УДК 517.5

У. З. Грабова, І. В. Кальчук (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки),
Т. А. Степанюк (Грац. техн. ун-т, Австрія)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ БІГАРМОНІЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА КЛАСІВ $W^r_\beta H^\alpha$

We obtain asymptotic equalities for the least upper bounds of the deviations of biharmonic Poisson integrals from functions of the classes $W^r_\beta H^\alpha$ in the case where $r > 2,\ 0 \le \alpha < 1$.

Получены асимптотические равенства для точных верхних граней отклонений бигармонических интегралов Пуассона от функций из классов $W^r_\beta H^\alpha$ в случае $r > 2,\ \ 0 \le \alpha < 1$.

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій із нормою $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$; C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Далі, нехай $f \in L$ і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Якщо $r > 0$ і β — фіксоване дійсне число, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то функцію φ називають (r, β)-похідною функції f у розумінні Вейля – Надя [1] і позначають через f^r_β. Множину всіх функцій, що задовольняють таку умову, позначають через W^r_β.

Якщо $f \in W^r_\beta$, і при цьому $f^r_\beta \in H^\alpha$, тобто f^r_β задовольняє умову Ліпшиця порядку α:

$$|f^r_\beta(x+h) - f^r_\beta(x)| \le |h|^\alpha, \ \ 0 < \alpha \le 1, \ 0 \le h \le 2\pi, \ x \in \mathbb{R},$$

то кажуть, що f належить класу $W^r_\beta H^\alpha$. При $\alpha = 0$ вважають, що $W^r_\beta H^0 = W^r_{\beta,\infty}$. При $r = \beta$ отримуємо клас $W^r H^\alpha$ функцій f із похідною порядку $r > 0$ в розумінні Вейля, яка задовольняє умову Ліпшиця порядку α.

Нехай f належить L. Величину

$$B_\delta(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k) \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \qquad \delta > 0,$$

де

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt,$$

називають бігармонічним інтегралом Пуассона функції f (див., наприклад, [2]).

Дану роботу присвячено вивченню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha} \|f(\cdot) - B_\delta(f;\cdot)\|_C. \tag{1}$$

Задачу про відшукання асимптотичної рівності для величини (1), згідно з О. І. Степанцем [3, с. 198], називатимемо задачею Колмогорова – Нікольського для методу B_δ на класі $W^r_\beta H^\alpha$ у рівномірній метриці.

Задача Колмогорова – Нікольського для бігармонічних інтегралів Пуассона на класах W^1_∞ розв'язувалась у роботах С. Канієва [4], П. Пих [5], Л. П. Фалалєєва [6], Л. П. Фалалєєва та Т. І. Аманова [7], К. М. Жигалла та Ю. І. Харкевича [8], С. Б. Гембарської та К. М. Жигалла [9]. Апроксимативні властивості методу наближення бігармонічними інтегралами Пуассона на класах диференційовних функцій досліджувались також у роботах [10 – 12]. На класах функцій, які задаються за допомогою введеного О. І. Степанцем поняття (ψ,β)-похідної (означення класів див., наприклад, у [13, с. 25]), задачу Колмогорова – Нікольського для методу $B_\delta(f;x)$ в залежності від параметрів, що визначають дані класи, розв'язано в роботах [14 – 16].

У роботі Ю. І. Харкевича та І. В. Кальчук [17] знайдено розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ у випадку, коли $r \le 2$. Тому розв'язання вказаної вище задачі доповнює результати досліджень асимптотичної поведінки величини $\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C$.

Для бігармонічного інтеграла Пуассона введемо функцію

$$\tau(u) = \tau_\delta(u) = \begin{cases} (1-[1+\gamma u]e^{-u})\delta^r, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\ (1-[1+\gamma u]e^{-u})u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{2}$$

де $\gamma = \dfrac{1}{2}(1-e^{-2/\delta})\delta$, перетворення Фур'є якої

$$\widehat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du \tag{3}$$

є сумовним на всій числовій осі (цей факт доведено в роботі [16]).

Теорема. *При* $r > 2,\ \ 0 \le \alpha < 1$ *і* $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\delta^2}\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{f_0^{(2)}}{2} + f_0^{(1)}\right\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}} + \frac{1}{\delta^3}\right), \tag{4}$$

де $f_0^{(1)}$ *і* $f_0^{(2)}$ *— відповідно* $(1,0)$*- та* $(2,0)$*-похідна функції* f *у розумінні Вейля – Надя.*

Доведення. Запишемо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (2), у вигляді $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} \left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u}{\delta}\right)\delta^r, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\ \left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u}{\delta}\right)u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} \left(1 - [1+\gamma u]e^{-u} - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u}{\delta}\right)\delta^r, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\ \left(1 - [1+\gamma u]e^{-u} - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u}{\delta}\right)u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{6}$$

і перетворення Фур'є яких $\widehat{\varphi}(t)$, $\widehat{\mu}(t)$ вигляду (3) сумовні на всій числовій осі (цей факт доведено в роботі [15]).

Згідно з теоремою 3 роботи [18], якщо інтеграли

$$A(\alpha,\varphi) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^\infty \varphi(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt,$$

$$A(\alpha,\mu) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^\infty \mu(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt$$

збігаються на всій числовій осі і $A(\alpha,\mu) = o\big(A(\alpha,\varphi)\big)$, то при $0 \le \alpha < 1$ і $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\delta^r}\sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\|f_\varphi\|_C + O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}A(\alpha,\mu)\right), \tag{7}$$

де $f_\varphi(x) := \int_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x + \dfrac{t}{\delta}\right) - f^r_\beta(x)\right)\widehat{\varphi}(t)dt$ і $\widehat{\varphi}(t)$ — перетворення Фур'є функції φ вигляду (3).

Переконаємося, що умови теореми 3 роботи [18] виконуються для функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$ вигляду (5) та (6).

З метою доведення збіжності інтеграла $A(\alpha,\varphi)$, згідно з теоремою 1 роботи [18, с. 6], покажемо збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{1/2} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)|, \qquad \int\limits_{1/2}^{3/2}|u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)|, \qquad \int\limits_{3/2}^{\infty}(u-1)|d\varphi'(u)|, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\varphi(1-u) - \varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du \tag{9}$$

і встановимо для них оцінки зверху.

Оцінимо перший інтеграл із (8). Оскільки при $u \in \left[0; \dfrac{1}{\delta}\right]$

$$\varphi'(u) = \delta^r\left(u + \frac{1}{\delta}\right), \quad \varphi''(u) = \delta^r,$$

то

$$\int\limits_0^{1/\delta} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = \int\limits_0^{1/\delta} u^{1-\alpha}d\varphi'(u) = \delta^r\int\limits_0^{1/\delta} u^{1-\alpha}du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

При $u \in \left[\dfrac{1}{\delta}; \dfrac{1}{2}\right]$, $\delta > 2$, і $r > 2$ отримуємо

$$\varphi'(u) = \frac{2-r}{2}u^{1-r} + \frac{1-r}{\delta}u^{-r},$$

$$\varphi''(u) = \frac{(2-r)(1-r)}{2}u^{-r} - \frac{(1-r)r}{\delta}u^{-r-1} > 0, \tag{10}$$

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha}d\varphi'(u) = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

Отже,

$$\int\limits_{0}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right). \tag{11}$$

Оцінимо наступні два інтеграли з (8). Очевидно, що

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| \leq 2^{\alpha}\int\limits_{1/2}^{\infty} u|d\varphi'(u)|, \qquad \int\limits_{3/2}^{\infty} (u-1)|d\varphi'(u)| \leq \int\limits_{1/2}^{\infty} u|d\varphi'(u)|.$$

Тоді, враховуючи (10), а також те, що $r > 2$, отримуємо

$$\int\limits_{1/2}^{\infty} u|d\varphi'(u)| = O(1).$$

Отже,

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| = O(1), \qquad \int\limits_{3/2}^{\infty} (u-1)|d\varphi'(u)| = O(1). \tag{12}$$

Для того щоб оцінити перший інтеграл із (9), розіб'ємо проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $\left[0; \dfrac{1}{\delta}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\delta}; 1\right]$ та $[1;\infty)$. Із (5) при $r > 2$ маємо

$$\int\limits_{0}^{1/\delta} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \delta^r \int\limits_{0}^{1/\delta} \frac{\left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}}du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \tag{13}$$

$$\int\limits_{1/\delta}^{1} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_{1/\delta}^{1} \frac{\left(\dfrac{u^{2-r}}{2} + \dfrac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}}du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \tag{14}$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{u^{2-r}}{2} + \dfrac{u^{1-r}}{\delta}\right)}{u^{1+\alpha}}du = O(1). \tag{15}$$

З (13) – (15) одержуємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \qquad r > 2.$$

Аналогічно до формули (30) роботи [17] можна показати, що для функції $\varphi(u)$, заданої за допомогою співвідношення (5), має місце рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_0^1 \frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du +$$

$$+O\left(|\varphi(0)|+|\varphi(1)|+\int\limits_0^{1/2} u^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| + \int\limits_{1/2}^{3/2}|u-1|^{1-\alpha}|d\varphi'(u)| + \int\limits_{3/2}^{\infty}(u-1)|d\varphi'(u)|\right), \qquad (16)$$

де $\lambda(u) = 1 - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u}{\delta}$. Оскільки $\int_0^1 \dfrac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O(1)$, то на підставі співвідношення (16), враховуючи оцінки (11), (12), отримуємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right), \qquad r > 2.$$

Отже, всі інтеграли в (8) та (9) є збіжними.

Таким чином, згідно з теоремою 1 роботи [18], інтеграл $A(\alpha,\varphi)$ є збіжним і для нього має місце оцінка

$$A(\alpha,\varphi) = \left(\frac{1}{\delta^{2-(r+\alpha)}}\right).$$

Доведемо тепер збіжність інтеграла $A(\alpha,\mu)$. Для цього, згідно з теоремою 1 роботи [18, с. 6], покажемо збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{1/2} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)|, \qquad \int\limits_{1/2}^{3/2}|u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)|, \qquad \int\limits_{3/2}^{\infty}(u-1)|d\mu'(u)|, \qquad (17)$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \qquad (18)$$

Для того щоб оцінити інтеграли з (17), дослідимо спочатку функцію

$$\widetilde{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - \gamma u e^{-u} - \frac{u}{\delta} - \frac{u^2}{2}.$$

Оскільки

$$\widetilde{\mu}(0) = 0,$$

$$\widetilde{\mu}'(u) = e^{-u} - \gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} - \frac{1}{\delta} - u = e^{-u}(1-\gamma) + \gamma u e^{-u} - \frac{1}{\delta} - u,$$

$$\widetilde{\mu}''(u) = -e^{-u} + 2\gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} - 1 = -1 + e^{-u}(-1 + 2\gamma - \gamma u)$$

і мають місце оцінки

$$1 - \frac{1}{\delta} \leq \gamma \leq 1, \tag{19}$$

$$e^{-u} \leq 1, \qquad u \geq 0, \tag{20}$$

то

$$\widetilde{\mu}'(u) < 0, \qquad \widetilde{\mu}''(u) \leq -\gamma u e^{-u} < 0.$$

Таким чином,

$$\widetilde{\mu}(u) < 0, \qquad \widetilde{\mu}'(u) < 0, \qquad \widetilde{\mu}''(u) < 0, \qquad u \in [0; \infty). \tag{21}$$

Використовуючи оцінки (19) – (21) та

$$e^{-u} \geq 1 - u, \qquad e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \quad u \geq 0, \tag{22}$$

$$-1 + \gamma + \frac{1}{\delta} \leq \frac{2}{3\delta^2}, \tag{23}$$

одержуємо

$$|\widetilde{\mu}(u)| \leq \frac{2}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{u^3}{2}, \tag{24}$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)| \leq \frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta} u + \frac{3}{2} u^2, \tag{25}$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)| \leq \frac{2}{\delta} + 3u. \tag{26}$$

Щоб оцінити перший інтеграл у (17), розіб'ємо проміжок $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0; \frac{1}{\delta}\right]$ та $\left[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}\right]$, $\delta > 2$. Із (6), враховуючи (26), отримуємо

$$\int\limits_0^{1/\delta} u^{1-\alpha} |d\mu'(u)| \leq \delta^r \int\limits_0^{1/\delta} \left(\frac{2}{\delta} + 3u\right) u^{1-\alpha} du = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(\alpha+r)}}\right). \tag{27}$$

Нехай тепер $u \in \left[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{2}\right]$. Згідно зі співвідношеннями (6) та (21), при $u \geq \frac{1}{\delta}$ будемо мати

$$|d\mu'(u)| \leq \left\{ r(r+1) u^{-r-2} |\widetilde{\mu}(u)| + 2r u^{-r-1} |\widetilde{\mu}'(u)| + u^{-r} |\widetilde{\mu}''(u)| \right\} du. \tag{28}$$

Тоді з урахуванням оцінок (24) – (26) одержуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)| \le r(r+1)\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{-r-\alpha-1}|\widetilde{\mu}(u)|du+$$

$$+2r\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{-r-\alpha}|\widetilde{\mu}'(u)|du+\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-r-\alpha}|\widetilde{\mu}''(u)|du\le$$

$$\le r(r+1)\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{-r-\alpha-1}\left(\frac{2}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{u^3}{2}\right)du+2r\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{-r-\alpha}\left(\frac{2}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{3}{2}u^2\right)du+$$

$$+\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^{1-r-\alpha}\left(\frac{2}{\delta}+3u\right)du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{29}$$

Об’єднуючи (27) та (29), маємо оцінку

$$\int\limits_{0}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)|=O\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{30}$$

Використовуючи нерівності (19) – (21), оцінюємо функцію $\mu(u)$ та її похідні таким чином:

$$|\widetilde{\mu}(u)|=-1+e^{-u}+\gamma ue^{-u}+\frac{u}{\delta}+\frac{u^2}{2}\le -1+1-u+\frac{u^2}{2}+u+\frac{u}{\delta}+\frac{u^2}{2}=u^2+\frac{u}{\delta}, \tag{31}$$

$$|\widetilde{\mu}'(u)|=-e^{-u}+\gamma e^{-u}-\gamma ue^{-u}+\frac{1}{\delta}+u\le-(1-u)+1-\gamma ue^{-u}+u+\frac{1}{\delta}=$$

$$=2u+\frac{1}{\delta}-\gamma ue^{-u}<2u+\frac{1}{\delta}, \tag{32}$$

$$|\widetilde{\mu}''(u)|=e^{-u}-2\gamma e^{-u}+\gamma ue^{-u}+1<3. \tag{33}$$

Легко бачити, що

$$\int\limits_{1/2}^{3/2}|u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)|\le 2^\alpha\int\limits_{1/2}^{\infty}u|d\mu'(u)|,\qquad \int\limits_{3/2}^{\infty}(u-1)|d\mu'(u)|\le\int\limits_{1/2}^{\infty}u|d\mu'(u)|.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (28), (31) – (33), знаходимо оцінку інтеграла

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}u|d\mu'(u)|\le r(r+1)\int\limits_{1/2}^{\infty}u^{-r-1}\left(u^2+\frac{u}{\delta}\right)du+$$

$$+2r\int\limits_{1/2}^{\infty}u^{-r}\left(2u+\frac{1}{\delta}\right)du+3\int\limits_{1/2}^{\infty}u^{1-r}du=O(1),\qquad r>2.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)| = O(1), \qquad \int\limits_{3/2}^{\infty} (u-1)|d\mu'(u)| = O(1). \tag{34}$$

Для того щоб оцінити перший інтеграл із (18), розіб'ємо проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $\left[0;\dfrac{1}{\delta}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\delta};1\right]$ та $[1;\infty)$. Враховуючи спочатку рівність (6), а потім нерівності (21) та (24), отримуємо

$$\int\limits_{0}^{1/\delta} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = -\int\limits_{0}^{1/\delta} \frac{\mu(u)}{u^{1+\alpha}}du =$$

$$= \delta^r \int\limits_{0}^{1/\delta} \left(-1 + e^{-u} + \gamma u e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \le$$

$$\le \delta^r \int\limits_{0}^{1/\delta} \left(\frac{2}{3\delta^2} + \frac{u}{\delta} + \frac{u^2}{2}\right) \frac{du}{u^{\alpha}} = O\left(\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right), \tag{35}$$

$$\int\limits_{1/\delta}^{1} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du \le \int\limits_{1/\delta}^{1} \left(\frac{2}{3\delta^2} + \frac{u}{\delta} + \frac{u^2}{2}\right) u^{-r-\alpha}du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{36}$$

Міркуючи, як і при оцінюванні попередніх двох інтегралів, з урахуванням нерівностей (19) та (22) маємо

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_{1}^{\infty} \left(e^{-u} - 1 + \gamma u e^{-u} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta}\right) \frac{du}{u^{1+r+\alpha}} \le$$

$$\le \int\limits_{1}^{\infty} \left(-1 + u + \gamma + \frac{1}{\delta}\right) \frac{du}{u^{r+\alpha}} = O(1), \qquad r > 2. \tag{37}$$

Об'єднуючи співвідношення (35)–(37), одержуємо оцінку

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(1 + \frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{38}$$

Для того щоб оцінити другий інтеграл із (18), зауважимо, що має місце рівність

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int\limits_{0}^{1} \frac{|\overline{\lambda}(1-u) - \overline{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du +$$

$$+ O\left(|\mu(0)| + |\mu(1)| + \int\limits_{0}^{1/2} u^{1-\alpha}|d\mu'(u)| + \int\limits_{1/2}^{3/2} |u-1|^{1-\alpha}|d\mu'(u)| + \int\limits_{3/2}^{\infty} (u-1)|d\mu'(u)|\right),$$

де $\overline{\lambda}(u) = [1+\gamma u]e^{-u} + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u}{\delta}$.

Оскільки

$$\int\limits_0^1 \frac{|\overline{\lambda}(1-u)-\overline{\lambda}(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O(1),$$

то, враховуючи співвідношення (30) та (34), отримуємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{39}$$

Використовуючи формули (30), (34), (38) та (39), згідно з теоремою 1 роботи [18], переконуємося в тому, що інтеграл $A(\alpha,\mu)$ є збіжним і для нього має місце оцінка

$$A(\alpha,\mu) = O\left(1+\frac{1}{\delta^{3-(r+\alpha)}}\right). \tag{40}$$

Отже, умови теореми 3 роботи [18] виконуються, тобто має місце рівність (7). Із урахуванням оцінки (40) отримуємо

$$\mathcal{E}(W^r_\beta H^\alpha; B_\delta)_C = \sup_{f\in W^r_\beta H^\alpha}\left\|\frac{1}{\delta^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\widehat{\varphi}(t)dt\right\|_C +$$

$$+O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}+\frac{1}{\delta^3}\right). \tag{41}$$

Відомо, що ряд Фур'є функції

$$f_\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\widehat{\varphi}(t)dt$$

має вигляд (див., наприклад, [19])

$$S[f_\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2}{2\delta^{2-r}}+\frac{k}{\delta^{2-r}}\right)(a_k\cos kx + b_k \sin kx),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f. Тому

$$f_\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^r_\beta(x)\right)\widehat{\varphi}(t)dt = \frac{1}{\delta^{2-r}}\left(\frac{f_0^{(2)}(x)}{2}+f_0^{(1)}(x)\right). \tag{42}$$

Підставляючи (42) в (41), отримуємо (4).

Теорему доведено.

Література

1. *Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1950. – **1**. – P. 183 – 188.
2. *Гембарська С. Б.* Дотичні граничні значення бігармонічного інтеграла Пуассона в крузі // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1171 – 1176.

3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
4. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995 – 998.
5. *Pych P.* On a biharmonic function in unit dise // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203 – 213.
6. *Фалалеев Л. П.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $\mathrm{Lip}_1 1$ от одного сингулярного интеграла // Теоремы вложения и их приложения: Матер. всесоюз. симп. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1976. – С. 163 – 167.
7. *Аманов Т. И., Фалалеев Л. П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля–Пуассона // 5-е Советско-Чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976): Тр. совещания. – Новосибирск, 1979. – С. 13 – 16.
8. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Про наближення функцій класу Гельдера бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 971 – 974.
9. *Гембарська С. Б., Жигалло К. М.* Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах Гельдера // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 7. – С. 925 – 932.
10. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1213 – 1219.
11. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 333 – 345.
12. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Асимптотика величин наближення в середньому класів диференційовних функцій за допомогою бігармонічних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 8. – С. 1105 – 1115.
13. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
14. *Харкевич Ю. І., Жигалло Т. В.* Наближення функцій із класу $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонічними операторами Пуассона в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 5. – С. 669 – 693.
15. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення функцій із класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 939 – 959.
16. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення (ψ,β)-диференційовних функцій малої гладкості бігармонічними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1602 – 1622.
17. *Кальчук І. В., Харкевич Ю. І.* Апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $W^r_\beta H^\alpha$ // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1493 – 1504.
18. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II //Изв. вузов. – 1996. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
19. *Харкевич Ю. И., Степанюк Т. А.* Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах $C^{\psi}_{\beta} H^\alpha$ // Мат. заметки. – 2014. – **96**, № 6. – С. 939 – 952.

Одержано 05.05.17