УДК 517.51

Г. А. Волошин, В. М. Косован, В. К. Маслюченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

УМОВА ГААРА ТА СУКУПНА ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

For systems of functions $F = \{f_n \in K^X : n \in \mathbb{N}\}$ and $G = \{g_n \in K^Y : n \in \mathbb{N}\}$ we consider an F-polynomial $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$, a G-polynomial $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$, and an $F \otimes G$-polynomial $h = \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_{k,j} f_k \otimes g_j$, where $(f_k \otimes g_j)(x, y) = f_k(x)g_j(y)$. By using the well-known Haar's condition from the approximation theory we study the following question: under what assumptions every function $h\colon X \times Y \to K$, such that all x-sections $h^x = h(x,\cdot)$ are G-polynomials and all y-sections $h_y = h(\cdot, y)$ are F-polynomials, is an $F \otimes G$-polynomial? A similar problem is investigated for functions of n variables.

Для систем функций $F = \{f_n \in K^X : n \in \mathbb{N}\}$ и $G = \{g_n \in K^Y : n \in \mathbb{N}\}$ рассматриваются F-полиномы $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$, G-полиномы $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$ и $F \otimes G$-полиномы $h = \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_{k,j} f_k \otimes g_j$, где $(f_k \otimes g_j)(x, y) = f_k(x)g_j(y)$. С помощью известного условия Хаара из теории приближений исследуется вопрос о том, при каких условиях каждая функция $h\colon X \times Y \to K$, у которой x-разрезы $h^x = h(x,\cdot)$ — это G-полиномы, y-разрезы $h_y = h(\cdot, y)$ — это F-полиномы, является $F \otimes G$-полиномом. Аналогичная проблема решается и для функций n переменных.

1. Вступ. Відомо [1, с. 63], що кожна нарізно поліноміальна функція $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, де $\mathbb{K}$ — поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел або $\mathbb{C}$ комплексних чисел, є поліномом від n змінних. Цей результат було розвинено у статті [2], де встановлено, що для довільних підмножин $X_1, \ldots, X_n$ будь-якого поля K наступні умови є рівносильними:

(i) кожна нарізно поліноміальна функція $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to K$ є сукупно поліноміальною;

(ii) серед множин $X_1, \ldots, X_n$ є щонайбільше одна зліченна множина.

Цей результат породив і загальну поки що не розв'язану проблему: для яких підмножин $E \subseteq K^n$ кожна нарізно поліноміальна функція $f : E \to K$ є сукупно поліноміальною? Ця проблема та її аналоги досліджувались у працях [3 – 7]. Крім того, у статтях [8 – 11] вивчалися зв'язки між нарізною і сукупною поліноміальностями для відображень $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Z$, де $X_1, \ldots, X_n$ і Z — векторні простори.

Методи доведення сукупної поліноміальності функцій в [1, 2] є різними: в [1] використовуються інтерполяційні многочлени Лаґранжа, а у [2] — визначники Вандермонда. В теорії наближень при дослідженні єдиності многочлена найкращого рівномірного наближення [12, с. 80] фігурує умова Гаара (H_n), що накладається на систему функцій $f_k\colon X \to \mathbb{R}$, де $k = 1, \ldots, n$: для довільної множини $\{x_1, \ldots, x_n\}$, що складається з різних точок $x_j \in X$, визначник $\Delta = \det\big(f_k((x_j))\big)_{j,k=1}^{n}$ не дорівнює нулю. За теоремою Гаара [13] єдиність многочлена найкращого наближення $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ для кожної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$, заданої на компакті X, рівносильна умові Гаара (H_n). Узагальнені многочлени $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ при $X = [a, b]$ і $f_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, перетворюються у звичайні многочлени степеня меншого за n, а виконання умови Гаара для них гарантується тим, що відповідні визначники Вандермонда [16, с. 114; 17, с. 50] не дорівнюють нулю.

Як зауважив А. М. Колмогоров [14], теорема Гаара справедлива і для комплекснозначних функцій. С. І. Зуховицький і М. Г. Крейн [15] розвинули теорему Гаара далі. Зрозуміло, що умову Гаара можна сформулювати і для системи функцій $f_k: X \to K$ зі значеннями у довільному полі K, а не лише у полі $\mathbb{K}$ дійсних чи комплексних чисел.

Ця умова Гаара привела авторів до такого узагальнення теореми про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Для довільного поля K і підмножини $M \subseteq K^T$ простору всіх функцій $f: T \to K$, заданих на довільній множині T, розглянемо її лінійну оболонку

$$\mathrm{sp}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k : n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \quad \text{і} \quad f_1, \ldots, f_n \in M \right\}.$$

Її елементи $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ ми називатимемо *M-поліномами*. Для функцій $f: X \to K$ і $g: Y \to K$ визначимо їх *тензорний добуток* $h = f \otimes g: X \times Y \to K$ формулою

$$h(x, y) = f(x) g(y).$$

Нескінченну систему $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n: T \to K$ таку, що кожна скінченна система $f_1, \ldots, f_n$ задовольняє умову Гаара (H_n), будемо називати *послідовністю Гаара* на T.

Для $n = 2$ наше узагальнення формулюється так.

Теорема 1. *Нехай K — довільне поле, а X і Y — нескінченні множини, одна з яких незліченна, $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ і $G = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ — зліченні множини функцій $f_n: X \to K$ і $g_n: Y \to K$ такі, що $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовності Гаара на X та Y відповідно, і $F \otimes G = \{f \otimes g : f \in F, g \in G\}$. Тоді кожна функція $h: X \times Y \to K$, у якої всі вертикальні x-розрізи $h^x = h(x, \cdot)$, де $x \in X$, є G-поліномами, а всі горизонтальні y-розрізи $h_y = h(\cdot, y)$, де $y \in Y$, є F-поліномами, є $F \otimes G$-поліномом.*

Крім того, у цій статті ми узагальнюємо теорему 1 на випадок функцій багатьох змінних.

2. Властивості і приклади послідовностей Гаара. Вкажемо спочатку на елементарні перетворення, які переводять послідовності Гаара у такі ж послідовності.

Нехай K — довільне поле, T — довільна множина і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність Гаара функцій $f_n: T \to K$ на T. Тоді:

1°. Для довільної функції $g: T \to K$, для якої $g(t) \neq 0$ для кожного $t \in T$, система функцій $g_n = g f_n$ теж буде послідовністю Гаара на T.

2°. Нехай $\varphi: S \to T$ — бієкція і $g_n = f_n \circ \varphi$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність Гаара на S.

3°. Нехай $\alpha_{n,k} \in K$ при $n \in \mathbb{N}$ і $k = 1, \ldots, n$,

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} f_k$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\alpha_{n,n} \neq 0$ для кожного n, то система $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ буде послідовністю Гаара.

Доведення перших двох властивостей є тривіальним. Доведемо властивість 3°. Для кожного n розглянемо трикутну матрицю

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Для довільної множини точок $t_1, \ldots, t_n$ з T розглянемо матрицю

$$H_n = H_{\mathbf{f},n}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \ldots & f_1(t_n) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & \ldots & f_2(t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(t_1) & f_n(t_2) & \ldots & f_n(t_n) \end{pmatrix},$$

яку ми називатимемо *n-ю матрицею Гаара* послідовності $\mathbf{f} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ у точках $t_1, \ldots, t_n$, а її визначник $\Delta_n = \Delta_{\mathbf{f},n}(t_1, \ldots, t_n) = \det H_n$ — *визначником Гаара.*

Легко перевірити, що для матриці Гаара

$$\widetilde{H}_n = H_{\mathbf{g},n}(t_1, \ldots, t_n)$$

перетвореної послідовності $\mathbf{g} = (g_n)_{n=1}^{\infty}$ маємо $\widetilde{H}_n = A_n H_n$. Звідси випливає, що

$$\widetilde{\Delta}_n = \det \widetilde{H}_n = \det A_n \det H_n$$

для кожного n. Оскільки $\det A_n = \alpha_{1,1} \ldots \alpha_{n,n} \neq 0$ і $\Delta_n = \det H_n \neq 0$ для різних точок $t_1, \ldots, t_n$ за умовою Гаара, то і $\widetilde{\Delta}_n \neq 0$ для різних точок $t_1, \ldots, t_n$ і для кожного n. Отже, $\mathbf{g} = (g_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність Гаара на T.

Наведемо приклади послідовностей Гаара.

***Приклад* 1.** Нехай $f_k(t) = t^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots$ — степеневі функції з цілими невід'ємними показниками на підмножині T довільного поля K. Для них визначник $V_n = \det H_n$ матриці Гаара

$$H_n = H_{\mathbf{f},n}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \ldots & t_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

— це відомий визначник Вандермонда, для якого

$$V_n = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (t_j - t_k).$$

Якщо $t_k \neq t_j$ при $k \neq j$, то $V_n \neq 0$. Отже, система степеневих функцій $1, t, \ldots, t^{n-1}, \ldots$ утворює послідовність Гаара на T.

***Приклад* 2.** Нехай $K^* = \{t \in K : t \neq 0\}$ — множина всіх ненульових елементів у довільному полі K і $T \subseteq K^*$. Розглянемо систему функцій $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^{-1}, \ldots, f_{2k}(t) = t^k$, $f_{2k+1}(t) = t^{-k}, \ldots$ на множині T.

Підрахуємо її визначник Гаара Δ_n у точках $t_1, t_2, \ldots, t_n$ з T. Розглянемо окремо випадки непарного $n = 2m+1$, де $m = 0, 1, \ldots$, і парного $n = 2m$, де $m = 1, 2, \ldots$.

При $n = 2m+1$

$$\Delta_{2m+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_{2m+1} \\ t_1^{-1} & t_2^{-1} & \ldots & t_{2m+1}^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{m} & t_2^{m} & \ldots & t_{2m+1}^{m} \\ t_1^{-m} & t_2^{-m} & \ldots & t_{2m+1}^{-m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1^{-m} & t_2^{-m} & \ldots & t_{2m+1}^{-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{-1} & t_2^{-1} & \ldots & t_{2m+1}^{-1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_{2m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{m} & t_2^{m} & \ldots & t_{2m+1}^{m} \end{vmatrix} =$$

$$= t_1^{-m} t_2^{-m} \ldots t_{2m+1}^{-m} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_{2m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{2m} & t_2^{2m} & \ldots & t_{2m+1}^{2m} \end{vmatrix} = t_1^{-m} t_2^{-m} \ldots t_{2m+1}^{-m} \prod_{1 \le k < j \le 2m+1} (t_j - t_k).$$

Тому для різних точок t_k маємо $\Delta_{2m+1} \neq 0$.

Аналогічно при $n = 2m$

$$\Delta_{2m} = t_1^{-(m-1)} t_2^{-(m-1)} \ldots t_{2m}^{-(m-1)} \prod_{1 \le k < j \le 2m} (t_j - t_k).$$

І в цьому випадку для різних точок t_k визначник $\Delta_{2m} \neq 0$. Ми бачимо, що і ця система функцій є послідовністю Гаара на T.

Зокрема, якщо $T = \mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ — одиничне коло на комплексній площині $\mathbb{C}$, то система функцій $1, z, z^{-1}, \ldots, z^m, z^{-m}, \ldots$ є послідовністю Гаара на $\mathbb{S}$. Звідси на основі теореми Колмогорова отримуємо, що для кожної неперервної функції $f \colon \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ існує єдиний многочлен найкращого наближення $g(z) = \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k z^k$.

***Приклад* 3.** Розглянемо тригонометричну систему функцій

$$1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots.$$

Легко зрозуміти, що вона не задовольняє умову Гаара на $\mathbb{R}$, оскільки функції з цієї системи 2π-періодичні.

Розглянемо її на множині $T = [0, 2\pi)$. Перетворення

$$z = \varphi(t) = e^{it}$$

— бієкція $\varphi \colon T \to \mathbb{S}$ множини T на одиничне коло $\mathbb{S}$. За формулами Ейлера

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad \text{і} \quad \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}.$$

Тому тригонометрична система функцій на T заміною $z = e^{it}$ переходить в систему функцій 1, $\dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\dfrac{z-z^{-1}}{2i}, \ldots, \dfrac{z^n+z^{-n}}{2}, \dfrac{z^n-z^{-n}}{2i}, \ldots$ на колі $\mathbb{S}$. Позначимо n-ту матрицю Гаара цієї системи, що відповідає точкам $z_1, \ldots, z_n$ з $\mathbb{S}$, через $\widetilde{H}_n$, а її визначник через $\widetilde{\Delta}_n$; для системи $1, z, z^{-1}, \ldots, z^m, z^{-m}, \ldots$ — відповідно H_n і Δ_n.

Для $n = 2m+1$ маємо

$$\widetilde{H}_{2m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \dfrac{z_1+z_1^{-1}}{2} & \dfrac{z_2+z_2^{-1}}{2} & \ldots & \dfrac{z_{2m+1}+z_{2m+1}^{-1}}{2} \\ \dfrac{z_1-z_1^{-1}}{2i} & \dfrac{z_2-z_2^{-1}}{2i} & \ldots & \dfrac{z_{2m+1}-z_{2m+1}^{-1}}{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{z_1^m+z_1^{-m}}{2} & \dfrac{z_2^m+z_2^{-m}}{2} & \ldots & \dfrac{z_{2m+1}^m+z_{2m+1}^{-m}}{2} \\ \dfrac{z_1^m-z_1^{-m}}{2i} & \dfrac{z_2^m-z_2^{-m}}{2i} & \ldots & \dfrac{z_{2m+1}^m-z_{2m+1}^{-m}}{2i} \end{pmatrix}$$

і

$$H_{2m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_{2m+1} \\ z_1^{-1} & z_2^{-1} & \ldots & z_{2m+1}^{-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^m & z_2^m & \ldots & z_{2m+1}^m \\ z_1^{-m} & z_2^{-m} & \ldots & z_{2m+1}^{-m} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю розміру $(2m+1) \times (2m+1)$:

$$B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2i} & -\dfrac{1}{2i} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{2i} & -\dfrac{1}{2i} \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що $\widetilde{H}_{2m+1} = B_m H_{2m+1}$. Тому

$$\widetilde{\Delta}_{2m+1} = \det \widetilde{H}_{2m+1} = \det B_n \det H_{2m+1}.$$

Але $\det B_m = 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix}^m = \left(-\frac{1}{2i}\right)^m = \left(\frac{i}{2}\right)^m \neq 0$. А як доведено у прикладі 2, $\Delta_{2m+1} \neq 0$ для різних точок $z_1, \ldots, z_{2m+1}$. Тому і $\widetilde{\Delta}_{2m+1} \neq 0$ для різних точок $z_1, \ldots, z_{2m+1}$.

Не зважаючи на це, система функцій $1, \dfrac{z+z^{-1}}{2}, \dfrac{z-z^{-1}}{2i}, \ldots$ не задовольняє умову Гаара. Справді, розглянемо точку z_1 на колі $\mathbb{S}$, відмінну від -1 і 1, і покладемо $z_2 = \overline{z_1} = z_1^{-1}$. Для цих точок

$$\widetilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{z_1 + z_1^{-1}}{2} & \dfrac{z_2 + z_2^{-1}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{z_1 + \overline{z_1}}{2} & \dfrac{\overline{z_1} + z_1}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

хоча $z_1 \neq z_2$. Отже, вже для $n = 2$ умова Гаара для цієї системи порушується. Таким чином, система функцій $1, \dfrac{z+z^{-1}}{2}, \dfrac{z-z^{-1}}{2i}, \ldots$ не задовольняє умову Гаара на колі $\mathbb{S}$, а отже, і тригонометрична система не задовольняє умову Гаара на проміжку $T = [0, 2\pi)$.

3. Допоміжні твердження. Тут і далі символом K будемо позначати довільне поле.

Лема 1. *Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — різні точки множини X, $f_1, \ldots, f_n$ — такі функції з K^X, що*

$$\Delta = \det \big(f_k(x_j)\big)_{j,k=0}^n \neq 0,$$

і $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k$, де $\lambda_k \in K$ при $k = 1, \ldots, n$. Тоді існують такі елементи $\mu_{k,j} \in K$, які залежать тільки від точок $x_1, \ldots, x_n$, що

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^n \mu_{k,j} f(x_j)$$

для кожного $k = 1, \ldots, n$.

Доведення. Система лінійних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \xi_k f_k(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \ldots, n,$$

визначник якої $\Delta \neq 0$, має єдиний розв'язок $\xi_k = \lambda_k$, який шукається за правилом Крамера $\lambda_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}$, де

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_{k-1}(x_1) & f(x_1) & f_{k+1}(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & \ldots & f_{k-1}(x_2) & f(x_2) & f_{k+1}(x_2) & \ldots & f_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x_n) & \ldots & f_{k-1}(x_n) & f(x_n) & f_{k+1}(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи цей визначник по елементах k-го стовпчика, отримуємо

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j} f(x_j),$$

де $\alpha_{k,j}$ — відповідні алгебраїчні доповнення. Покладаючи $\mu_{k,j} = \dfrac{\alpha_{k,j}}{\Delta}$, одержуємо

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_{k,j} f(x_j)$$

для кожного $k = 1, \ldots, n$.

Лема 2. *Нехай A — нескінченна підмножина множини X, $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ — зліченна система функцій $f_n : X \to K$ така, що $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність Гаара, і $f : A \to K$ — $F|_A$-поліном, де $F|_A = \{f_n|_A : n \in \mathbb{N}\}$. Тоді існує єдиний F-поліном $g : X \to K$ такий, що $g|_A = f$.*

Доведення. За умовою існує такий F-поліном

$$g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k,$$

що $f = g|_A$. Оскільки множина A нескінченна, то з неї можна вибрати n різних точок $x_1, \ldots, x_n$. Маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x_j) = g(x_j)$$

для кожного $j = 1, \ldots, n$. Тоді за лемою 1 існують такі числа $\mu_{k,j}$, що

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_{k,j} g(x_j).$$

Але $g(x_j) = f(x_j)$ при $j = 1, \ldots, n$, тому що $x_j \in A$. Отже,

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \mu_{k,j} f(x_j)$$

при $k = 1, \ldots, n$. Таким чином, коефіцієнти λ_k многочлена g однозначно знаходяться через задані числа $f(x_j)$.

З леми 2 безпосередньо випливає таке твердження.

Лема 3. *Нехай A, X і F — такі ж множини, як і в лемі 2, і $g : X \to K$ та $h : X \to K$ — такі F-поліноми, що $g|_A = h|_A$. Тоді $g = h$.*

Для системи функцій $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ і F-полінома $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ будемо писати, що $\deg f \le n$. Можна дати і означення степеня $\deg f$ для F-полінома f як такого найменшого числа n, що $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$.

4. *Доведення теореми* 1. Припустимо, для певності, що множина X незліченна, а множина Y нескінченна. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in X : \deg h^x \le n\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, адже h^x для кожного $x \in X$ — це якийсь G-поліном, а $G = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$. Оскільки множина X незліченна, то існує такий номер m, що і множина $A = A_m$ буде незліченною, зокрема, і нескінченною.

Виберемо з нескінченної множини Y різні елементи $y_1, \ldots, y_m$. Оскільки $\deg h^x \le m$ для кожного $x \in A$, то існують такі функції $b_j : A \to K$, що

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^{m} b_j(x) g_i(y)$$

на множині $A \times Y$. Оскільки $\det(g_j(y_k))_{k,j=1}^{m} \neq 0$, то за лемою 1 існують такі числа $\mu_{j,k}$, що залежать лише від точок $y_1, \ldots, y_m$, для яких

$$b_j(x) = \sum_{k=1}^{m} \mu_{j,k} h(x, y_k)$$

для кожного $x \in A$. Але функції $h_{y_k} : X \to K$ — це F-поліноми, тому і їх лінійні комбінації b_j — це $F|_A$-поліноми, тобто існують такі числа $\lambda_{j,k}$, що

$$b_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} f_k(x)$$

на A для кожного $j = 1, \ldots, m$ і для деякого номера n. В такому випадку

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} f_k(x) g_j(y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} (f_k \otimes g_j)(x, y)$$

на $A \times Y$.

Розглянемо $F \otimes G$-поліном

$$p = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j,k} f_k \otimes g_j$$

на множині $X \times Y$. За побудовою $p|_{A \times Y} = h|_{A \times Y}$. Доведемо, що $h = p$. Для фіксованого $y \in Y$ функції p_y і h_y — це F-поліноми, до того ж $p_y|_A = h_y|_A$. Оскільки множина A нескінченна, то з леми 3 отримуємо рівність $p_y = h_y$ для кожного $y \in Y$, звідки і випливає, що $p = h$.

5. Випадок функції багатьох змінних: узагальнення лем 2 і 3. Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — множини і $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ — їх декартів добуток. Для функцій $f_k : X_k \to K, k = 1, \ldots, n$, і точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ покладемо

$$(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n)(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n).$$

Функція $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_n : X \to K$ називається *тензорним добутком* функцій $f_1, \ldots, f_n$.

Нехай для кожного $k = 1, \ldots, n$ задано деяку множину $F_k \subseteq K^{X_k}$. Покладемо

$$F = F_1 \otimes \ldots \otimes F_n = \{f_1 \otimes \ldots \otimes f_n : f_k \in F_k, k = 1, \ldots, n\}.$$

Для функції $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to K$ і фіксованого набору $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ значень змінних x_{i_k} при $k = 1, \ldots, m$, де $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$, символом $f_{a_{i_1} \ldots a_{i_m}}$ позначаємо функцію від решти $l = n - m$ змінних, яку одержуємо з функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, покладаючи $x_{i_k} = a_{i_k}$ при $k = 1, \ldots, m$. Для довільного $k = 1, \ldots, n$ і точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X = X_1 \times \ldots \times X_n$ позначимо $\widehat{x}_k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_k)$ і $\widehat{X}_k = X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times X_{k+1} \times \ldots \times X_n$.

Нехай X — довільна множина, $E \subseteq X$ і $F \subseteq K^X$. Функцію $g : E \to K$ назвемо F-*поліноміальною*, якщо існує такий F-поліном $f \in \mathrm{sp}(F)$, що $f|_E = g$. Зрозуміло, що F-поліноміальні функції на E — це в точності $F|_E$-поліноми, де $F|_E = \{f|_E : f \in F\}$.

Лема 4. *Нехай $k = 1, \ldots, n, A_k$ — нескінченна підмножина множини X_k, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, $F_k = \{f_{k,j} : j \in \mathbb{N}\}$ — зліченна система функцій $f_{k,j} : X_k \to K$ така, що система $(f_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ для кожного $k = 1, \ldots, n$ є послідовністю Гаара, $F = F_1 \otimes \ldots \otimes F_n$ і $f\colon A \to K$ — F-поліноміальна функція. Тоді існує єдиний F-поліном $g\colon X \to K$ такий, що $g|_A = f$.*

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ дане твердження збігається з лемою 2.

Припустимо, що $n > 1$ і дане твердження є справедливим, коли число множин дорівнює $n - 1$. Доведемо, що воно виконується і для n множин, як у формулюванні теореми.

Припустимо, що g' і g'' — такі F-поліноми, що $g'|_A = f = g''|_A$, і доведемо, що $g' = g''$. Для довільного фіксованого набору $\widehat{x}_1 = (x_2, \ldots, x_n) \in \widehat{A}_1 = A_2 \times \ldots \times A_n$ розглянемо F_1-поліноми $g'_{\widehat{x}_1}$ і $g''_{\widehat{x}_1}$ на X_1. Оскільки $g'_{\widehat{x}_1}|_{A_1} = g''_{\widehat{x}_1}|_{A_1}$, то $g'_{\widehat{x}_1} = g''_{\widehat{x}_1}$ за лемою 3.

Зафіксуємо тепер довільне $x_1 \in X_1$. Для $F_2 \otimes \ldots \otimes F_n$-поліномів g'_{x_1} і g''_{x_1} будемо мати $g'_{x_1}|_{\widehat{A}_1} = g''_{x_1}|_{\widehat{A}_1}$. Тому за індуктивним припущенням $g'_{x_1} = g''_{x_1}$. Таким чином,

$$g'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g'_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = g''_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = g''(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

для довільних $x_k \in X_k$ при $k = 1, \ldots, n$, тобто $g' = g''$.

З цієї леми безпосередньо випливає таке твердження.

Лема 5. *Нехай A, X і F — такі ж, як у лемі 4, $A \subseteq E \subseteq X$, $f_i\colon E \to K$ при $i = 1, 2$ — такі F-поліноміальні функції, що $f_1|_A = f_2|_A$. Тоді $f_1 = f_2$.*

6. Основний результат. Тут ми узагальнимо теорему 1 на випадок функцій n змінних.

Теорема 2. *Нехай $X_1, \ldots, X_{n-1}$ — незліченні множини, X_n — нескінченна множина, для кожного $k = 1, \ldots, n$ задано зліченну множину $F_k = \{f_{k,j} : j \in \mathbb{N}\}$ функцій $f_{k,j} : X_k \to K$, для якої $(f_{k,j})_{j=1}^{\infty}$ — послідовність Гаара, $F = F_1 \otimes \ldots \otimes F_n$ і $f\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to K$ — функція, у якої для кожного $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ і довільного $k = 1, \ldots, n$ функції $f_{\widehat{x}_k} : X_k \to K$ — це F_k-поліноми. Тоді f — F-поліном.*

Доведення. Для F-полінома f будемо писати, що $\deg f \le m$, якщо

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{m} \alpha_{i_1, \ldots, i_n} f_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes f_{n,i_n}.$$

Степенем F-полінома f, який позначається $\deg f$, ми називаємо найменше з чисел m таких, що $f = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_m}$.

Для $n = 1$ твердження тривіальне. Припустимо, що $n > 1$, і будемо вважати, що теорема справджується, коли кількість множин дорівнює $n - 1$. Доведемо, що вона справедлива і коли кількість множин дорівнює n.

Для кожного $x_1 \in X_1$ розглянемо функцію $f_{x_1} : \widehat{X}_1 \to K$. За індуктивним припущенням функція f_{x_1} буде $F_2 \otimes \ldots \otimes F_n$-поліномом на $\widehat{X}_1$. Для кожного номера m введемо до розгляду множини

$$A_m = \{x_1 \in X_1 \colon \deg f_{x_1} \le m\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = X_1$. Оскільки множина X_1 незліченна, то існує такий номер m, що і множина $A = A_m$ незліченна, а отже, і нескінченна.

Зафіксуємо точку $\widehat{x}_n = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{A} = A \times X_2 \times \ldots \times X_{n-1}$.

Функція $f_{\widehat{x}_n} = (f_{x_1})_{x_2 \ldots x_{n-1}} : X_n \to K$ — це F_n-поліном, до того ж $\deg f_{\widehat{x}_n} \leq \deg f_{x_1} \leq m$, адже $x_1 \in A$. Тому

$$f_{\widehat{x}_n}(x_n) = \sum_{k=1}^{m} a_k(\widehat{x}_n) f_{n,k}(x_n)$$

для деяких функцій $a_k : \widetilde{A} \to K$ і кожного $x_n \in X_n$. Оскільки множина X_n нескінченна, то з неї можна вибрати m різних точок $x_{n,1}, \ldots, x_{n,m}$. За лемою 1 існують такі числа $\mu_{k,j}$, що

$$a_k(\widehat{x}_n) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{k,j} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n,j})$$

для кожного $k = 1, \ldots, m$ і $\widehat{x}_n \in \widetilde{A}$. За індуктивним припущенням $f_{x_{n,j}} : \widehat{X}_n \to K$ — це $F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-1}$-поліном, тому і коефіцієнти a_k є $F_1 \otimes \ldots \otimes F_{n-1}$-поліноміальними на множині $\widetilde{A}$. Розглянемо функцію

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \mu_{k,j} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n,j}) f_{n,k}(x_n),$$

яка, очевидно, є F-поліномом. При цьому зрозуміло, що $g|_{\widetilde{A}} = f|_{\widetilde{A}}$.

Зафіксуємо $\widehat{x}_1 = (x_2, \ldots, x_n) \in \widehat{X}_1$. Для нього $f_{\widehat{x}_1}|_A = g_{\widehat{x}_1}|_A$. Оскільки $f_{\widehat{x}_1}$ і $g_{\widehat{x}_1}$ — це F_1-поліноми і множини A є нескінченною, то $f_{\widehat{x}_1} = g_{\widehat{x}_1}$ за лемою 3. Це означає, що $f = g$, а отже, f — F-поліном.

7. Заключні зауваження. Ми кажемо, що система $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : T \to K$ задовольняє *слабку умову Гаара*, якщо існує така строго зростаюча послідовність $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральних чисел n_k, що для кожного k і довільної множини різних точок $t_1, \ldots, t_{n_k}$ з T відповідний визначник Гаара Δ_{n_k} для цієї системи є відмінним від нуля. Як показано в пункті 2, тригонометрична система функцій задовольняє слабку умову Гаара на проміжку $[0; 2\pi)$. Схоже на те, що умову Гаара в теоремах 1 і 2 можна замінити слабкою умовою Гаара, але це вже буде предметом наступної публікації авторів.

Література

1. *Bochnak J., Siciak J.* Polynomials and multilinear mapping in topological vector spaces // Stud. Math. – 1971. – **39**. – P. 59 – 76.
2. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 66 – 76.
3. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Нарізно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$ // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2009. – Вип. 454. – С. 50 – 53.
4. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про нарізно сталі та стало-лінійні функції // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2011. – **1**, № 3. – С. 44 – 49.
5. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про (m, n)-поліноміальні функції на добутках та нарізно поліноміальні функції на хрестах // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2012. – **2-3**, № 3. – С. 108 – 113.
6. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про поліноміальність нарізно сталих функцій // Карпат. мат. публ. – 2014. – **5**, № 3. – С. 61 – 66.
7. *Косован В. М.* Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій від багатьох змінних // Бук. мат. журн. – 2014. – **2**, № 2-3. – С. 126 – 129.

8. *Mazur S., Orlicz W.* Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. Erste Mitteilung // Stud. Math. – 1934. – **5**, № 1. – S. 50 – 68.
9. *Mazur S., Orlicz W.* Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. Zweite Mitteilung // Stud. Math. – 1934. – **5**, № 1. – S. 179 – 189.
10. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій на добутках комплексних банахових просторів // Мат. вісн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 89 – 96.
11. *Плічко А. М.* Поліноміальність нарізно поліноміальних операторів // Мат. вісн. НТШ. – 2014. – **11**. – С. 33 – 35.
12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
13. *Haar A.* Die Minkowskische Geometrie und die Annaherung an stetige Funktionen // Math. Ann. – 1918. – **78**. – S. 294 – 311.
14. *Колмогоров А. Н.* Замечание но поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1 (23). – С. 216 – 221.
15. *Зуховицкий С. И., Крейн М. Г.* Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А. Н. Колмогорова // Успехи мат. наук. – 1950. – **5**, вып. 1 (35). – С. 217 – 229.
16. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
17. *Чарін В. С.* Лінійна алгебра. – Київ: Техніка, 2004. – 416 с.

Одержано 24.07.16