УДК 517.53, 519.117

Ф. Г. Абдуллаєв (Мерсін. ун-т, Туреччина, Киргизько-Турецький ун-т „Манас”, Киргизстан),
М. Імаш кизи (Киргизько-Турецький ун-т „Манас”, Киргизстан),
В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАСТОСУВАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ ФАБЕРА В ДОВЕДЕННЯХ КОМБІНАТОРНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ*

We study the possibility of application of the Faber polynomials in proving some combinatorial identities. It is shown that the coefficients of Faber polynomials of mutually inverse conformal mappings generate a pair of mutually invertible relations. We prove two identities relating the coefficients of Faber polynomials and the coefficients of Laurent expansions of the corresponding conformal mappings. Some examples are presented.

Приведено применение многочленов Фабера к доказательствам некоторых комбинаторных тождеств. Показано, что коэффициенты многочленов Фабера взаимно обратных конформных отображений порождают пару взаимно обратимых соотношений. Доказаны два тождества, которые связывают между собой коэффициенты многочленов Фабера и коэффициенты лорановских разложений соответствующих конформных отображений. Приведены примеры.

1. Вступ. Комбінаторним тотожностям присвячено велику кількість праць, серед яких є фундаментальні монографії [1 – 9]. У книгах Дж. Ріордана [1, 5] і Г. П. Єгоричева [4] описано метод вивчення комбінаторних тотожностей, який базується на понятті взаємно оборотних співвідношень. Зокрема, в [4] розв’язано задачу, поставлену в [1], про класифікацію відомих пар взаємно оборотних комбінаторних співвідношень. А саме, в класифікації Ріордана – Єгоричева [4, с. 98] вказано вісім типів таких пар: пари найпростішого типу, Ґульда, Чебишова, Лежандра, Лежандра – Чебишова, Абеля, Лагранжа і пара звичайного та експоненціального типу.

Як зазначено в [1, 5], кожна пара взаємно оборотних співвідношень має властивість ортогональності, яка вже сама по собі може бути джерелом для отримання однієї або навіть кількох комбінаторних тотожностей. З цієї точки зору нам видається цікавим навести ще один новий тип взаємно оборотних співвідношень, які породжуються многочленами Фабера.

Останнім часом в математичній літературі спостерігається інтерес до многочленів Фабера у зв’язку з відкриттями їх нових можливостей у дослідженнях з різних напрямків сучасної математики. Зокрема, многочлени Фабера застосовувались і до досліджень у комбінаториці [10 – 13].

У даній роботі ми прагнемо не стільки до відкриттів нових комбінаторних тотожностей, як до аналізу однієї комбінаторної властивості многочленів Фабера та до демонстрації її можливостей у застосуваннях. У такому контексті на прикладі доведення теореми 1 показано, як метод взаємно оборотних співвідношень може бути застосований до встановлення коефіцієнтних тотожностей (для многочленів Фабера), які, у свою чергу, в конкретних випадках перетворюються в певні комбінаторні тотожності.

* Підтримано грантом Киргизько-Турецького університету „Манас” (проект № 2017 FBE-03, Бішкек, Киргизстан).

Опишемо коротко будову статті. В п. 2 наведено означення і всі необхідні відомості про взаємно оборотні співвідношення та про многочлени Фабера. Основним результатом у цьому пункті є теорема 1, яка має самостійний інтерес як з точки зору комбінаторних тотожностей, так і з точки зору загальної теорії многочленів Фабера. В п. 3 розглянуто чотири приклади континуумів, для яких знайдено в явному вигляді аналітичні вирази для многочленів Фабера і показано, якого вигляду для них набирають взаємно оборотні співвідношення.

2. Многочлени Фабера і взаємно оборотні співвідношення. Нехай K — континуум у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто компактна множина, яка містить більше ніж одну точку і доповнення якої до розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ є однозв'язною областю.

Скрізь далі, не втрачаючи загальності, будемо вважати, що трансфенітний діаметр континууму K дорівнює одиниці. За такого припущення в теоремі Рімана стверджується існування єдиної функції Φ, яка конформно і однолисто відображає область $K^- := \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ на область $\mathbb{D}^- := \{w \in \overline{\mathbb{C}} : |w| > 1\}$ так, що $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = 1$, а також існування оберненої функції $\Psi := \Phi^{-1}$, нормованої умовами $\Psi(\infty) = \infty$, $\Psi'(\infty) = 1$.

Позначимо $\alpha_{-1} = 1$, $\beta_{-1} = 1$ і нехай

$$\Psi(w) = \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha_k w^{-k}, \qquad \Phi(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \beta_k z^{-k}$$

— розклади в ряди Лорана функцій Ψ і Φ в околі нескінченно віддаленої точки.

Для кожного невід'ємного цілого m означимо пару числових послідовностей $\{a_{k,m}\}_{k=0}^{m}$ і $\{b_{k,m}\}_{k=0}^{m}$ як пару коефіцієнтів правильних частин розкладів функцій Ψ^m і Φ^m відповідно в ряди Лорана в околі $\{\infty\}$:

$$\big(\Psi(w)\big)^m = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} w^k + O\left(\frac{1}{w}\right), \qquad w \to \infty, \tag{1}$$

$$\big(\Phi(z)\big)^m = \sum_{k=0}^{m} b_{k,m} z^k + O\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z \to \infty. \tag{2}$$

Многочлени

$$P_m(w) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} w^k \tag{3}$$

і

$$F_m(z) = \sum_{k=0}^{m} b_{k,m} z^k \tag{4}$$

називаються многочленами Фабера функцій Ψ і Φ відповідно. Зауважимо, що зазвичай таку назву використовують лише для многочленів F_m, але наведене означення не впливає на те від якої з функцій Ψ або Φ відштовхуватися. Зрозуміло також, що P_m і F_m — це монічні многочлени степеня m, тобто $a_{m,m} = b_{m,m} = 1$.

Скрізь далі, оперуючи числами α_j, β_j, $a_{k,m}$, $b_{k,m}$ і відповідними многочленами Фабера P_m і F_m, будемо розуміти, що вони породжені деяким континуумом $K \subset \mathbb{C}$ за допомогою відповідних функцій Ψ і Φ.

Розглянемо дві нескінченні нижньотрикутні числові матриці $\mathfrak{A} = (a_{k,m})$ і $\mathfrak{B} = (b_{k,m})$, складені з елементів $a_{k,m}$ і $b_{k,m}$ відповідно.

Твердження 1. *Матриці $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ є взаємно оберненими.*

Це твердження, напевно, є відомим у такому чи іншому еквівалентному вигляді. Ми звертаємо на нього увагу у зв'язку з таким поняттям.

Пара систем лінійних співвідношень

$$x_m = \sum_{k=0}^{m} c_{k,m} y_k, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,$$

і

$$y_m = \sum_{k=0}^{m} d_{k,m} x_k, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,$$

які пов'язують деякі дві числові послідовності $\{x_m\}$ і $\{y_m\}$, називається парою взаємно оборотних співвідношень (див., наприклад, [4, с. 87]), якщо матриці $\mathfrak{C} = (c_{k,m})$ і $\mathfrak{D} = (d_{k,m})$ є взаємно оберненими.

***Наслідок* 1.** *Для будь-якого $r \in \mathbb{Z}_+$ співвідношення*

$$x_m = \sum_{k=0}^{m} a_{k+r,m+r} y_k, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

і

$$y_m = \sum_{k=0}^{m} b_{k+r,m+r} x_k, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

є взаємно оборотними.

В основу доведення твердження 1 покладено таку основну властивість многочленів Фабера.

Лема 1. *Для будь-яких $m \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$ справджуються рівності*

$$z^m = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} F_k(z) = \sum_{k=0}^{m} b_{k,m} P_k(z). \tag{7}$$

Доведення. Позначимо $\mathbb{T}_R := \{w \in \mathbb{C} \colon |w| = R\}$, $\mathbb{D}_R := \operatorname{int} \mathbb{T}_R$ і $L_R := \{z \in \mathbb{C} \colon |\Phi(z)| = R\}$, $K_R := \operatorname{int} L_R$. Тоді при $R > 1$ для многочленів P_m і F_m мають місце інтегральні зображення

$$F_m(z) = \int\limits_{L_R} \frac{(\Phi(t))^m}{t-z} \frac{dt}{2\pi i} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{t^m \Psi'(t)}{\Psi(t) - z} \frac{dt}{2\pi i}, \qquad z \in K_R, \tag{8}$$

і

$$P_m(z) = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{(\Psi(t))^m}{t-z} \frac{dt}{2\pi i} = \int\limits_{L_R} \frac{t^m \Phi'(t)}{\Phi(t) - z} \frac{dt}{2\pi i}, \qquad z \in \mathbb{D}_R, \tag{9}$$

які випливають з означень цих многочленів за теоремою Коші.

Зафіксуємо $z \in \mathbb{C}$ і виберемо $R > 1$ настільки великим, щоб область K_R містила точку z. Тоді за допомогою формул (1) і (8) одержимо

$$z^m = \int\limits_{L_R} \frac{t^m}{t-z} \frac{dt}{2\pi i} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} (\Psi(t))^m \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} \frac{dt}{2\pi i} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}_R} \Big(P_m(t) + \big((\Psi(t))^m - P_m(t) \big) \Big) \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t) - z} \frac{dt}{2\pi i} = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} F_k(z),$$

що й доводить першу рівність у (7).

Аналогічно, для доведення другої рівності в (7) виберемо $R > 1$ настільки великим, щоб круг $\mathbb{D}_R$ містив точку z. Тоді за допомогою (2), (9) одержимо

$$z^m = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{t^m}{t - z} \frac{dt}{2\pi i} = \int\limits_{L_R} (\Phi(t))^m \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t) - z} \frac{dt}{2\pi i} =$$

$$= \int\limits_{L_R} \Big(F_m(t) + \big((\Phi(t))^m - F_m(t) \big) \Big) \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t) - z} \frac{dt}{2\pi i} = \sum_{k=0}^{m} b_{k,m} P_k(w).$$

Доведення твердження **1.** Згідно з (7), справджуються рівності

$$z^m = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} F_k(z) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} \sum_{l=0}^{k} b_{l,k} z^l = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=k}^{m} a_{l,m} b_{k,l} \right) z^k \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

і

$$z^m = \sum_{k=0}^{m} b_{k,m} P_k(z) = \sum_{k=0}^{m} b_{k,m} \sum_{l=0}^{k} a_{l,k} z^l = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=k}^{m} a_{k,l} b_{l,m} \right) z^k \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Отже, для будь-яких $0 \le k \le m$, $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{l=k}^{m} a_{l,m} b_{k,l} = \sum_{l=k}^{m} a_{k,l} b_{l,m} = \delta_{k,m},$$

де $\delta_{k,m}$ — символ Кронекера, що й доводить твердження 1.

Після підстановки $k \to k+r$ і $m \to m+r$ з останніх рівностей отримаємо співвідношення, які доводять наслідок 1.

Наслідок 1 у поєднанні з відомостями про конформні відображення і відповідні їм многочлени Фабера дає метод будови нових взаємно оборотних співвідношень, які можуть стати інструментом для відкриття нових комбінаторних тотожностей.

Трудність цього методу полягає лише в обчисленні коефіцієнтів $a_{k,m}$ і $b_{k,m}$. Зрозуміло, що числа $a_{k,m}$ і $b_{k,m}$ можна обчислити, виходячи зі співвідношень (1), (2) і явного аналітичного виразу однієї з функцій Φ або Ψ. Наступне твердження, що надає таку можливість, є перефразуванням одного результату А. Жаботинського [14].

Лема 2. *Мають місце формули*

$$a_{k,m} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} (\Psi(t))^m t^{-k-1} \frac{dt}{2\pi i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m, \quad R \ge 1, \tag{10}$$

$$b_{k,m} = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} t^m \frac{dt}{2\pi i}, & k = 0, \\ \displaystyle\frac{m}{k} \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{t^{m-1}}{(\Psi(t))^k} \frac{dt}{2\pi i}, & k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \tag{11}$$

де число $R \ge 1$ *є настільки великим, що* $0 \in K_R$.

***Зауваження* 1.** Аналогічні формули в термінах функції Φ мають вигляд

$$a_{k,m} = \frac{m}{k} \int\limits_{L_R} \frac{t^{m-1}}{(\Phi(t))^k} \frac{dt}{2\pi i}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$b_{k,m} = \int\limits_{L_R} (\Phi(t))^m t^{-k-1} \frac{dt}{2\pi i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{12}$$

де $R > 1$ є настільки великим, що $0 \in L_R$.

Остання формула після підстановки $t \to \Psi(t)$ в інтегралі набирає вигляду

$$b_{k,m} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{\Psi'(t)}{(\Psi(t))^{k+1}} t^m \frac{dt}{2\pi i}.$$

Саме цю формулу використано в роботах [15 – 19] при відшуканні явного виразу для многочленів Фабера F_m конкретних континуумів. Однак, як це буде показано нижче на прикладах, формула (11) в деяких випадках є простішою у використаннях, а відтак має перевагу перед (12) навіть з методичної точки зору.

Доведення. Формула (10) випливає з (1) за теоремою Коші.

Для доведення (11) здиференціюємо функцію Φ^m і скористаємося співвідношенням (2):

$$m(\Phi(t))^{m-1}\Phi'(t) = \frac{d}{dt}(\Phi(t))^m = \sum_{k=1}^{m} k b_{k,m} t^{k-1} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \qquad t \to \infty.$$

Звідси при достатньо великому R за формулою Коші одержимо рівність

$$b_{k,m} = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{L_R} (\Phi(t))^m t^{-1} \frac{dt}{2\pi i}, & k = 0, \\ \displaystyle\frac{m}{k} \int\limits_{L_R} (\Phi(t))^{m-1}\Phi'(t) t^{-k} \frac{dt}{2\pi i}, & k = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

яка й доводить (11) після заміни змінних $t \to \Psi(t)$ в інтегралі.

***Зауваження* 2.** Згідно з означенням Єгоричева [4, с. 87] співвідношення

$$x_m = \sum_{k=0}^{m} c_{k,m} y_k, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,$$

називається співвідношенням типу $F_1^1 = F_1^1(\alpha, \beta, \varphi, f, \psi)$, якщо знайдуться такі функції φ, f, ψ, аналітичні в крузі $\mathbb{D}_R$ при деякому $R > 1$, $\varphi(0) \neq 0$, $f(0) \neq 0$, $\psi(0) \neq 0$, і комплексні числові послідовності $\{\lambda_k\}$ і $\{\mu_k\}$, $\lambda_k \neq 0$, $\mu_k \neq 0$, що

$$c_{k,m} = \frac{\mu_k}{\lambda_m} \int\limits_{\mathbb{T}_R} \varphi(t) f^m(t) \psi^k(t) t^{-m+k-1} \frac{dt}{2\pi i}, \qquad k, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Виконавши в цьому інтегралі заміну змінних $t \to t^{-1}$, одержимо вираз

$$c_{k,m} = \frac{\mu_k}{\lambda_m} \int\limits_{\mathbb{T}_R} \varphi\left(\frac{1}{t}\right) f^m\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{1}{t}\psi\left(\frac{1}{t}\right)\right)^k t^{m-1} \frac{dt}{2\pi i}.$$

Зокрема, якщо $\lambda_k = \mu_k = k$, $\varphi \equiv f \equiv 1$ і $\psi(1/t)/t = 1/\Psi(t)$, то у правій частині отримаємо такий самий інтеграл, як і в (11).

Таким чином, формули (10), (11) свідчать про те, що взаємно оборотні співвідношення (5), (6) є співвідношеннями типу F_1^1 у класифікації Єгоричева.

Наступне твердження є основним у цьому пункті. У ньому йдеться про дві нетривіальні тотожності, які пов'язують між собою числа α_k, β_k, $a_{k,m}$ і $b_{k,m}$.

Теорема 1. *Для кожного $l = 0, 1, \ldots, m$ і $m \in \mathbb{Z}_+$ справджуються рівності*

$$\sum_{k=0}^{m-l} \frac{l+1}{k+l+1} a_{l+1,k+l+1} b_{k+l,m} = -(m-l-1)\alpha_{m-l-1}, \tag{13}$$

$$\sum_{k=0}^{m-l} \frac{l+1}{k+l+1} a_{k+l,m} b_{l+1,k+l+1} = -(m-l-1)\beta_{m-l-1}. \tag{14}$$

Доведення. Нехай m належить $\mathbb{Z}_+$. У доведенні леми 2 показано, що має місце співвідношення

$$(\Phi(z))^m \Phi'(z) = \frac{1}{m+1} F'_{m+1}(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \qquad z \to \infty.$$

З іншого боку, для виразу в лівій частині справджуються співвідношення

$$(\Phi(z))^m \Phi'(z) = \left(F_m(z) + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \left(S_m(\Phi')(z) + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right)\right) =$$

$$= F_m(z) S_m(\Phi')(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z \to \infty,$$

де

$$S_m(\Phi')(z) = 1 - \sum_{k=2}^{m} (k-1)\beta_{k-1} z^{-k}$$

і при $m < 2$ сума покладається рівною нулю.

Отже,

$$F_m(z) S_m(\Phi')(z) = \frac{1}{m+1} F'_{m+1}(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z \to \infty.$$

Звідси випливає, що при достатньо великому $R > 1$ для $l = 0, \ldots, m$ справджуються рівності

$$\int\limits_{\mathbb{T}_R} F_m(t) S_m(\Phi')(t) t^{-l-1} \frac{dt}{2\pi i} = \frac{1}{m+1} \int\limits_{\mathbb{T}_R} F'_{m+1}(t) t^{-l-1} \frac{dt}{2\pi i}. \tag{15}$$

Для інтеграла в лівій частині (15) маємо значення

$$\int\limits_{\mathbb{T}_R} F_m(t) S_m(\Phi')(t) t^{-l-1} \frac{dt}{2\pi i} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \left(\sum_{k=0}^{m-l} b_{k+l,m} t^k\right) \left(1 - \sum_{k=2}^{m-l} (k-1)\beta_{k-1} t^{-k}\right) \frac{dt}{2\pi i t} =$$

$$= b_{l,m} - \sum_{k=2}^{m-l} (k-1)\beta_{k-1} b_{k+l,m},$$

а для інтеграла у правій частині — значення

$$\frac{1}{m+1} \int\limits_{\mathbb{T}_R} F'_{m+1}(t) t^{-l-1} \frac{dt}{2\pi i} = \frac{l+1}{m+1} b_{l+1,m+1}.$$

Отже, рівність (15) породжує систему рівностей

$$b_{l,m} - \sum_{k=2}^{m-l} (k-1)\beta_{k-1} b_{k+l,m} = \frac{l+1}{m+1} b_{l+1,m+1}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \quad l = 0, 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Позначимо

$$x_k := \begin{cases} 1, & k = 0, \\ -(k-1)\beta_{k-1}, & 1 \le k \le m-l, \end{cases}$$

і

$$y_k := \frac{l+1}{k+l+1} b_{l+1,k+l+1}, \qquad 0 \le k \le m-l.$$

Тоді в цих позначеннях співвідношення (16) набирають вигляду

$$\sum_{k=0}^{m-l} x_k b_{k+l,m} = y_{m-l}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \quad l = 0, 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Згідно з наслідком 1, взаємно оборотне з (17) співвідношення має вигляд

$$\sum_{k=0}^{m-l} y_k a_{k+l,m} = \sum_{k=0}^{m-l} \frac{l+1}{k+l+1} b_{l+1,k+l+1} a_{k+l,m} = x_{m-l} = -(m-l-1)\beta_{m-l-1},$$

що й потрібно було показати для доведення рівності (14).

Рівність (13) доводиться так само шляхом формальної заміни a на b і α на β.

3. Приклади. У цій частині статті ми розглянемо чотири приклади континуумів, для яких є відомими явні аналітичні вирази конформних відображень Ψ і Φ, а також многочленів Фабера $\{F_k\}$ [15–20]. Зазначимо, що вирази многочленів $\{P_k\}$ для цих прикладів, як і взагалі для будь-яких інших, в літературі раніше, мабуть, не зустрічалися. Відомі формули П. Г. Тодорова [21], що виражають коефіцієнти многочленів F_k і P_k через коефіцієнти функцій Ψ і Φ, хоча й є найбільш загальними, мають і недолік — вони громіздкі і надзвичайно трудомісткі в застосуваннях. Тому для цілісності викладу тут ми наводимо прозорі аналітичні викладки для обчислень як многочленів $\{P_k\}$, так і многочленів $\{F_k\}$.

***Приклад* 1** (*n-лемніската*). Нехай $K = \{z \in \mathbb{C} \colon |z^n - 1| \le 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\Psi(w) = w(1 + w^{-n})^{1/n}$ і $\Phi(z) = z(1 - z^{-n})^{1/n}$, де при $n \ge 2$ гілки коренів вибрано так, щоб виконувались умови $\lim_{w\to\infty} \Psi(w)/w = \lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z = 1$. Скориставшись розкладом у біноміальний ряд, безпосередньо за означенням одержимо такі вирази для многочленів Фабера:

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} \binom{\frac{m}{n}}{k} z^{m-nk} z^{m-nk} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv m(\operatorname{mod} n)}}^{m} \binom{\frac{m}{n}}{\frac{m-k}{n}} z^k, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,$$

і

$$F_m(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} (-1)^k \binom{\frac{m}{n}}{k} z^{m-nk} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv m(\operatorname{mod} n)}}^{m} (-1)^{\frac{m-k}{n}} \binom{\frac{m}{n}}{\frac{m-k}{n}} z^k, \qquad m \in \mathbb{Z}_+,$$

де

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta+1)},$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера.

Отже,

$$a_{k,m} = \begin{cases} \binom{\frac{m}{n}}{\frac{m-k}{n}}, & k \equiv m(\operatorname{mod} n), \quad k \leq m, \\ 0, & k \not\equiv m(\operatorname{mod} n), \quad k \leq m, \end{cases}$$

$$b_{k,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-k}{n}} \binom{\frac{m}{n}}{\frac{m-k}{n}}, & k \equiv m(\operatorname{mod} n), \quad k \leq m, \\ 0, & k \not\equiv m(\operatorname{mod} n), \quad k \leq m, \end{cases}$$

а співвідношення (5), (6) можна записати у вигляді

$$x_m = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} \binom{\frac{m}{n}}{k} y_{m-nk}, \qquad y_m = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} (-1)^k \binom{\frac{m}{n}}{k} x_{m-nk}.$$

Зокрема, при $n = 1$ ці співвідношення збігаються з парою найпростіших оборотних співвідношень [1, с. 44].

Розглянемо тепер для прикладу тотожність (13).

Взявши до уваги розклад

$$\Psi(w) = w + \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv -1(\operatorname{mod} n)}}^{\infty} \binom{\frac{1}{n}}{\frac{1+k}{n}} w^{-k}, \qquad w \in \mathbb{D}^-,$$

запишемо тотожність (13) у такому вигляді:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv m-l\equiv 0(\operatorname{mod} n)}}^{m-l} (-1)^{\frac{m-k-l}{n}} \frac{l+1}{k+l+1} \binom{\frac{k+l+1}{n}}{\frac{k}{n}} \binom{\frac{m}{n}}{\frac{m-k-l}{n}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{m-l}{n}} (-1)^{\frac{m-l}{n}-k} \frac{l+1}{nk+l+1} \binom{k+\dfrac{l+1}{n}}{k} \binom{\dfrac{m}{n}}{\dfrac{m-l}{n}-k} =$$

$$= -(m-l-1)\binom{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{m-l}{n}}.$$

Тоді після перепозначень $r = \dfrac{m-l}{n}$, $p = \dfrac{m}{n}$, $q = \dfrac{l+1}{n}$ та елементарних спрощень лівої і правої частин останньої рівності одержимо відому тотожність (див., наприклад, [6], рівність (5.22))

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{q}{k}\binom{p}{r-k} = \binom{p-q}{r}, \qquad r \in \mathbb{Z}_+, \quad p \geq r, \quad q > 0.$$

Зауважимо, що висновок про достовірність цієї тотожності (як і тотожностей у наступних прикладах) при всіх $p \geq r$ і $q > 0$ зроблено на підставі того, що множина раціональних чисел є щільною в $\mathbb{R}$, а функція Γ — неперервною на півосі $(0, +\infty)$.

***Приклад* 2 (*n-променева зірка*).** Нехай $K = \cup_{j=1}^{n} \Big\{ z : 0 \leq |z| \leq 4^{\frac{1}{n}}, \arg z = e^{2\pi i \frac{j-1}{n}} \Big\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді $\Psi(w) = w(1+w^{-n})^{\frac{2}{n}}$ і $\Phi(z) = z 2^{-\frac{2}{n}} \big(1+\sqrt{1-4z^{-n}}\,\big)^{\frac{2}{n}}$, де гілки коренів вибрано так, щоб виконувались умови $\lim_{w\to\infty} \Psi(w)/w = \lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z = 1$.

Обчислимо коефіцієнти $a_{k,m}$ і $b_{k,m}$ за лемою 2:

$$a_{k,m} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} t^m (1+t^{-n})^{\frac{2m}{n}} t^{-k-1} \frac{dt}{2\pi i} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\dfrac{2m}{n}}{j} t^{m-k-1-nj} \frac{dt}{2\pi i} =$$

$$= \begin{cases} \dbinom{\dfrac{2m}{n}}{\dfrac{m-k}{n}}, & k \equiv m (\operatorname{mod} n), \\ 0, & k \not\equiv m (\operatorname{mod} n), \end{cases}$$

$$b_{0,m} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{t^n - 1}{t^n + 1} t^m \frac{dt}{2\pi i t} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ (-1)^{\frac{m}{n}} 2, & m \equiv 0 (\operatorname{mod} n), m \geq 1, \\ 0, & m \not\equiv 0 (\operatorname{mod} n), \end{cases}$$

$$b_{k,m} = \frac{m}{k} \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{t^{m-k-1}}{(1+t^{-n})^{\frac{2k}{n}}} \frac{dt}{2\pi i} = \frac{m}{k} \int\limits_{\mathbb{T}_R} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\dfrac{2k-n}{n}+j}{j} t^{m-k-1-nj} \frac{dt}{2\pi i} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{m-k}{n}} \dfrac{2m}{m+k} \dbinom{\dfrac{m+k}{n}}{\dfrac{m-k}{n}}, & k \equiv m (\operatorname{mod} n), \\ 0, & k \not\equiv m (\operatorname{mod} n). \end{cases}$$

Отже,

$$P_m(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv m (\operatorname{mod} n)}}^{m} \begin{pmatrix} \dfrac{2m}{n} \\ \dfrac{m-k}{n} \end{pmatrix} z^k = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} \begin{pmatrix} \dfrac{2m}{n} \\ k \end{pmatrix} z^{m-nk}$$

і

$$F_m(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv m (\operatorname{mod} n)}}^{m} (-1)^{\frac{m-k}{n}} \frac{2m}{m+k} \begin{pmatrix} \dfrac{m+k}{n} \\ \dfrac{m-k}{n} \end{pmatrix} z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} (-1)^k \frac{2m}{2m-nk} \begin{pmatrix} \dfrac{2m-nk}{n} \\ k \end{pmatrix} z^{m-nk}. \tag{18}$$

Співвідношення (5), (6) у цьому випадку можна записати у вигляді

$$x_m = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} \begin{pmatrix} \dfrac{2m}{n} \\ k \end{pmatrix} y_{m-nk}, \qquad y_m = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} (-1)^k \frac{2m}{2m-nk} \begin{pmatrix} \dfrac{2m-nk}{n} \\ k \end{pmatrix} x_{m-nk}.$$

Зокрема, при $n = 2$ ці співвідношення збігаються з парою взаємно оборотних співвідношень Чебишова [1, с. 54].

Оскільки

$$\Psi(w) = w + \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv -1 (\operatorname{mod} n)}}^{\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{2}{n} \\ \dfrac{1+k}{n} \end{pmatrix} w^{-k}, \qquad w \in \mathbb{D}^-,$$

то з рівності (13) отримаємо таку тотожність:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv m-l \equiv 0 (\operatorname{mod} n)}}^{m-l} (-1)^{\frac{m-l-k}{n}} \frac{l+1}{k+l+1} \begin{pmatrix} \dfrac{2(k+l+1)}{n} \\ \dfrac{k}{n} \end{pmatrix} \frac{2m}{m+k+l} \begin{pmatrix} \dfrac{m+k+l}{n} \\ \dfrac{m-k-l}{n} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{m-l}{n}} (-1)^{\frac{m-l}{n}-k} \frac{l+1}{nk+l+1} \begin{pmatrix} 2k + \dfrac{2(l+1)}{n} \\ k \end{pmatrix} \frac{2m}{m+nk+l} \begin{pmatrix} \dfrac{m+l}{n} + k \\ \dfrac{m-l}{n} - k \end{pmatrix} =$$

$$= -(m-l-1) \begin{pmatrix} \dfrac{2}{n} \\ \dfrac{m-l}{n} \end{pmatrix}.$$

Позначивши у цій рівності $r = \dfrac{m-l}{n}$, $p = \dfrac{m+l}{n}$ і $q = \dfrac{2(l+1)}{n}$, одержимо співвідношення, рівносильне тотожності Ґульда [2, с. 41; 3, с. 174]:

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\frac{q}{q+2k}\binom{q+2k}{k}\frac{p+r}{p+k}\binom{p+k}{r-k}=$$

$$=-\frac{r+p-q}{r-p+q}\binom{r-p+k}{r}, \qquad r\in\mathbb{Z}_+, \quad p\geq r, \quad q>0.$$

Звернемо увагу ще на такий факт. Якщо знаходити вираз многочленів F_m безпосередньо за означенням (2), то легко отримати ланцюжок співвідношень

$$(\Phi(z))^m=\left((\Phi(z))^m+\frac{1}{(\Phi(z))^m}\right)-\frac{1}{(\Phi(z))^m}=$$

$$=2^{-\frac{2m}{n}}z^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1+(-1)^k)\binom{\frac{2m}{n}}{k}(1-4z^{-n})^k\right)+O\!\left(\frac{1}{z^m}\right)=$$

$$=2^{-\frac{2m}{n}+1}z^m\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]}\binom{\frac{2m}{n}}{k}(1-4z^{-n})^k+O\!\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z\to\infty.$$

Звідси випливає, що

$$F_m(z)=2^{-\frac{2m}{n}+1}z^m\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]}\binom{\frac{2m}{n}}{k}(1-4z^{-n})^k=\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]}(-1)^k\left(\sum_{l=k}^{[\frac{m}{n}]}\binom{\frac{2m}{n}}{2l}\binom{l}{k}\right)2^{2k-\frac{2m}{n}+1}z^k.$$

Зіставляючи цей вираз і рівність (18), після елементарних перетворень отримуємо тотожність (див. [2, с. 36], формула 3.120)

$$\sum_{l=k}^{[\frac{N}{2}]}\binom{N}{2l}\binom{l}{k}=2^{N-2k-1}\frac{N}{N-k}\binom{N-k}{k}, \qquad N\geq 2k.$$

***Приклад* 3** (*n-гіпоциклоїда*). Нехай K — замикання області, обмеженої n-гіпоциклоїдою $L=\left\{z\colon z=e^{i\theta}+n^{-1}e^{-in\theta}, \theta\in[0,2\pi]\right\}$, $n\in\mathbb{N}$. Тоді $\Psi(w)=w+(nw^n)^{-1}$.

За лемою 2 маємо

$$a_{k,m}=\int\limits_{\mathbb{T}_R}\left(1+(nt^{n+1})^{-1}\right)^m t^{m-k-1}\frac{dt}{2\pi i}=\int\limits_{\mathbb{T}_R}\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}n^{-j}t^{-(n+1)j}\right)t^{m-k-1}\frac{dt}{2\pi i}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{n^{\frac{m-k}{n+1}}}\begin{pmatrix} m\\ \dfrac{m-k}{n+1}\end{pmatrix}, & k\equiv m(\operatorname{mod} n+1), \quad k\leq m,\\ 0, & k\not\equiv m(\operatorname{mod} n+1), \quad k\leq m,\end{cases}$$

і

$$b_{0,m}=\int\limits_{\mathbb{T}_R}\frac{t^{n+1}-1}{t^{n+1}+\dfrac{1}{n}}t^m\frac{dt}{2\pi it}=\begin{cases}1, & m=0,\\ (-1)^{\frac{m}{n+1}}\dfrac{n+1}{n^{\frac{m}{n+1}}}, & m\equiv 0(\operatorname{mod} n+1), \quad m\ge 1,\\ 0, & m\not\equiv 0(\operatorname{mod} n+1),\end{cases}$$

$$b_{k,m}=\frac{m}{k}\int\limits_{\mathbb{T}_R}\frac{t^{m-k-1}}{(1+(nt^{n+1})^{-1})^k}\frac{dt}{2\pi i}=$$

$$=\frac{m}{k}\int\limits_{\mathbb{T}_R}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j-1}{j}(-n)^{-j}t^{-(n+1)j}\right)t^{m-k-1}\frac{dt}{2\pi i}=$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\frac{m-k}{n+1}}\dfrac{m(n+1)}{(m+kn)n^{\frac{m-k}{n+1}}}\begin{pmatrix}\dfrac{m+kn}{n+1}\\ \dfrac{m-k}{n+1}\end{pmatrix}, & k\equiv m(\operatorname{mod} n+1), \quad k\le m,\\ 0, & k\not\equiv m(\operatorname{mod} n+1), \quad k\le m.\end{cases}$$

Отже,

$$P_m(z)=\sum_{\substack{k=0\\ k\equiv m(\operatorname{mod} n+1)}}^{m}\frac{1}{n^{\frac{m-k}{n+1}}}\begin{pmatrix}m\\ \dfrac{m-k}{n+1}\end{pmatrix}z^k=\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n+1}]}\frac{1}{n^k}\binom{m}{k}z^{m-(n+1)k}$$

і

$$F_m(z)=\sum_{\substack{k=0\\ k\equiv m(\operatorname{mod} n+1)}}^{m}(-1)^{\frac{m-k}{n+1}}\frac{m(n+1)}{(m+kn)n^{\frac{m-k}{n+1}}}\begin{pmatrix}\dfrac{m+kn}{n+1}\\ \dfrac{m-k}{n+1}\end{pmatrix}z^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n+1}]}(-1)^k\frac{m}{(m-nk)n^k}\binom{m-nk}{k}z^{m-(n+1)k}.$$

Таким чином, ми довели, що співвідношення

$$x_m=\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n+1}]}\frac{1}{n^k}\binom{m}{k}y_{m-(n+1)k}, \qquad y_m=\sum_{k=0}^{[\frac{m}{n+1}]}(-1)^k\frac{m}{(m-nk)n^k}\binom{m-nk}{k}x_{m-(n+1)k}$$

є взаємно оборотними. Зокрема, при $n=1$ вони збігаються з парою взаємно оборотних співвідношень Чебишова [1, с. 54].

***Приклад* 4** (*крапля Ламберта*)**.** Нехай K — замикання області, обмеженої кривою $L=\{z\colon z=e^{\cos\theta+i(\theta-\sin\theta)}, \theta\in[0,2\pi]\}$. Континуум K назвемо краплею Ламберта, оскільки геометрична форма кривої L нагадує краплю, а її рівняння породжується функцією Ламберта. А саме, функція $\Psi(w)=we^{\frac{1}{w}}$ конформно і однолисто відображає область $\mathbb{D}^-$ на доповнення $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$, а обернена функція Φ має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{-1}{W_0\left(\frac{-1}{z}\right)} = z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)!} z^{-k}, \quad |z| > e,$$

де W_0 — головна гілка функції Ламберта W, яка означається як обернена до функції $w \mapsto we^w$, тобто $W(we^w) = w$ (див., наприклад, [22, 23]).

Обчислимо коефіцієнти $a_{k,m}$ і $b_{k,m}$ за лемою 2:

$$a_{k,m} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} t^m e^{\frac{m}{t}} t^{-k-1} \frac{dt}{2\pi i} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{m^j t^{-j}}{j!} \right) t^{m-k-1} \frac{dt}{2\pi i} = \frac{m^{m-k}}{(m-k)!}, \qquad 0 \le k \le m,$$

$$b_{0,m} = \int\limits_{\mathbb{T}_R} \frac{t-1}{t^2} t^m \frac{dt}{2\pi i} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ -1, & m = 1, \\ 0, & m = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

$$b_{k,m} = \frac{m}{k} \int\limits_{\mathbb{T}_R} t^{-k} e^{\frac{-k}{t}} t^{m-1} \frac{dt}{2\pi i} = \frac{m}{k} \int\limits_{\mathbb{T}_R} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-k)^j t^{-j}}{j!} \right) t^{m-k-1} \frac{dt}{2\pi i} =$$

$$= (-1)^{m-k} \frac{k^{m-k-1} m}{(m-k)!}, \qquad 1 \le k \le m.$$

Отже,

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m^{m-k}}{(m-k)!} z^k$$

і

$$F_m(z) = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ z - 1, & m = 1, \\ m \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \frac{k^{m-k-1}}{(m-k)!} z^k, & m = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Таким чином, співвідношення

$$x_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m^{m-k}}{(m-k)!} y_k, \qquad y_m = b_{0,m} x_0 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \frac{k^{m-k-1} m}{(m-k)!} x_k, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

є взаємно оборотними.

Із співвідношення (13) після елементарних перетворень отримуємо тотожність

$$\sum_{k=0}^{m-l} (-1)^{m-k-l} \binom{m-l}{k} (k+l+1)^{k-1} (k+l)^{m-k-l-1} = -\frac{m-l-1}{m(l+1)}, \qquad m, l \in \mathbb{N}, \quad m \ge l.$$

Література

1. *Riordan J.* Combinatorial identities. – New York: John Wiley, 1968. – 256 p.
2. *Gould H. W.* Combinatorial identities: A standardized set of tables listing 500 binomial coefficient summations. – Morgantown: W. Va., 1972. – 106 p.
3. *Comtet L.* Advanced combinatorics. – Dordrecht: Reidel Publ. Co., 1974. – 343 p.
4. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 282 с.
5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
6. *Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.* Concrete mathematics. – Addison-Wesley Publ. Co., Inc., 1994. – 657 p.
7. *Stanley R. P.* Enumerative combinatorics. – Second ed. – New York; Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. – Vol. 1. – 725 p.
8. *Stanley R. P.* Enumerative combinatorics. – New York; Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. – Vol. 2. – 585 p.
9. *Quaintance J., Gould H. W.* Combinatorial identities for stirling numbers, the unpublished notes of H. W. Gould. – Singapore: World Sci. Publ. Co., 2016. – 260 p.
10. *Gessel I. M., Ree S.* Lattice paths and Faber polynomials // Adv. Combin. Methods and Appl. Probab. and Statist. – Boston: Birkhäuser, 1997. – P. 3 – 13.
11. *Bouali A.* Faber polynomials, Cayley – Hamilton equation and Newton symmetric functions // Bull. Sci. Math. – 2006. – **130**. – P. 49 – 70.
12. *Cheon G.-S., Kim H., Shapiro L. W.* An algebraic structure for Faber polynomials // Linear Algebra and Appl. – 2010. – **433**. – P. 1170 – 1179.
13. *Cheon G.-S., Kim H., Shapiro L. W.* The hitting time subgroup, Lukasiewicz paths and Faber polynomials // Eur. J. Combin. – 2011. – **32**. – P. 82 – 91.
14. *Jabotinsky E.* Representation of functions by matrices. Application to Faber polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – **4**, № 4. – P. 546 – 553.
15. *Bartolomeo J., He M.* On Faber polynomials generated by an m-star // Math. Comput. – 1994. – **62**, № 205. – P. 277 – 287.
16. *He M. X., Saff E. B.* The zeros of Faber polynomials for an m-cusped hypocycloid // J. Approxim. Theory. – 1994. – **78**. – P. 410 – 432.
17. *He M.* The Faber polynomials for m-fold symmetric domains // J. Comput. App. Math. – 1994. – **54**. – P. 313 – 324.
18. *He M.* The Faber polynomials for circular lunes // Comput. Math. and Appl. – 1995. – **30**, № 3-6. – P. 307 – 315.
19. *He M.* Explicit representations of Faber polynomials for m-cusped hypocycloids // J. Approxim. Theory. – 1996. – **87**. – P. 137 – 147.
20. *Савчук В. В.* Многочлени Фабера зі спільним коренем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 214 – 227.
21. *Todorov P. G.* Explicit formulas for the coefficients of Faber polynomials with respect to univalent functions of the class Σ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – **82**, № 3. – P. 431 – 438.
22. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert W function // Adv. Comput. Math. – 1996. – **5**, № 4. – P. 329 – 359.
23. *Corless R. M., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* A sequence of series for the Lambert W function // Proc. 1997 Int. Symp. Symbolic and Algebraic Comput. – New York, 1997. – P. 197 – 204.

Одержано 09.10.17