C)y = (f, c) \in \left(W_p^s\right)^m \times \mathbb{C}^m$$

має єдиний розв'язок $y \in \left(W_p^s\right)^m$ при будь-якому значенні правої частини рівняння, то оператор (L, C) є бієктивним. За теоремою Банаха про обернений оператор він є оборотним. З іншого боку, оператор (L, B) допускає зображення

$$(L, B) = (L, C) + (0, B - C),$$

де другий доданок — це скінченновимірний оператор. Тоді за теоремою Нікольського [22] (§ 21.5) оператор (L, B) є фредгольмовим з індексом 0.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** За теоремою 1 неперервна оборотність оператора (L, B) рівносильна тому, що ядро $N(L, B) = \{0\}$. На підставі леми 1

$$y(\cdot) \in N(L, B) \Leftrightarrow \left(\exists q \in \mathbb{C}^m : y(t) = Y(t) \cdot q, [BY(\cdot)]\, q = 0\right).$$

Тому $N(L, B) \neq \{0\}$ тоді й лише тоді, коли $\det\,[BY(\cdot)] = 0$.

Теорему 2 доведено.

5. Доведення теореми 3. Для подальшого викладу нам потрібні кілька допоміжних тверджень.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* 1 *і* 2 *теореми* 3 *і припущення* $\mathcal{E}$. *Тоді для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *оператор* $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$ *є оборотним.*

Доведення. З умови 1 за теоремою 4 про гомеоморфізми випливає, що

$$\|Y(\cdot, \varepsilon) - Y(\cdot, 0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{17}$$

Тоді на підставі умови 2 отримаємо збіжність числових матриць

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] \to [B(0)Y(\cdot, 0)], \quad \varepsilon \to 0+. \tag{18}$$

Гранична квадратна матриця невироджена згідно з припущенням $\mathcal{E}$ і теоремою 2. Тому для достатньо малих $\varepsilon \geq 0$

$$\det\,[B(\varepsilon)Y(\cdot, \varepsilon)] \neq 0.$$

Звідси за теоремою 2 випливає оборотність оператора $(L(\varepsilon), B(\varepsilon))$.

Лему 4 доведено.

Розглянемо разом з вихідною неоднорідною крайовою задачею (6), (7) відносно вектор-функції $y(t;\varepsilon)$ ще три векторні крайові задачі:

$$v'(t,\varepsilon) = -A(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon), \quad B(\varepsilon)v(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{19}$$

$$x'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad x(a,\varepsilon) = 0, \tag{20}$$

$$w'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)w(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad B(\varepsilon)w(\cdot,\varepsilon) = 0, \tag{21}$$

де параметр $\varepsilon \geq 0$ є малим. Як відомо, крайова задача (20) (задача Коші) завжди має єдиний розв'язок.

З огляду на лему 4

$$y(\cdot,\varepsilon) = v(\cdot,\varepsilon) + w(\cdot,\varepsilon) \tag{22}$$

для малих $\varepsilon \geq 0$. Тому для доведення теореми 3 достатньо показати, що при виконанні її умов правильними є такі співвідношення:

$$\|v(\cdot,\varepsilon) - v(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+, \tag{23}$$

$$\|w(\cdot,\varepsilon) - w(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{24}$$

Лема 5. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови теореми* 3. *Тоді має місце граничне співвідношення* (23).

Доведення. З першої рівності крайової задачі (19) випливає, що

$$v(\cdot,\varepsilon) = Y(\cdot,\varepsilon)\widetilde{c}(\varepsilon) \tag{25}$$

для деякого $\widetilde{c}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$. Звідси, враховуючи другу рівність задачі (19) і лему 1, отримуємо

$$[B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]\widetilde{c}(\varepsilon) = c(\varepsilon).$$

Тому на підставі леми 4, теореми 2, формули (18) і умови 2 маємо

$$\widetilde{c}(\varepsilon) = [B(\varepsilon)Y(\cdot,\varepsilon)]^{-1}c(\varepsilon) \to [B(0)Y(\cdot,0)]^{-1}c(0) = \widetilde{c}(0), \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Звідси на підставі (17) і (25) отримуємо співвідношення (23).

Лему 5 доведено.

Лема 6. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови* $1-3$ *теореми* 3. *Тоді розв'язок задачі* (20) *має властивість*

$$\|x(\cdot,\varepsilon) - x(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{26}$$

Доведення. Нехай число $\varepsilon > 0$ є достатньо малим. Розв'язок задачі (20) допускає зображення

$$x(t,\varepsilon) = Y^{-1}(t,\varepsilon)\int\limits_a^t Y(s,\varepsilon)f(s,\varepsilon)\,ds. \tag{27}$$

З умови 1 за теоремою 4 про гомеоморфізм і леми 3 при $\varepsilon \to 0+$ маємо

$$\|Y^{\pm 1}(\cdot,\varepsilon) - Y^{\pm 1}(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0. \tag{28}$$

Тоді на підставі умови 3 і співвідношення (28)

$$\|Y(\cdot,\varepsilon)f(\cdot,\varepsilon) - Y(\cdot,0)f(\cdot,0)\|_{s,p} \to 0. \tag{29}$$

При $0 < s < 1$ це випливає з леми 2, а при $s \geq 1$ — з того, що W_p^s є банаховою алгеброю. Тепер зі співвідношень (27) – (29) отримуємо співвідношення (26).

Лему 6 доведено.

Лема 7. *За умов теореми* 3 *виконується граничне співвідношення* (24).

Доведення. Вектор-функція $u(\cdot,\varepsilon) = x(\cdot,\varepsilon) - w(\cdot,\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі вигляду (19):

$$u'(t,\varepsilon) = -A(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon),$$
$$B(\varepsilon)u(\cdot,\varepsilon) = B(\varepsilon)x(\cdot,\varepsilon) =: \widetilde{c}(\varepsilon).$$

Тут $\widetilde{c}(\varepsilon) \to \widetilde{c}(0)$ при $\varepsilon \to 0+$ на підставі властивості 2 і леми 6. Тому за лемою 5 маємо збіжність

$$\|u(\cdot,\varepsilon) - u(\cdot,0)\|_{s+1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{30}$$

Із рівності $w(\cdot,\varepsilon) = x(\cdot,\varepsilon) - u(\cdot,\varepsilon)$ та формул (26), (30) отримуємо (24).

Лему 6 доведено.

Потрібна гранична властивість (3) є безпосереднім наслідком рівності (22) і лем 5, 7.

Теорему 3 доведено.

Література

1. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1987. – **30**. – С. 3 – 103.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
3. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 2. – С. 198 – 209.
4. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A., Reva N. V.* Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, № 1. – P. 77 – 90.
5. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Обобщения теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 23 – 27.
6. *Mikhailets V. A. Chekhanova G. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems // J. Math. Sci. – 2015. – **204**, № 3. – P. 333 – 342.
7. *Soldatov V. O.* On the continuity in a parameter for the solutions of boundary-value problems total with respect to the spaces $C^{(n+r)}[a,b]$ // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 785 – 794.
8. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, № 4. – P. 589 – 599.
9. *Михайлец В. А., Рева Н. В.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2008. – № 8. – С. 28 – 30.
10. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev space // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 658 – 667.
11. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.

12. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – 404 с.
13. *Гнип Є. В., Кодлюк Т. І.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових на просторах Соболєва // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 101 – 112.
14. *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15 – 19.
15. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Resolvent convergence of Sturm – Liouville operators with singular potentials // Math. Notes. – 2010. – **87**, № 1 – 2. – P. 287 – 292.
16. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm – Liouville equations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 120 – 130.
17. *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 9. – P. 1361 – 1378.
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. – xii + 297 p.
20. *Кодлюк Т. І.* Одновимірні крайові задачі з параметром у просторах Соболєва: Дис.... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2013. – 155 с.
21. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

Одержано 25.12.15