УДК 517.5

А. К. Кушпель (Ун-т Чанкая, Анкара, Турция)

О КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА

We give the solution of a classical problem of approximation theory on sharp asymptotic of the Lebesgue constants or norms of the Fourier – Laplace projections on the real spheres $\mathbb{S}^d$, complex $\mathrm{P}^d(\mathbb{C})$ and quaternionic $\mathrm{P}^d(\mathbb{H})$ projective spaces, and the Cayley elliptic plane $\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay})$. In particular, these results extend sharp asymptotic found by Fejer in the case of $\mathbb{S}^1$ in 1910 and by Gronwall in 1914 in the case of $\mathbb{S}^2$.

Наведено розв'язок класичної задачі теорії апроксимації про точну асимптотику констант Лебега, або норм проекцій Фур'є – Лапласа, на дійсній сфері $\mathbb{S}^d$, в комплексному $\mathrm{P}^d(\mathbb{C})$ і кватерніонному $\mathrm{P}^d(\mathbb{H})$ проективних просторах та на еліптичній площині Келлі $\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay})$. Зокрема, отримані результати доповнюють точні асимптотики, знайдені Фейєром у 1910 р. у випадку $\mathbb{S}^1$ і Гронваллом у 1914 р. у випадку $\mathbb{S}^2$.

1. Введение. Пусть $\mathbb{M}^d$ — одно из следующих многообразий: действительная сфера $\mathbb{S}^d$, комплексное $\mathrm{P}^d(\mathbb{H})$ или кватернионное $\mathrm{P}^d(\mathbb{C})$ проективное пространство, эллиптическая плоскость Кэлли $\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay})$. Основной целью настоящей статьи является установление точных асимптотик констант Лебега

$$L_n(\mathbb{M}^d) := \left\| S_n \middle| C(\mathbb{M}^d) \to C(\mathbb{M}^d) \right\|, \quad n \to \infty,$$

где $C(\mathbb{M}^d)$ — пространство непрерывных функций на многообразии $\mathbb{M}^d$ и S_n — ортогональная проекция, которая определена ниже. В случае окружности $\mathbb{S}^1$ Л. Фейер [5] установил, что

$$L_n\left(\mathbb{S}^1\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|D_n(t)\right| dt \, = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1), \qquad n \to \infty,$$

где $D_n(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$ — ядро Дирихле. Асимптотические разложения констант Лебега интерполяционных полиномов с точками интерполяции $x_k = 2\pi k/(2n+1)$, $-n \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, на окружности $\mathbb{S}^1$ были получены В. К. Дзядыком и А. С. Прыпиком [3]. Случай двумерной сферы $\mathbb{S}^2$ рассмотрен Т. Гронваллом [7]. Он показал, что

$$L_n\left(\mathbb{S}^2\right) = n^{1/2}\frac{2}{\pi^{3/2}}\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\cot\left(\frac{\eta}{2}\right)}\, d\eta + O(1) = n^{1/2} 2^{3/2} \pi^{-1/2} + O(1)$$

при $n \to \infty$. В случае $\mathrm{P}^d(\mathbb{R})$ константы Лебега найдены А. К. Кушпелем [11],

$$L_{2n}\Big(\mathrm{P}^d(\mathbb{R})\Big) = n^{(d-1)/2} \frac{2\Gamma\left(\dfrac{d-1}{4}\right)}{\pi\Gamma\left(\dfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{d+1}{4}\right)} + O\begin{Bmatrix} n^{(d-2)/2}, & d = 2, \\ n^{(d-3)/2}, & d \geq 3 \end{Bmatrix},$$

$$d = 2, 3, 4, \ldots, \quad n \to \infty.$$

2. Гармонический анализ. Каждое многообразие $\mathbb{M}^d$, т. е. $\mathbb{S}^d$, $d = 2, 3, \ldots$, $\mathrm{P}^d(\mathbb{C})$, $d = 2, 4, 6, \ldots$, $\mathrm{P}^d(\mathbb{H})$, $d = 4, 8, 12, \ldots$, и $\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay})$, может быть представлено как орбита некоторой подгруппы $\mathcal{H}$ ортогональной группы $\mathcal{G}$, т. е. $\mathbb{M}^d = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Через $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ обозначим натуральную проекцию. Пусть также $\mathbf{e}$ — единичный элемент в $\mathcal{G}$. Точка $\mathbf{o} = \pi(\mathbf{e})$, инвариантная относительно действия группы $\mathcal{H}$, называется полюсом $\mathbb{M}^d$. На любом из рассматриваемых многообразий $\mathbb{M}^d$ вводятся риманова метрика $d(\cdot, \cdot)$ и инвариантная мера Хаара $d\nu$. На однородных пространствах такого типа естественно вводится инвариантный дифференциальный оператор второго порядка Δ, известный как оператор Лапласа – Бельтрами. В локальных координатах x_l, $1 \leq l \leq d$, он имеет вид

$$\Delta = -\left(\overline{g}\right)^{-1/2} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_j g^{jk} \left(\overline{g}\right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где $g_{jk} := g(\partial/x_j, \partial/x_k)$, $\overline{g} := \left\| \det(g_{jk}) \right\|$ и $(g^{jk}) := (g_{jk})^{-1}$. Оператор Лапласа – Бельтрами Δ является эллиптическим, самосопряженным и инвариантным. Его собственные значения образуют монотонно возрастающую к бесконечности последовательность $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \ldots$ $\ldots \leq \theta_k \leq \ldots$. Соответствующие собственные подпространства H_k, $k \geq 0$, конечномерны, $d_k = \dim \mathrm{H}_k < \infty$, $k \geq 0$, и ортогональны, причем $L_2(\mathbb{M}^d, \nu) = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}_k$. Пусть $\left\{Y_j^k\right\}_{j=1}^{d_k}$ — некоторый базис собственного пространства H_k. Пусть также ϕ — непрерывная функция, $\phi \in$ $\in C(\mathbb{M}^d)$, с рядом Фурье

$$\phi \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} c_{k,j}(\phi) Y_j^k, \qquad c_{k,j}(\phi) = \int\limits_{\mathbb{M}^d} \phi \overline{Y}_j^k d\nu.$$

Суммы Фурье порядка n определяются как

$$S_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{d_k} c_{k,j}(\phi) Y_j^k, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Отметим, что все рассматриваемые здесь многообразия $\mathbb{M}^d$ являются двухточечными однородными пространствами (см. [1, 2, 6, 8, 9, 13]). Их геометрия во многом схожа. Каждое из них имеет замкнутые геодезические длины $2L$. Здесь через L обозначен диаметр пространства $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, т. е. максимальное расстояние между любыми двумя точками. Напомним, что функция, заданная на $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, инвариантна относительно левого действия группы $\mathcal{H}$ на многообразии $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда она зависит только от расстояния между своим аргументом и полюсом $\mathbf{o} = \mathbf{e}\mathcal{H}$. Далее, поскольку расстояние между любой точкой многообразия $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ и полюсом $\mathbf{e}\mathcal{H}$ не более чем L, то $\mathcal{H}$-сферические функции Z на многообразии $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ естественно отождествляются с функциями $\tilde{Z}$, заданными на $[0, L]$. Обозначим через θ расстояние между произвольной точкой на многообразии $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ и $\mathbf{e}\mathcal{H}$. Рассмотрим геодезическую систему полярных координат $(\theta, \mathbf{u})$, где $\mathbf{u}$ — угловой параметр. В этой системе координат радиальная часть Δ_θ оператора Лапласа – Бельтрами Δ записывается в виде

$$\Delta_\theta = (A(\theta))^{-1} \frac{d}{d\theta} \left(A(\theta) \frac{d}{d\theta} \right), \tag{1}$$

где $A(\theta)$ — площадь сферы радиуса θ в многообразии $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, которая вычисляется с использованием структур алгебр Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ (см. [9, с. 251; 8, с. 168]). Известно, что

$$A(\theta)=\omega_{\sigma+\rho+1}\lambda^{-\sigma}(2\lambda)^{-\rho}(\sin\lambda\theta)^{\sigma}(\sin 2\lambda\theta)^{\rho}, \tag{2}$$

где ω_d — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^d$ и

$$\mathbb{S}^d: \sigma=0, \qquad \rho=d-1, \qquad \lambda=\pi/2L, \qquad d=2,3,\ldots,$$

$$\mathrm{P}^d(\mathbb{C}): \sigma=d-2, \qquad \rho=1, \qquad \lambda=\pi/2L, \quad d=4,6,8,\ldots,$$

$$\mathrm{P}^d(\mathbb{H}): \sigma=d-4, \qquad \rho=3, \qquad \lambda=\pi/2L, \quad d=8,12,\ldots,$$

$$\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay}): \sigma=8, \qquad \rho=7, \qquad \lambda=\pi/2L.$$

Используя (2) и (1), нетрудно показать, что радиальная часть оператора Лапласа – Бельтрами Δ_θ с точностью до мультипликативной константы представима в виде

$$\Delta_\theta=(\sin\lambda\theta)^{-\sigma}(\sin 2\lambda\theta)^{-\rho}\frac{d}{d\theta}(\sin\lambda\theta)^{\sigma}(\sin 2\lambda\theta)^{\rho}\frac{d}{d\theta}.$$

Выполняя замену переменных $t=\cos 2\lambda\theta$, записываем Δ_θ с точностью до мультипликативной константы в виде

$$\Delta_t=(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d}{dt}(1-t)^{1+\alpha}(1+t)^{1+\beta}\frac{d}{dt}, \tag{3}$$

где

$$\alpha=(\sigma+\rho-1)/2, \qquad \beta=(\rho-1)/2. \tag{4}$$

Заметим, что для всех рассматриваемых здесь многообразий

$$\alpha=(d-2)/2.$$

Нам понадобится следующее утверждение [12, с. 60].

Лемма 1. *Полиномы Якоби $y=P_k^{(\alpha,\beta)}$ удовлетворяют линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка*

$$((1-t)^{\alpha+1}(1-t)^{\beta+1}y')'+k(k+\alpha+\beta+1)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}y=0.$$

Применяя лемму 1, находим, что собственные функции оператора Δ_t, заданного формулой (3), являются известными полиномами Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}$, а собственные значения имеют вид $\theta_k=-k(k+\alpha+\beta+1)$. Таким образом, зональные $\mathcal{H}$-инвариантные функции[1] $Z_k\in \mathrm{H}_k$ порядка $k=0,1,2,\ldots,$ $Z_0\equiv 1$, на многообразии $\mathbb{M}^d=\mathcal{G}/\mathcal{H}$ могут быть найдены в явном виде, так как они являются собственными функциями оператора Лапласа – Бельтрами Δ. Пусть $\tilde{Z}_k$ — функции, индуцированные на $[0,L]$ зональными функциями Z_k на $\mathbb{M}^d$, тогда

$$\tilde{Z}_k(\theta)=C_k(\mathbb{M}^d)P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\lambda\theta), \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{5}$$

[1]Напомним, что функция $Z_k(\cdot):\mathbb{M}^d\to\mathbb{R}$, $k=0,1,2,\ldots,$ называется зональной порядка k, если $Z_k(h^{-1}\cdot)=$ $=Z_k(\cdot)$ для любого $h\in\mathcal{G}$ и $Z_k(\cdot)\in\mathrm{H}_k$.

где α и β были найдены выше. Например, в случае $\mathbb{S}^d$ имеем $\sigma = 0$ и $\rho = d-1$, так что $\alpha = \beta = (d-2)/2$ и полиномы $P_k^{(\alpha,\beta)}$ пропорциональны полиномам Гегенбауэра $P_k^{(d-1)/2}$. Детальное исследование полиномов Якоби проведено в [12]. Отметим, что полиномы Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}(t)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, ортогональны на $(-1,1)$ с весом $\omega^{\alpha,\beta}(t) = c^{-1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, где константа c определяется из условия нормировки $\int_{\mathbb{M}^d} d\nu = 1$ и известной формулы для интеграла Эйлера первого рода

$$\mathrm{B}(p,q) = \int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}d\xi = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad p>0, \quad q>0. \tag{6}$$

После простой замены переменной получаем

$$1 = \int\limits_{\mathbb{M}^d} d\nu = \int\limits_{-1}^1 \omega^{\alpha,\beta}(t)dt = c^{-1}\int\limits_{-1}^1 (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt,$$

откуда находим

$$c = \int\limits_{-1}^1 (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}. \tag{7}$$

Для нормализации полиномов Якоби положим

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}.$$

Отметим, что этот способ нормализации связан с определением полиномов Якоби с помощью производящей функции [12, с. 69].

Пространство Гильберта $L_2(\mathbb{M}^d)$ с обычным скалярным произведением $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{M}^d} f(x)\overline{g}(x)d\nu$ распадается в прямую сумму

$$L_2(\mathbb{M}^d) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathrm{H}_k,$$

где H_k — собственное подпространство оператора Лапласа – Бельтрами Δ, соответствующее собственному значению $\theta_k = -k(k+\alpha+\beta+1)$. Зафиксируем произвольный ортонормированный базис $\{Y_j^k\}_{j=1}^{d_k}$ пространства H_k. Для дальнейшего нам потребуется формула сложения [10]

$$\sum_{j=1}^{d_k} Y_j^k(x)\overline{Y}_j^k(y) = \tilde{Z}_k(\theta), \tag{8}$$

где $\theta = d(x,y)$. Сравнивая (8) и (5), получаем

$$\sum_{j=1}^{d_k} Y_j^k(x)\overline{Y}_j^k(y) = \tilde{Z}_k(\theta) = C_k(\mathbb{M}^d)P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos 2\lambda\theta). \tag{9}$$

3. Константы Лебега. Основным результатом этой статьи является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\mathbb{M}^d = \mathbb{S}^d,\ d = 2,3,\ldots,\ \mathrm{P}^d(\mathbb{C}),\ d = 4,6,\ldots,\ \mathrm{P}^d(\mathbb{H}),\ d = 8,12,\ldots,$ $\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay})$, *тогда*

$$L_n(\mathbb{M}^d) = \mathcal{K}(\mathbb{M}^d) n^{(d-1)/2} + O \begin{Bmatrix} 1, & d = 2,3, \\ n^{(d-3)/2}, & d \geq 4 \end{Bmatrix},$$

где

$$\mathcal{K}(\mathbb{M}^d) = \frac{4}{\pi^{3/2}\Gamma(d/2)} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin\eta)^{(d-3)/2} (\cos\eta)^{\chi(\mathbb{M}^d)} d\eta$$

и

$$\chi(\mathbb{M}^d) = \begin{cases} (d-1)/2, & \mathbb{M}^d = \mathbb{S}^d, \quad d = 2,3,4,\ldots, \\ 1/2, & \mathbb{M}^d = \mathrm{P}^d(\mathbb{C}), \quad d = 4,6,8,\ldots, \\ 2, & \mathbb{M}^d = \mathrm{P}^d(\mathbb{H}), \quad d = 8,12,16,\ldots, \\ 7/2, & \mathbb{M}^d = \mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay}). \end{cases}$$

Константы $\mathcal{K}(\mathbb{M}^d)$ *имеют вид*

$$\mathcal{K}(\mathbb{S}^d) = \frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{d-1}{4}\right)\Gamma\left(\dfrac{d+1}{4}\right)}{\pi^{3/2}\left(\Gamma\left(\dfrac{d}{2}\right)\right)^2}, \qquad d = 2,3,4,\ldots,$$

$$\mathcal{K}(\mathrm{P}^d(\mathbb{C})) = \frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{d-1}{4}\right)\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)}{\pi^{3/2}\Gamma\left(\dfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{d+2}{4}\right)}, \qquad d = 4,6,8,\ldots,$$

$$\mathcal{K}(\mathrm{P}^d(\mathbb{H})) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{d-1}{4}\right)}{\pi\Gamma\left(\dfrac{d}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{d+5}{4}\right)}, \qquad d = 8,12,16,\ldots,$$

$$\mathcal{K}(\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay})) = \frac{11\cdot 2^{1/2}}{2949120\,\pi^{1/2}}.$$

Доказательство. Для дальнейшего нам потребуются в явном виде константы $C_k(\mathbb{M}^d)$, которые были определены в (9). Полагая в (9) $y = x$ и интегрируя по мере $d\nu$, находим

$$d_k = \dim H_k = \sum_{j=1}^{d_k} \int\limits_{\mathbb{M}^d} |Y_j^k(x)|^2 d\nu = C_k(\mathbb{M}^d) P_k^{(\alpha,\beta)}(1). \qquad (10)$$

Возводя в квадрат обе части (9), а затем интегрируя по мере $d\nu(x)$, получаем

$$\sum_{j=1}^{d_k} \left|Y_j^k(y)\right|^2 = C_k^2(\mathbb{M}^d) \int\limits_{\mathbb{M}^d} \left(P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos(2\lambda d(x,y)))\right)^2 d\nu(x). \tag{11}$$

Поскольку мера $d\nu$ инвариантна, то

$$\int\limits_{\mathbb{M}^d} \left(P_k^{(\alpha,\beta)}\big(\cos(2\lambda d(x,y))\big)\right)^2 d\nu(x) = c^{-1}\big\|P_k^{(\alpha,\beta)}\big\|_2^2,$$

где константа c определена в (7) и

$$\|f\|_2 = \left(\int\limits_{-1}^{1} \|f(t)\|^2 \, (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt\right)^{1/2}, \qquad f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_2 < \infty.$$

Известно [12, с. 68], что

$$\big\|P_k^{(\alpha,\beta)}\big\|_2^2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(P_k^{(\alpha,\beta)}(t)\right)^2 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}.$$

Таким образом, (11) может быть записано в виде

$$\sum_{j=1}^{d_k} |Y_j^k(y)|^2 = c^{-1} C_k^2(\mathbb{M}^d)\big\|P_k^{(\alpha,\beta)}\big\|_2^2.$$

Интегрируя последнее равенство по мере $d\nu(y)$, находим

$$d_k = c^{-1} C_k^2(\mathbb{M}^d)\big\|P_k^{(\alpha,\beta)}\big\|_2^2.$$

Сравнивая последнее равенство с (10), получаем

$$C_k(\mathbb{M}^d) = \frac{cP_k^{(\alpha,\beta)}(1)}{\big\|P_k^{(\alpha,\beta)}\big\|_2^2}. \tag{12}$$

Теперь мы найдем интегральное представление сумм Фурье $S_n(\phi, x)$ функции $\phi \in L_1(\mathbb{M}^d)$:

$$S_n(\phi, x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{d_k} c_{k,j}(\phi) Y_j^k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{d_k} \left(\int\limits_{\mathbb{M}^d} \phi(y) \overline{Y}_j^k(y)\, d\nu(y)\right) Y_j^k(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{M}^d} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y}_j^k(y) Y_j^k(x)\right) \phi(y) d\nu(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{M}^d} K_n(x,y)\phi(y)d\nu(y), \tag{13}$$

где

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y}_j^k(y)\, Y_j^k(x). \tag{14}$$

Из (9) и (12) имеем

$$K_n(x,y) = c\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}{\left\|P_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_2^2} P_k^{(\alpha,\beta)}\big(\cos 2\lambda d(x,y)\big).$$

Положим

$$G_n(\gamma,\delta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\gamma)P_k^{(\alpha,\beta)}(\delta)}{\left\|P_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_2^2},$$

тогда [12, с. 71]

$$G_n(\gamma,1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\gamma)P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}{\left\|P_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_2^2} = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\gamma).$$

Это означает, что ядро (14) в интегральном представлении (13) может быть записано в виде

$$K_n(x,y) = \frac{c2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} P_n^{(\alpha+1,\beta)}\big(\cos 2\lambda d(x,y)\big).$$

Пусть $\mathbf{o}$ — полюс многообразия $\mathbb{M}^d$, тогда, так как K_n является сферической функцией и мера $d\nu$ инвариантна,

$$L_n(\mathbb{M}^d) = \sup\left\{ \int\limits_{\mathbb{M}^d} \big|K_n(x,y)|d\nu(y)\big|\, x\in\mathbb{M}^d \right\} = \int\limits_{\mathbb{M}^d} \big|K_n(\mathbf{o},y)\big|d\nu(y) =$$

$$= \frac{c2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int\limits_{\mathbb{M}^d} |P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos 2\lambda d(\mathbf{o},y))|d\nu(y) =$$

$$= \frac{cc^{-1}2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int\limits_{-1}^{1} |P_n^{(\alpha+1,\beta)}(t)|(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}dt =$$

$$= \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int\limits_{0}^{\pi} |P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\eta)| \left(2\sin^2\frac{\eta}{2}\right)^{\alpha} \left(2\cos^2\frac{\eta}{2}\right)^{\beta} \sin\eta d\eta =$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int\limits_{0}^{\pi} |P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\eta)| \left(\sin\frac{\eta}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{\eta}{2}\right)^{2\beta+1} d\eta =$$

$$= \left(\frac{I_n}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \left(n^{\alpha+1} + O(n^{\alpha}) \right), \quad n \to \infty, \tag{15}$$

где

$$I_n = \int_0^{\pi} \left| P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\eta) \right| \left(\sin\frac{\eta}{2} \right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{\eta}{2} \right)^{2\beta+1} d\eta. \tag{16}$$

Известно [12, с. 196], что при $0 < \theta < \pi$

$$P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\eta) = n^{-1/2}\, \kappa(\eta) \cos(N\eta + \gamma) + O(n^{-3/2}), \quad n \to \infty, \tag{17}$$

где $\kappa(\eta) = \pi^{-1/2} \left(\sin\frac{\eta}{2} \right)^{-\alpha-3/2} \left(\cos\frac{\eta}{2} \right)^{-\beta-1/2}$ и

$$N = n + 1 + \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \gamma = -\frac{\alpha+3/2}{2}\pi = -\frac{d+1}{4}\pi.$$

Сравнивая (16) и (17), а также используя элементарные оценки производной функции

$$\sigma(\eta) \;=\; \left(\sin\frac{\eta}{2} \right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{\eta}{2} \right)^{\beta+1/2},$$

заключаем, что

$$I_n \;=\; \pi^{-1/2} n^{-1/2} \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\eta}{2} \right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{\eta}{2} \right)^{\beta+1/2} \times$$

$$\times \left\| \cos\left(\left(n + \frac{\alpha+\beta+2}{2} \right)\eta - \frac{d+1}{4}\pi \right) \right\| d\eta + O(n^{-3/2}) =$$

$$= 2\pi^{-3/2} n^{-1/2} \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\eta}{2} \right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{\eta}{2} \right)^{\beta+1/2} d\eta +$$

$$+ n^{-1/2}\, O \left\{ \begin{matrix} n^{-1/2}, & \alpha = 0, \\ n^{-1}, & \alpha \geq 1/2 \end{matrix} \right\}, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Напомним, что $\alpha = (d-2)/2,\ d \geq 2$, для всех рассматриваемых многообразий $\mathbb{M}^d$. Положим $\chi(\mathbb{M}^d) = \beta + 1/2$, тогда из (15) и (18) находим

$$L_n(\mathbb{M}^d) = \mathcal{K}(\mathbb{M}^d) n^{\alpha+1/2} + O(n^{\alpha-1/2}),$$

где

$$\mathcal{K}(\mathbb{M}^d) = \frac{2}{\pi^{3/2}\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\eta}{2} \right)^{\alpha-1/2} \left(\cos\frac{\eta}{2} \right)^{\beta+1/2} d\eta =$$

$$= \frac{4}{\pi^{3/2}\Gamma(d/2)} \int_0^{\pi/2} (\sin\eta)^{(d-3)/2} (\cos\eta)^{\chi(\mathbb{M}^d)} d\eta, \qquad \alpha = (d-2)/2.$$

Таким образом,

$$L_n(\mathbb{M}^d) = \mathcal{K}(\mathbb{M}^d) n^{(d-1)/2} + O \begin{Bmatrix} n^{(d-2)/2}, & d = 2, \\ n^{(d-3)/2}, & d \geq 3 \end{Bmatrix}.$$

Наконец, значение $\chi(\mathbb{M}^d)$, где $\mathbb{M}^d = \mathbb{S}^d$, $\mathrm{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathrm{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathrm{P}^{16}(\mathrm{Cay})$, легко подсчитывается с использованием (4).

Литература

1. *Bordin B., Kushpel A., Levesley J., Tozoni S.* Estimates of n-widths of Sobolev's classes on compact globally symmetric spaces of rank 1 // J. Funct. Anal. – 2003. – **202**. – P. 307 – 326.
2. *Cartan E.* Sur la determination d'un systeme orthogonal complet dans un espace de Riemann symetrique clos // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1929. – **53**. – P. 217 – 252.
3. *Dzyadyk V. K., Dzyadyk S. Yu., Prypik A. S.* Asymptotic behaviour of Lebesgue constants in trigonometric interpolation // Ukr. Mat. Zh. – 1981. – **33**, № 6. – P. 736 – 744.
4. *Erdélyi A. (ed.)* Higher transcendental functions. – New York: McGraw-Hill, 1953. – Vol. 2.
5. *Fejer L.* Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. reine und angew. Math. – 1910. – **138**. – S. 22 – 53.
6. *Gangolli R.* Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Browian motion of several parameters // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1967. – **3**. – P. 121 – 225.
7. *Gronwall T. H.* On the degree of convergence of Laplace series // Trans. Amer. Math. Soc. – 1914. – **15**, № 1. – P. 1 – 30.
8. *Helgason S.* The radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds // Acta Mat. – 1965. – **113**. – P. 153 – 180.
9. *Helgason S. (ed.)* Differential geometry and symmetric spaces. – New York: Acad. Press, 1962.
10. *Koornwinder T.* The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics // SIAM J. Appl. Math. – 1973. – **25**, № 2. – P. 236 – 246.
11. *Kushpel A. K.* Uniform convergence of orthogonal expansions on the real projective spaces // Approxim. Theory and Contingent Problems. – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2008. – P. 191 – 208.
12. *Szegö G. (ed.).* Orthogonal polynomials. – New York: Amer. Math. Soc., 1939.
13. *Wang H. C.* Two-point homogeneous spaces // Ann. Math. – 1952. – **55**. – P. 177 – 191.

Получено 20.11.18