DOI: 10.37863/umzh.v72i6.1107

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, Н. В. Парфінович (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ОПТИМАЛЬНЕ ВІДНОВЛЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ ТА ЇХНІХ СКАЛЯРНИХ ДОБУТКІВ ЗА КОЕФІЦІЄНТАМИ ФУР'Є, ЯКІ ВІДОМІ З ПОХИБКОЮ

In a Hilbert space defined as the image of the unit ball under the action of a compact operator, we solve problems of optimal recovery of elements by their first n Fourier coefficients given approximately. Similar problems are also solved for scalar products of elements from two different classes.

На класі елементів гільбертового простору, який визначається, як образ одиничної кулі при дії компактного оператора, розв'язано задачі оптимального відновлення за відомими з похибкою першими n коефіцієнтами Фур'є елементів класу. Аналогічні задачі розв'язано для скалярних добутків елементів із двох різних класів.

1. Вступ. Нехай задано банахів простір X, клас елементів $W \subset X$ і деяку (інформаційну) множину Y. Нехай також задано (інформаційне) відображення $I\colon W \to \mathcal{P}_0(Y)$, де $\mathcal{P}_0(Y)$ — сукупність непорожніх підмножин множини Y. Будемо вважати, що, бажаючи отримати інформацію про елемент x, ми отримуємо деякий елемент множини $I(x)$.

Довільне відображення $\Phi\colon Y \to X$ будемо називати методом відновлення елементів множини W за заданою інформацією.

Похибкою методу відновлення на класі W за інформацією I називається величина

$$E(W, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W \\ y \in I(x)}} \|x - \Phi(y)\|_X. \tag{1}$$

Величина

$$E(W; I) = \inf_{\Phi} E(W, I, \Phi) \tag{2}$$

називається похибкою оптимального відновлення елементів класу W за інформацією I. При цьому метод Φ^*, який реалізує точну нижню межу у (2), називається оптимальним.

Нехай H_1 і H_2 — комплексні гільбертові простори зі скалярними добутками $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2}$ та відповідними нормами $\|\cdot\|_{H_1}$ і $\|\cdot\|_{H_2}$, A — компактний оператор, що діє з H_1 в H_2. Через W^A позначимо образ одиничної кулі простору H_1 при дії оператора A, тобто

$$W^A = \big\{Ah\colon h \in H_1,\ \|h\|_{H_1} \le 1\big\}.$$

Ми будемо розглядати задачу відновлення елементів класу W^A у випадку, коли $X = H_2$, $Y = \mathbb{C}^n$, а інформація про елемент $x \in W^A$ полягає у тому, що нам відомо з деякою похибкою n коефіцієнтів Фур'є елемента x за деякою (пов'язаною з оператором A) ортонормованою системою. Результати даної роботи доповнюють та узагальнюють результати роботи [6], які відносяться до відновлення функцій.

Задачу відновлення лінійних операторів у гільбертових просторах, коли інформацію задано точно, було розглянуто в роботі [1]. У випадку, коли інформаційне відображення I має вигляд $Ix = i(x) + B$, де i — лінійний оператор, а B — куля деякого радіуса (яка задає похибку), відповідну задачу відновлення було розглянуто у роботі [2] (див. також [3 – 5]). Інший підхід до вивчення таких задач, який базується на стандартних принципах опуклої оптимізації, використовувався у [6]. При цьому у [2] доведено, що серед оптимальних методів відновлення існує лінійний, а у [6] знайдено оптимальні методи відновлення у випадках, коли похибка задається у рівномірній метриці.

У даній роботі ми розглянемо задачу оптимального відновлення за неточною інформацією про елементи класу W^A при різних способах означення оператора I. Крім того, ми розглянемо задачу оптимального відновлення скалярних добутків елементів із двох (взагалі кажучи, різних) класів елементів гільбертового простору H за неточною інформацією про співмножники. Ця задача формулюється так.

Нехай H — гільбертовий простір зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, W_1 і W_2 — два класи елементів простору H. Нехай також $I\colon H \times H \to \mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ — деяке інформаційне відображення. Довільне відображення $\Phi\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ будемо називати методом відновлення скалярного добутку. Величину

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W_1, y \in W_2 \\ (\overline{a}, \overline{b}) \in I(x,y)}} \left| \langle x, y \rangle_H - \Phi(\overline{a}, \overline{b}) \right|$$

будемо називати похибкою методу відновлення Φ скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I. Величину

$$\mathcal{E}(W_1, W_2, I) = \inf_{\Phi} \mathcal{E}(W_1, W_2, I, \Phi) \tag{3}$$

будемо називати оптимальною похибкою відновлення скалярного добутку на класах W_1 і W_2 за інформацією, що дається оператором I, а метод Φ^*, який реалізує інфімум у правій частині (3), — оптимальним методом відновлення.

Задачу оптимального відновлення білінійних функціоналів (зокрема, скалярних добутків) за точною лінійною інформацією про аргументи було поставлено у роботі [7]. Там же було отримано перші результати щодо її розв'язання. З приводу подальших результатів див. роботи [8 – 12].

У даній роботі ми розглянемо задачу оптимального відновлення скалярних добутків елементів з класів W_1 і W_2 за неточною інформацією про перші n коефіцієнтів Фур'є елементів за деякою ортонормованою системою.

2. Загальні оцінки знизу похибок оптимального відновлення. Нехай X — банахів простір, Y — векторний простір і θ_Y — нульовий елемент простору Y (нульовий елемент простору $\mathbb{C}^n$ будемо позначати через θ). Нехай також I — деяке інформаційне відображення.

Лема 1. *Припустимо, що знайдеться такий елемент* $\tilde{x} \in W$, *що* $-\tilde{x} \in W$ *і* $\theta_Y \in I(\tilde{x}) \cap \cap I(-\tilde{x})$. *Тоді для будь-якого методу* Φ

$$E(W, I, \Phi) \geq \|\tilde{x}\|_X$$

і, отже,

$$E(W; I) \geq \|\tilde{x}\|_X.$$

Доведення. Маємо

$$E(W,I,\Phi)=\sup_{\substack{x\in W\\ a\in I(x)}}\big\|x-\Phi(a)\big\|_X\ge\sup_{\substack{x\in W\\ \theta_Y\in I(x)\cap I(-x)}}\big\|x-\Phi(\theta_Y)\big\|_X\ge$$

$$\ge\sup_{\substack{x\in W\\ \theta_Y\in I(x)\cap I(-x)}}\max\big\{\big\|x-\Phi(\theta_Y)\big\|_X,\big\|-x-\Phi(\theta_Y)\big\|_X\big\}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\sup_{\substack{x\in W\\ \theta_Y\in I(x)\cap I(-x)}}\max\big\{\big\|x-\Phi(\theta_Y)\big\|_X+\big\|-x-\Phi(\theta_Y)\big\|_X\big\}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\sup_{\substack{x\in W\\ \theta_Y\in I(x)\cap I(-x)}}\max\big\{\big\|x-\Phi(\theta_Y)\big\|_X+\big\|x+\Phi(\theta_Y)\big\|_X\big\}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\sup_{\substack{x\in W\\ \theta_Y\in I(x)\cap I(-x)}}2\|x\|_X\ge\|\tilde{x}\|_X.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай задано класи W_1 і W_2 елементів гільбертового простору H та довільне інформаційне відображення $I\colon H\times H\to\mathcal{P}_0(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n)$. Припустимо, що знайдуться такі елементи $\tilde{x}\in W_1$ і $\tilde{y}\in W_2$, що*

$$-\tilde{x}\in W_1\qquad i\qquad(\theta,\theta)\in I(\tilde{x},\tilde{y})\cap I(-\tilde{x},\tilde{y})$$

або

$$-\tilde{y}\in W_2\qquad i\qquad(\theta,\theta)\in I(\tilde{x},\tilde{y})\cap I(\tilde{x},-\tilde{y}).$$

Тоді для будь-якого методу відновлення $\Phi\colon\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$

$$\mathcal{E}(W_1,W_2,I,\Phi)\ge\big|\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle_H\big|.$$

Доведення. Нехай, для визначеності, $(\theta,\theta)\in(I(\tilde{x},\tilde{y})\cap I(-\tilde{x},\tilde{y}))$. Тоді для довільного Φ

$$\mathcal{E}(W_1,W_2,I,\Phi)\ge\sup_{\substack{x\in W_1,y\in W_2\\ (\theta,\theta)\in(I(x,y)\cap I(-x,y))}}\big|\langle x,y\rangle_H-\Phi(\theta,\theta)\big|\ge$$

$$\ge\max\big\{\big|\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle_H-\Phi(\theta,\theta)\big|,\ \big|\langle-\tilde{x},\tilde{y}\rangle_H-\Phi(\theta,\theta)\big\}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\big\{\big|\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle_H-\Phi(\theta,\theta)\big|+\big|\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle_H+\Phi(\theta,\theta)\big|\big\}\ge\big|\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle_H\big|.$$

Лему 2 доведено.

3. s-Числа та канонічне зображення компактного оператора у гільбертовому просторі. Нехай H_1 і H_2 — гільбертові простори, A — компактний оператор, що діє з H_1 в H_2, A^* — спряжений оператор. Тут ми наведемо, в потрібному нам вигляді, твердження про канонічне зображення оператора A (див., наприклад, [13]). Оператор $A^*A\colon H_1\to H_1$ є додатним, компактним та самоспряженим. В силу теореми Гільберта – Шмідта в H_1 існує ортонормована система $\{\phi_n\}$ власних векторів цього оператора, які відповідають власним значенням $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n\neq0$, така, що кожний елемент $\xi\in H_1$ можна зобразити єдиним чином у вигляді

$$\xi = \xi' + \sum_k c_k \phi_k, \quad \xi' \in \mathrm{Ker} A^* A, \tag{4}$$

при цьому $A^*A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k$, і якщо система $\{\phi_n\}$ нескінченна, то $\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$.

Оскільки оператор A^*A додатний, його ненульові власні значення теж додатні. Занумеруємо їх у порядку незростання з урахуванням кратностей: $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$. Покладемо $s_n = \sqrt{\lambda_n}$. Враховуючи, що $\mathrm{Ker} A^*A = \mathrm{Ker} A$, з (4) отримуємо

$$A\xi = \sum_k c_k A\phi_k = \sum_k s_k c_k \frac{1}{s_k} A\phi_k = \sum_k s_k c_k \psi_k,$$

де $\psi_k = \dfrac{1}{s_k} A\phi_k$. Як неважко перевірити, $\{\psi_n\}$ — ортонормована система у просторі H_2. Таким чином, якщо A — компактний оператор, що діє з H_1 в H_2, то в H_1 і H_2 існують такі ортонормовані системи $\{\phi_n\}$ і $\{\psi_n\}$, що $A\phi_n = s_n \psi_n$, будь-який $\xi \in H_1$ можна зобразити єдиним чином у вигляді

$$\xi = \xi' + \sum_k \langle \xi, \phi_k \rangle_{H_1} \phi_k, \quad \xi' \in \mathrm{Ker} A,$$

при цьому

$$A\xi = \sum_k s_k \langle \xi, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k. \tag{5}$$

Як і у випадку $H_1 = H_2$, числа s_n будемо називати s-числами оператора A, а рівність (5) — канонічним зображенням цього оператора.

4. Відновлення за неточно заданою інформацією. В подальшому ми вважатимемо, що для оператора A система $\{\phi_k\}$ і, отже, система s-чисел $\{s_k\}$ нескінченні. Зміни, які потрібно внести у формулювання теорем і їхні доведення у протилежному випадку, очевидні, і ми на них не зупиняємось. Нагадаємо, що $W^A = \{x \in H_2 : x = Ah,\ h \in H_1,\ \|h\|_{H_1} \leq 1\}$. Для $x \in W^A$ через $x_k = \langle x, \psi_k \rangle_{H_2}$, $k \in \mathbb{N}$, позначатимемо коефіцієнти Фур'є елемента $x = Ah$ по системі $\{\psi_k\}$, а через $h_k = \langle h, \phi_k \rangle_{H_1}$ — коефіцієнти Фур'є елемента h по системі $\{\phi_k\}$. Зрозуміло, що $x_k = s_k h_k$. Розглянемо задачу відновлення класу W^A у випадку, коли інформація про перші n членів послідовності $\{x_k\}$ коефіцієнтів Фур'є є відомою з деякою похибкою, тобто замість значень $x_k = s_k h_k$, $k = 1, \ldots, n$, задано набір чисел a_k, які відрізняються від x_k на малу величину в тій або іншій метриці.

Як звичайно, через l_p^n, $n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, будемо позначати лінійний простір векторів $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ із відповідною нормою $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{l_p^n}$.

Для невід'ємного ε через $B[\varepsilon, l_p^n]$ позначимо замкнену кулю у просторі l_p^n з центром у нулі та радіусом ε. У випадку, коли $n = 1$, замість $B[\varepsilon, l_p^n]$ будемо писати $B[\varepsilon]$. Крім того, скрізь нижче вважаємо, що $\sum_{k=1}^0$ дорівнює нулю, якщо під знаком суми стоять числа, і дорівнює нульовому елементу гільбертового простору H, якщо під знаком суми стоять елементи H.

4.1. Випадок $I(x) = I_{\overline{\varepsilon}}^n(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon_1] \times \ldots \times B[\varepsilon_n]$, $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

Теорема 1. *Нехай $A : H_1 \to H_2$— компактний оператор і $n \in \mathbb{N}$. Якщо*

$$1 - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0,$$

то покладемо $m = n$. *У протилежному випадку виберемо* $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, *так, щоб*

$$1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} \geq 0 \qquad i \qquad 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2} - \frac{\varepsilon_{m+1}^2}{s_{m+1}^2} < 0. \tag{6}$$

Тоді

$$E(W^A; I_{\overline{\varepsilon}}^n)^2 = s_{m+1}^2 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right). \tag{7}$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi_m^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right) \psi_k, \quad \overline{a} = (a_1, \ldots, a_m).$$

***Зауваження* 1.** Якщо $m = 0$, то похибка $E(W^A; I_{\overline{\varepsilon}}^n)^2 = s_1^2$, а оптимальним методом відновлення є $\Phi_0^*(\overline{a}) = \theta_{H_2}$.

Доведення. Застосовуючи нерівність опуклості і враховуючи, що $|x_k - a_k| \leq \varepsilon_k$ для $k = 1, \ldots, n$, для $x \in W^A$ і будь-якого m, $0 \leq m \leq n$, отримуємо

$$\left\|x - \Phi_m^*(\overline{a})\right\|_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^{m} \left| x_k - a_k \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right) \right|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)(x_k - a_k) + \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2} x_k \right|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left(\left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right) |x_k - a_k|^2 + \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2} |x_k|^2 \right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right) |x_k - a_k|^2 + \sum_{k=1}^{m} s_{m+1}^2 |h_k|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} s_k^2 |h_k|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right) \varepsilon_k^2 + s_{m+1}^2.$$

Таким чином, при будь-якому $m \leq n$ має місце оцінка

$$\left\|x - \Phi_m^*(\overline{a})\right\|_{H_2}^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right) \varepsilon_k^2 + s_{m+1}^2. \tag{8}$$

Для встановлення оцінки знизу припустимо, що число m вибрано з умови (6), і означимо набір невід'ємних чисел $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}$:

$$u_k^2 = \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}, \quad k = 1, \ldots, m, \qquad \text{і} \qquad u_{m+1}^2 = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}.$$

Покладемо

$$\tilde{h} = \sum_{k=1}^{m+1} u_k \phi_k \qquad \text{i} \qquad \tilde{x} = A\tilde{h} = \sum_{k=1}^{m+1} s_k u_k \psi_k.$$

Зрозуміло, що $\tilde{x} \in W^A$ і

$$\|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^{m} s_k^2 u_k^2 + s_{m+1}^2 u_{m+1}^2 = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 + s_{m+1}^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k^2}{s_k^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 + s_{m+1}^2 - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}.$$

Покажемо, що $\theta \in I_{\overline{\varepsilon}}^n(\tilde{x}) \cap I_{\overline{\varepsilon}}^n(-\tilde{x})$. У випадку, коли $m = n$, виконання умов

$$|\tilde{x}_k| = |s_k u_k| \leq \varepsilon_k \tag{9}$$

для всіх $k = 1, \ldots, n$ є очевидним, так що $\theta \in I_{\overline{\varepsilon}}^n(\tilde{x}) \cap I_{\overline{\varepsilon}}^n(-\tilde{x})$. У випадку $m \leq n-1$ для $k = 1, \ldots, m$ умови (9) виконуються внаслідок визначення u_k і $\tilde{x}_k$. Для $k = m+1$ на підставі умови (6) маємо

$$|u_{m+1}|^2 \leq \frac{\varepsilon_{m+1}^2}{s_{m+1}^2} \qquad \text{i} \qquad |\tilde{x}_{m+1}|^2 \leq \varepsilon_{m+1}^2.$$

Умову (9) виконано і в цьому випадку. Таким чином, $\theta \in I_{\overline{\varepsilon}}^n(\tilde{x}) \cap I_{\overline{\varepsilon}}^n(-\tilde{x})$. Застосовуючи лему 1, отримуємо

$$E(W^A; I_{\overline{\varepsilon}}^n)^2 \geq \|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = s_{m+1}^2 + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right).$$

Теорему 1 доведено.

4.2. Випадок $I(x) = I_{\varepsilon,2}^n(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B[\varepsilon; l_2^n]$.

Теорема 2. *Нехай $A\colon H_1 \to H_2$ — компактний оператор. Тоді якщо $\varepsilon < s_1$, то*

$$E\big(W^A, I_{\varepsilon,2}^n\big) = \sqrt{s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_1^2}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_n^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right) \psi_k.$$

Якщо $\varepsilon \geq s_1$, то $E\big(W^A, I_{\varepsilon,2}^n\big) = s_1$ і оптимальним методом відновлення є $\Phi_0^*(\overline{a}) = \theta$.

Доведення. Спочатку встановимо оцінку зверху. З оцінки (8) при $m = n$, враховуючи, що $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 \leq \varepsilon^2$, виводимо

$$E\big(W^A, I_{\varepsilon,2}^n\big) \leq \sup_{x \in W^A} \big\|x - \Phi_n^*(\overline{a})\big\|_{H_2}^2 \leq \max_{k=1,\ldots,n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right) \varepsilon^2 + s_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_1^2}\right) \varepsilon^2 + s_{n+1}^2.$$

Необхідну оцінку зверху отримано.

Встановимо оцінку знизу. Припустимо, що $\varepsilon < s_1$.

Нехай $u_1 = \dfrac{\varepsilon}{s_1}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon^2}{s_1^2}}$. Покладемо

$$\tilde{u} = u_1\phi_1 + u_{n+1}\phi_{n+1} \quad \text{і} \quad \tilde{x} = A\tilde{u} = s_1u_1\psi_1 + s_{n+1}u_{n+1}\psi_{n+1} = \varepsilon\psi_1 + s_{n+1}\psi_{n+1}\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{s_1^2}}.$$

При цьому, вочевидь, $\theta \in I^n_{\varepsilon,2}(\tilde{x}) \cap I^n_{\varepsilon,2}(-\tilde{x})$. Крім того, $\tilde{x} \in W^A$ і

$$\|\tilde{x}\|^2_{H_2} = \varepsilon^2 + s^2_{n+1}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{s_1^2}\right) = \varepsilon^2\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s_1^2}\right) + s^2_{n+1}.$$

Використовуючи лему 1, отримуємо

$$E\big(W^A, I^n_{\varepsilon,2}\big)^2 \geq \|\tilde{x}\|^2_{H_2} = \varepsilon^2\left(1 - \frac{s^2_{n+1}}{s_1^2}\right) + s^2_{n+1}.$$

Випадок $\varepsilon < s_1$ розглянуто.

Нехай тепер $\varepsilon \geq s_1$. Тоді для $\Phi^*_0(\overline{a}) = \theta$

$$E\big(W^A, I^n_{\varepsilon,2}\big) \leq \sup_{x \in W^A} \|x - \theta\|_{H_2} \leq s_1.$$

Для оцінки знизу покладемо $\tilde{u} = \psi_1$ і $\tilde{x} = s_1\psi_1$, $\|\tilde{x}\|_{H_2} = s_1$. Зрозуміло, що $\theta \in I^n_{\varepsilon,2}(\tilde{x}) \cap$ $\cap\, I^n_{\varepsilon,2}(-\tilde{x})$ і за лемою 1

$$E\big(W^A, I^n_{\varepsilon,2}\big) \geq \|\tilde{x}\|_{H_2} = s_1.$$

Теорему 2 доведено.

4.3. Випадок $I(x) = I^n_{\varepsilon,\infty}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B\big[\varepsilon; l^n_\infty\big]$.

Теорема 3. *Нехай $A\colon H_1 \to H_2$ — компактний оператор і число $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, вибрано, як у теоремі* 1. *Тоді*

$$E\big(W^A, I^n_{\varepsilon,\infty}\big) = \sqrt{s_n^2 + \varepsilon^2\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)}.$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi^*_m(\overline{a}) = \sum_{k=1}^{m} a_k\left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)\psi_k.$$

Доведення. З теореми 1 виводимо оцінку зверху

$$E\big(W^A, I^n_{\varepsilon,\infty}\big) \leq \sup_{\substack{x \in W^A \\ \overline{a} \in I^n_\varepsilon(x)}} \big\|x - \Phi^*_m(\overline{a})\big\|_{H_2} \leq \sqrt{s^2_{m+1} + \varepsilon^2\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{s^2_{m+1}}{s_k^2}\right)}.$$

Для отримання оцінки знизу достатньо в міркуваннях, за допомогою яких встановлено оцінку знизу в теоремі 1, покласти $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = \varepsilon$.

Теорему 3 доведено.

4.4. Випадок $\boldsymbol{I(x) = I^n_{\varepsilon,p}(x) = (x_1, \ldots, x_n) + B\big[\varepsilon; l^n_p\big],\ 2 < p < \infty.}$ Введемо такі позначення:

$$c_k^2 = \frac{\left(1 - \dfrac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}-1}}{\left(\sum_{j=1}^n \left(1 - \dfrac{s_{n+1}^2}{s_j^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{2}{p}}}, \qquad b_k^2 = \varepsilon^2 c_k^2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Теорема 4. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *і*

$$\Phi_n^*(\overline{a}) = \sum_{k=1}^n a_k \left(1 - \frac{s_{m+1}^2}{s_k^2}\right)\psi_k, \quad \overline{a} = (a_1, \ldots, a_m).$$

Тоді для довільних $\varepsilon > 0$ *і* $2 < p < \infty$

$$E\big(W^A; I^n_{\varepsilon,p}\big)^2 \leq s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Якщо $\varepsilon > 0$ *таке, що виконано умову*

$$\varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \frac{c_k^2}{s_k^2} \leq 1, \tag{10}$$

то

$$E\big(W^A; I^n_{\varepsilon,p}\big)^2 = s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Доведення. При доведенні теореми 1 для $x \in W^A$ було отримано оцінку

$$\big\|x - \Phi_n^*(\overline{a})\big\|_{H_2}^2 \leq \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)|x_k - a_k|^2 + s_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n |h_k|^2 + \sum_{k=n+1}^\infty s_k^2 |h_k|^2.$$

Застосовуючи для оцінки першого доданка нерівність Гельдера з показниками $\dfrac{p}{p-2}$, $\dfrac{p}{2}$ і враховуючи, що

$$s_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n |h_k|^2 + \sum_{k=n+1}^\infty s_k^2 |h_k|^2 \leq s_{n+1}^2,$$

отримуємо

$$\big\|x - \Phi_n^*(\overline{a})\big\|_{H_2}^2 \leq \left\{\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2}\right)^{\frac{p}{p-2}}\right\}^{\frac{p-2}{p}} \left\{\sum_{k=1}^n |x_k - a_k|^p\right\}^{\frac{2}{p}} + s_{n+1}^2 \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2} \right)^{\frac{p}{p-2}} \right\}^{\frac{p-2}{p}} \varepsilon^2 + s_{n+1}^2.$$

Для встановлення оцінки знизу вимагатимемо, щоб $\varepsilon > 0$ було таким, щоб виконувалась умова (10).

Покладемо $u_k^2 = \dfrac{b_k^2}{s_k^2}$, $k = 1, \ldots, n$, і $u_{n+1}^2 = 1 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{b_k^2}{s_k^2}$. Зауважимо, що

$$\sum_{k=1}^{n} (s_k u_k)^p = \sum_{k=1}^{n} \left(b_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \varepsilon^p. \tag{11}$$

Покладемо $\tilde{h} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k \phi_k$, $\tilde{x} = A\tilde{h} = \sum_{k=1}^{n+1} s_k u_k \psi_k$. Зрозуміло, що $\tilde{x} \in W^A$. Крім того,

$$\|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = \sum_{k=1}^{n} s_k^2 u_k^2 + s_{n+1}^2 u_{n+1}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + s_{n+1}^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{s_k^2} \right) = s_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2} \right) =$$

$$= s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 - \dfrac{s_{n+1}^2}{s_k^2} \right) \left(1 - \dfrac{s_{n+1}^2}{s_k^2} \right)^{\frac{p}{p-2} - 1}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{s_{n+1}^2}{s_k^2} \right)^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{2}{p}}} =$$

$$= s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2} \right)^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Внаслідок (11) $\theta \in I_{\varepsilon,p}^n(\tilde{x}) \cap I_{\varepsilon,p}^n(-\tilde{x})$. Застосовучи лему 1, отримуємо

$$E\big(W^A; I_{\varepsilon,p}^n\big)^2 \geq \|\tilde{x}\|_{H_2}^2 = s_{n+1}^2 + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}^2}{s_k^2} \right)^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Теорему 4 доведено.

5. Відновлення скалярних добутків. Застосуємо тепер методи з попереднього пункту до задачі відновлення скалярних добутків.

Нехай $A \colon H_1 \to H_2$ — компактний оператор із канонічним зображенням (5):

$$Ag = \sum_k s_k \langle g, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k s_k g_k \psi_k.$$

Нехай також задано обмежений оператор $B \colon H_1 \to H_2$ вигляду

$$Bh = \sum_k q_k \langle h, \phi_k \rangle_{H_1} \psi_k = \sum_k q_k h_k \psi_k,$$

де $\{q_k\}$ — незростаюча послідовність додатних чисел. За допомогою цих операторів визначимо класи

$$W^A = \{Ag\colon \|g\|_{H_1} \leq 1\}, \qquad W^B = \{Bh\colon \|h\|_{H_1} \leq 1\}.$$

Розглянемо задачу оптимального відновлення скалярного добутку $\langle x, y\rangle_{H_2}$ на класах W^A і W^B за неточно заданими наборами перших n коефіцієнтів Фур'є елементів $x \in W^A$ і $y \in W^B$ за системою $\{\psi_k\}$, тобто за неточно заданими наборами чисел $\{s_k g_k\}_{k=1}^n$ і $\{q_k h_k\}_{k=1}^n$. Будемо розглядати цю задачу для інформаційних відображень вигляду

$$I_{\overline{\varepsilon}}^n(x,y) = \big\{(a,b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n\colon\ \forall k = 1,\ldots,n,\ \ |x_k y_k - a_k b_k| \leq \varepsilon_k\big\}$$

і

$$I_{\varepsilon,p}^n(x,y) = \Big\{(a,b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n\colon\ \big\|(x_1y_1,\ldots,x_ny_n) - (a_1b_1,\ldots,a_nb_n)\big\|_{l_p^n} \leq \varepsilon\Big\}.$$

Тут $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — невід'ємні числа і $1 \leq p \leq \infty$.

5.1. Інформаційне відображення $I_{\overline{\varepsilon}}^n(x,y)$.

Теорема 5. *Для заданого $n \in \mathbb{N}$ покладемо $m = n$, якщо*

$$1 - \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \geq 0.$$

У протилежному випадку виберемо $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leq n$, виходячи з умов

$$1 - \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} \geq 0 \qquad і \qquad 1 - \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{s_k q_k} - \frac{\varepsilon_{m+1}}{s_{m+1}q_{m+1}} < 0. \tag{12}$$

Тоді

$$E\big(W^A, W^B, I_{\overline{\varepsilon}}^n\big) = s_{m+1}q_{m+1} + \sum_{k=1}^m \varepsilon_k \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^m a_k b_k \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right).$$

Доведення. Для $x \in W^A$, $y \in W^B$ маємо

$$\big|\langle x,y\rangle_{H_2} - \Phi_m^*(\overline{a},\overline{b})\big| = \left|\sum_{k=1}^\infty x_k y_k - \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right) a_k b_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^m x_k y_k - \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right) a_k b_k + \sum_{k=m+1}^\infty x_k y_k\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right)\Big(x_k y_k - a_k b_k\Big) + \sum_{k=1}^m \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k} x_k y_k + \sum_{k=m+1}^\infty x_k y_k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right)|x_ky_k-a_kb_k|+\sum_{k=1}^{m}\frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}s_kq_k|h_kg_k|+s_{m+1}q_{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}|h_kg_k|.$$

Використовуючи для оцінки другого і третього доданків нерівність Коші – Буняковського, продовжуємо оцінку так:

$$\left|\langle x,y\rangle_{H_2}-\Phi_m^*(\overline{a},\overline{b})\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right)|x_ky_k-a_kb_k|+s_{m+1}q_{m+1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|h_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right)\varepsilon_k+s_{m+1}q_{m+1}.$$

Таким чином, при будь-якому m справджується оцінка

$$\left|\langle x,y\rangle_{H_2}-\Phi_m^*(\overline{a},\overline{b})\right| \leq \sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right)\varepsilon_k+s_{m+1}q_{m+1}. \qquad (13)$$

Для встановлення оцінки знизу припустимо, що m вибрано з умови (12), і покладемо

$$u_k=v_k=\sqrt{\frac{\varepsilon_k}{s_kq_k}}, \quad k=1,\ldots,m, \qquad \text{і} \qquad u_{m+1}=v_{m+1}=\sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon_k}{s_kq_k}}.$$

Означимо елементи $\tilde{x}\in W^A$ і $\tilde{y}\in W^B$:

$$\tilde{x}=\sum_{k=1}^{m+1}s_ku_k\psi_k, \qquad \tilde{y}=\sum_{k=1}^{m+1}q_kv_k\psi_k.$$

Покажемо, що $(\theta,\theta)\in I(\tilde{x},\tilde{y})\cap I(-\tilde{x},\tilde{y})$. У випадку $m=n$ виконання умов $|\tilde{x_k}\tilde{y_k}| = |s_kq_ku_kv_k|\leq\varepsilon_k$ при всіх k є очевидним. Отже, $(\theta,\theta)\in I(\tilde{x},\tilde{y})\cap I(-\tilde{x},\tilde{y})$.

Якщо ж $m\leq n-1$, то при $k=1,\ldots,m$ нерівності $|\tilde{x_k}\tilde{y_k}|\leq\varepsilon_k$ виконуються згідно з означенням $\tilde{x_k}$ і $\tilde{y_k}$. Для $k=m+1$ маємо

$$\left|\tilde{x}_{m+1}\tilde{y}_{m+1}\right|=s_{m+1}q_{m+1}\left(1-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon_k}{s_kq_k}\right)\leq s_{m+1}q_{m+1}\frac{\varepsilon_{m+1}}{s_{m+1}q_{m+1}}=\varepsilon_{m+1}.$$

Далі

$$\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle_{H_2}=\sum_{k=1}^{m}s_kq_ku_kv_k+s_{m+1}q_{m+1}\left(1-\sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon_k}{s_kq_k}\right)=$$

$$=s_{m+1}q_{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right)\varepsilon_k.$$

Використовуючи лему 2, отримуємо

$$E\big(W^A, W^B, I_{\overline{\varepsilon}}^n\big) \geq \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_{H_2} = s_{m+1}q_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_k q_k}\right)\varepsilon_k.$$

Необхідну оцінку встановлено.

Теорему 5 доведено.

5.2. Інформаційне відображення $I_{\varepsilon,1}^n$.

Теорема 6. *Якщо* $\varepsilon < s_1 q_1$, *то*

$$E\big(W^A, W^B, I_{\varepsilon,1}^n\big) = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є

$$\Phi_n^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$

Якщо ж $\varepsilon \geq s_1 q_1$, *то*

$$E\big(W^A, W^B, I_{\varepsilon,1}^n\big) = s_1 q_1$$

і $\Phi_0^*(\overline{a}, \overline{b}) = \theta$ *— оптимальний метод.*

Доведення. З оцінки (13), враховуючи, що $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \leq \varepsilon$, виводимо, що для $x \in W^A$, $y \in W^B$ при $m = n$

$$\big|\langle x, y \rangle_{H_2} - \Phi_n^*(\overline{a}, \overline{b})\big| \leq \max_{k=\overline{1,n}} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right) \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k + s_{n+1}q_{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right)\varepsilon + s_{n+1}q_{n+1}.$$

Це необхідна оцінка зверху:

$$E\big(W^A, W^B, I_{\varepsilon,1}^n\big) \leq s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$

Встановимо оцінку знизу. Припустимо спочатку, що $\varepsilon < s_1 q_1$. Нехай $u_1 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{s_1 q_1}}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - \dfrac{\varepsilon}{s_1 q_1}}$. Покладемо $\tilde{u} = u_1\phi_1 + u_{n+1}\phi_{n+1}$, $\tilde{v} = u_1\phi_1 + u_{n+1}\phi_{n+1}$ і

$$\tilde{x} = A\tilde{u} = s_1 \tilde{u}_1 \psi_1 + s_{n+1}\tilde{u}_{n+1}\psi_{n+1}, \qquad \tilde{y} = B\tilde{v} = q_1 \tilde{u}_1 \psi_1 + q_{n+1}\tilde{u}_{n+1}\psi_{n+1}.$$

Зрозуміло, що $\tilde{x} \in W^A$, $\tilde{y} \in W^B$ і $(\theta, \theta) \in I_{\varepsilon,1}^n(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I_{\varepsilon,1}^n(-\tilde{x}, \tilde{y})$. Крім того,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_{H_2} = s_1 q_1 u_1^2 + s_{n+1}q_{n+1}u_{n+1}^2 = \varepsilon + \left(1 - \frac{\varepsilon}{s_1 q_1}\right)s_{n+1}q_{n+1} =$$

$$= s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1 q_1}\right).$$

З огляду на лему 2 отримуємо

$$E\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}\big) \ge s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_1q_1}\right).$$

Нехай тепер $\varepsilon \ge s_1q_1$. Для методу $\Phi_0^*(\overline{a}, \overline{b}) = \theta$ і будь-яких $x \in W^A,\ y \in W^B$ одержуємо

$$\big|\langle x, y\rangle_{H_2} - \theta\big| = \sum_k s_kq_k|h_kg_k| \le s_1q_1\|h\|_{H_1}\|g\|_{H_1} \le s_1q_1.$$

Для оцінки знизу покладемо $\tilde{x} = s_1\psi_1,\ \tilde{y} = q_1\psi_1$. Зрозуміло, що $\theta \in I^n_{\varepsilon,1}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I^n_{\varepsilon,1}(-\tilde{x}, \tilde{y})$. За лемою 2 маємо

$$E\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,1}\big) \ge \big|\langle\tilde{x}, \tilde{y}\rangle_{H_2}\big| = s_1q_1.$$

Теорему 6 доведено.

5.3. Інформаційне відображення $I^n_{\varepsilon,\infty}$.

Теорема 7. *Для заданого $n \in \mathbb{N}$ число $m \in \mathbb{Z}_+,\ m \le n$, виберемо, як у теоремі 5. Тоді*

$$E\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,\infty}\big) = s_{m+1}q_{m+1} + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right).$$

При цьому оптимальним методом відновлення є метод

$$\Phi_m^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{m} a_kb_k\left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right).$$

Доведення. З теореми 5 виводимо

$$E\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,\infty}\big) \le \mathcal{E}\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,\infty}, \Phi_m^*\big) \le s_{m+1}q_{m+1} + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{s_{m+1}q_{m+1}}{s_kq_k}\right).$$

Для встановлення оцінки знизу достатньо в міркуваннях, за допомогою яких отримано оцінку знизу в теоремі 5, взяти $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m = \varepsilon$.

Теорему 7 доведено.

5.4. Інформаційне відображення $I^n_{\varepsilon,p}$, $1 < p < \infty$. Нехай $q = p/(p-1)$ і

$$c_k = \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_kq_k}\right)^{q-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_jq_j}\right)^q\right)^{\frac{1-q}{q}}.$$

Теорема 8. *Нехай $\Phi_n^*(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k\left(1 - \dfrac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_kq_k}\right)$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$*

$$E\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}\big) \le \mathcal{E}\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi_n^*\big) \le s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_kq_k}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Якщо ε таке, що виконується умова

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{n} (s_k q_k)^{-1} c_k \leq 1, \tag{14}$$

то

$$E(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}) = \mathcal{E}\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}, \Phi^*_n\big) = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

і метод $\Phi^*_n(\overline{a}, \overline{b})$ *є оптимальним.*

Доведення. В ході доведення теореми 5 було встановлено оцінку

$$\big|\langle x, y\rangle_{H_2} - \Phi^*_n(\overline{a}, \overline{b})\big| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right) |x_k y_k - a_k b_k| + s_{n+1}q_{n+1}.$$

Застосовуючи для оцінки першого доданка нерівність Гельдера з показниками p і $q = \dfrac{p}{p-1}$, отримуємо

$$\big|\langle x, y\rangle_{H_2} - \Phi^*_n(\overline{a}, \overline{b})\big| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k - a_k b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + s_{n+1}q_{n+1} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon + s_{n+1}q_{n+1}.$$

Перше твердження теореми доведено.

Для встановлення оцінки знизу припустимо, що виконано умову (14). Нехай

$$u_k = v_k = \big(\varepsilon (s_k q_k)^{-1} c_k\big)^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \text{і} \quad u_{n+1} = v_{n+1} = \left(1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (s_k q_k)^{-1} c_k\right)^{1/2}.$$

Означимо елементи $\tilde{x} \in W^A$ і $\tilde{y} \in W^B$:

$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{n+1} s_k u_k \psi_k, \qquad \tilde{y} = \sum_{k=1}^{n+1} q_k v_k \psi_k.$$

Як легко бачити, $\sum_{k=1}^{n} |\tilde{x}_k \tilde{y}_k|^p = \varepsilon^p$, так що $(\theta, \theta) \in I^n_{\varepsilon,p}(\tilde{x}, \tilde{y}) \cap I^n_{\varepsilon,p}(-\tilde{x}, \tilde{y})$. Крім того,

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_{H_2} = \sum_{k=1}^{n} s_k q_k u_k v_k = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Використовуючи лему 2, отримуємо

$$E\big(W^A, W^B, I^n_{\varepsilon,p}\big) \geq \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle_{H_2} = s_{n+1}q_{n+1} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{s_{n+1}q_{n+1}}{s_k q_k}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Необхідну оцінку знизу встановлено.

Теорему 8 доведено.

Література

1. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, *A survey of optimal recovery*, Optim. Estimation in Approxim. Theory, Plenum Press, New York (1977).
2. A. A. Melkman, C. A. Micchelli, *Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data*, SIAM J. Numer. Anal., **16**, № 1, 87 – 105 (1979).
3. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, *Lectures on optimal recovery*, Numer. Anal., Springer-Verlag, Berlin (1984).
4. C. A. Micchelli, *Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data: a second look*, Numer. Algorithms, **5**, 375 – 390 (1993).
5. L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).
6. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, *Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью*, Мат. сб., **193**, № 3, 79 – 100 (2002).
7. В. Ф. Бабенко, *О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимации билинейных*, Исследования по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил., Днепропетровск (1979).
8. В. Ф. Бабенко, *Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук*, Днепропетровск (1987).
9. В. Ф. Бабенко, *О приближенном вычислении скалярных произведений*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 15 – 21 (1988).
10. В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко, *Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов*, Укр. мат. журн., **43**, № 10, 1305 – 1310 (1991).
11. В. Ф. Бабенко, А. А. Руденко, *Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов в линейных нормированных пространствах*, Укр. мат. журн., **49**, № 6, 828 – 831 (1997).
12. В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько, А. А. Руденко, *Об оптимальном восстановлении билинейных функционалов по линейной информации*, Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика, вип. 17, 11 – 17 (2012).
13. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (обобщенные функции, вып. 4)*, Физматгиз, Москва (1961).

Одержано 23.10.19