УДК 517.54

А. К. Бахтин, И. В. Денега, Л. В. Выговская (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ СИММЕТРИЧНЫХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

We study the following problem: Let $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, where $B_0, \ldots, B_n$ are disjoint domains, and $B_1, \ldots, B_n$ are symmetric about the unit circle. It is necessary to find the exact upper bound for $r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, where $r(B_k, a_k)$ is the inner radius of B_k with respect to a_k.

For $\gamma = 1$ and $n \geq 2$, the problem was solved by L. V. Kovalev. We solve this problem for $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0.38n^2$, and $n \geq 2$ under the additional assumption imposed on the angles between the neighboring line segments $[0, a_k]$.

Розглянуто таку задачу: Нехай $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, де $B_0, \ldots, B_n$ — взаємно неперетинні області і $B_1, \ldots, B_n$ — симетричні відносно одиничного кола. Знайти точну верхню межу для добутку $r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, де $r(B_k, a_k)$ — внутрішній радіус області B_k відносно точки a_k.

Для $\gamma = 1$ і $n \geq 2$ цю задачу розв'язав Л. В. Ковальов. У даній роботі одержано розв'язок цієї задачі для $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0{,}38n^2$ і $n \geq 2$ при додатковій умові на кути між сусідніми лініями сегментів $[0, a_k]$.

Задачи о максимизации произведения внутренних радиусов непересекающихся областей хорошо известны в геометрической теории функций комплексной переменной [1 – 15]. Одна из задач такого рода рассматривается в данной статье.

Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ – расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см., например, [1, 5]). Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B соотношениями

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \ln r(B, \infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \varnothing$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Множество точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} \colon k = \overline{1, n}\right\}$ называется n-лучевой системой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1, n}$, и $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Введем обозначения $P_k = P_k(A_n) := \{w \colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. При каждом фиксированном $\gamma \in (0, n]$ найти максимум функционала

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$, $n \geq 2$, — взаимно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$ и $B_1, \ldots, B_n$ симметричны относительно единичной окружности, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, и описать все экстремали.

Эта задача относится к классу экстремальных задач с так называемыми свободными полюсами на окружности. Впервые внимание специалистов к исследованию экстремальных задач, которым соответствуют квадратичные дифференциалы, полюсы которых не фиксированы, а имеют определенную свободу, привлек в 1968 году П. М. Тамразов в работе [6]. В 1974 г. Г. П. Бахтина [7, 8] применила идею П. М. Тамразова к задачам о неналегающих областях. В этих работах был сформулирован ряд интересных задач для неналегающих областей со свободными полюсами на единичной окружности. Такие задачи в дальнейшем получили название „экстремальных задач со свободными полюсами". В работах [1, 10, 11] разработан весьма эффективный метод разделяющего преобразования, с помощью которого удалось решить некоторые трудные задачи со свободными полюсами на окружности. В частности, задача 1 является одной из задач со свободными полюсами на единичной окружности и в случае $\gamma = 1$ была сформулирована в качестве открытой проблемы в работе [1]. Для $n \geq 2$ и $\gamma = 1$ ее решил Л. В. Ковалев [3, 4]. Однако для значений $\gamma \neq 1$ задача 1 долгое время не поддавалась решению. И только в 2017 г. в работе [12] эта проблема полностью исследована в случае $n = 2$ и $\gamma \in (0, 2]$. В настоящей работе задача 1 исследуется при значениях $\gamma \neq 1$ и $n \geq 2$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \gamma \in (0, \gamma_n],\ \gamma_n = 0,38n^2$. *Тогда для любой* n*-лучевой системы точек* A_n, *принадлежащей единичной окружности и такой, что* $0 < \alpha_k \leq y_0/\sqrt{2\gamma}$, $y_0 \approx 1{,}76,\ k = \overline{1,n}$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* $B_k,\ a_0 = 0 \in B_0 \subset \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{1,n}$, *причем области* $B_k,\ k = \overline{1,n}$, *имеют симметрию относительно единичной окружности* $|w| = 1$, *выполняется неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1 - \dfrac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2} + \frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n - \sqrt{2\gamma}}{n + \sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}. \tag{1}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k *и* $B_k,\ k = \overline{0,n}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + 2(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим систему функций $\pi_k(w) = \left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}},\ k = \overline{1,n}$. Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^{n}$ называется допустимым для разделяющего преобразования областей $B_k,\ k = \overline{0,n}$, относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Пусть $\Omega_k^{(1)},\ k = \overline{1,n}$, обозначает область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)},\ k = \overline{1,n}$, обозначим область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно вещественной оси. Обозначим

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)} = 1, \qquad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)} = -1, \quad k = \overline{1,n}, \qquad \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

Из определения функций π_k следует, что

$$|\pi_k(w) - 1| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}|w - a_k|, \qquad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) + 1| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}|w - a_{k+1}|, \qquad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \qquad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Используя результаты работ [1, 10, 11], имеем неравенства

$$r\left(B_k, a_k\right) \leq \left[\frac{r\big(\Omega_k^{(1)}, 1\big) r\big(\Omega_k^{(2)}, -1\big)}{\dfrac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\dfrac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leq \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\big(\Omega_k^{(0)}, 0\big)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Из неравенств (3), (4) получаем соотношение

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{n}\left[r\big(\Omega_k^{(0)}, 0\big)\right]^{\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(2)}, -1\right) r\big(\Omega_k^{(1)}, 1\big)}{\dfrac{1}{\alpha_{k-1}\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\big(\Omega_k^{(0)}, 0\big) r\big(\Omega_k^{(1)}, 1\big) r\big(\Omega_k^{(2)}, -1\big)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно теореме 1 работы [12], справедлива оценка

$$r^{\gamma\alpha_k^2}\big(\Omega_k^{(0)}, 0\big) r\big(\Omega_k^{(1)}, 1\big) r\big(\Omega_k^{(2)}, -1\big) \leq$$

$$\leq 2^{1-\gamma\alpha_k^2}\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\big(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\big)^{2\gamma\alpha_k^2}}{\big(2 - \alpha_k\sqrt{2\gamma}\big)^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}\big(2 + \alpha_k\sqrt{2\gamma}\big)^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Знак равенства в (5) достигается, когда $\Omega_k^{(0)}$, $\Omega_k^{(1)}$ и $\Omega_k^{(2)}$ являются круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(4 - 2\alpha_k^2\gamma)z^2 + 2\alpha_k^2\gamma}{z^2(z^2 - 1)^2}\,dz^2. \tag{6}$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\prod_{k=1}^{n}2^{1-\gamma\alpha_k^2}\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\cdot\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)2^{\frac{1-\gamma\alpha_k^2}{2}}\left[\frac{2^{2\gamma\alpha_k^2+6}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^{8}\left(\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{2\gamma\alpha_k^2+4}}{\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(2+\alpha_k\sqrt{2\gamma})^2}}\right]^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2^{8}\,x_k^{x_k^2+4}}{(2-x_k)^{\frac{1}{2}(2-x_k)^2}(2+x_k)^{\frac{1}{2}(2+x_k)^2}}\right]^{\frac{1}{4}},$$

где $x_k=\alpha_k\sqrt{2\gamma},\ x_k\in(0,y_0]$.

Рассмотрим функцию

$$\Psi(x)=2^8x^{x^2+4}(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},\quad x\in(0,2].$$

Пусть $F(x)=\ln\bigl(\Psi(x)\bigr)$ (см. рис. 1).

Тогда $F'(x)=2x\ln x+(2-x)\ln(2-x)-(2+x)\ln(2+x)+\dfrac{4}{x}$ (см. рис. 2). Функция

$$F''(x)=\ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)-\frac{4}{x^2}$$

строго возрастает на $(0,2)$ и существует $y_0\approx 1{,}76$ такое, что

$$\operatorname{sign}F''(x)\equiv\operatorname{sign}(x-y_0).$$

Таким образом, функция $\Psi(x)$ логарифмически выпукла вверх на интервале $(0,y_0]$. Поскольку $x_k\in(0,y_0],\ k=\overline{1,n}$, то имеет место соотношение

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\Psi(x_k)\leq\ln\Psi\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}\right).$$

Это равносильно тому, что

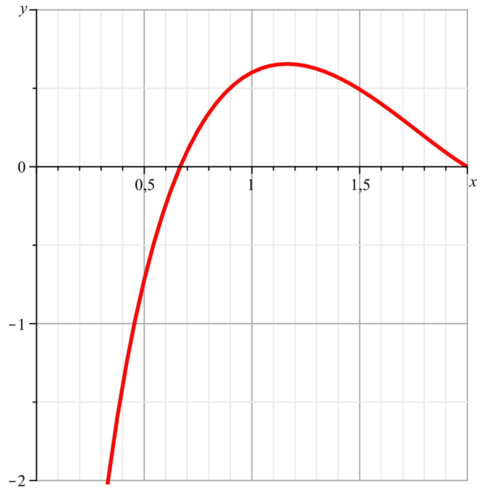

Рис. 1. График функции $y = F(x)$.

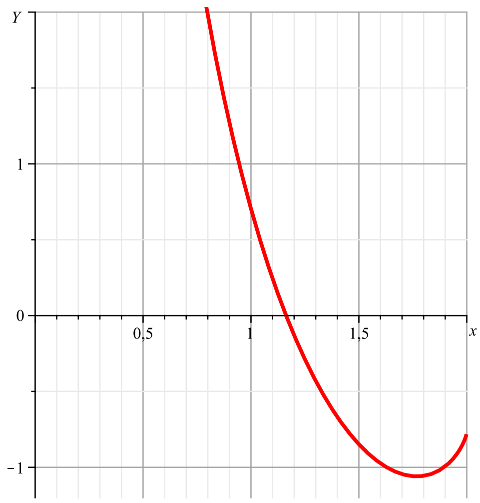

Рис. 2. График функции $Y = F'(x)$.

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\Psi(x_k)\right)^{\frac{1}{n}} \leq \ln\left(\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right).$$

Отсюда окончательно имеем

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left[\Psi(x_k)\right]^{\frac{1}{4}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^{n}\left[\Psi\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{4}}.$$

Используя конкретное выражение для $\Psi(x)$, получаем неравенство

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \le \left(\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)^n \left[\frac{2^8\left(\dfrac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^{\left(\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^2+4}}{\left(2-\dfrac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^2}\left(2+\dfrac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{n}\sqrt{2\gamma}\right)^2}}\right]^{\frac{n}{4}} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\dfrac{2\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left|1-\dfrac{2\gamma}{n^2}\right|^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma}{n}}} \left|\frac{n-\sqrt{2\gamma}}{n+\sqrt{2\gamma}}\right|^{\sqrt{2\gamma}}.$$

Таким образом, неравенство (1) доказано. Выполняя в (6) замену переменной по формуле $z = 2w^{\frac{n}{2}}/(1+w^n)$, получаем квадратичный дифференциал (2). Знак равенства в неравенстве (1) проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

Рассмотрим класс $T = \{f_k\}_{k=0}^n$ систем однолистных функций, которые отображают единичный круг $U = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| \le 1\}$ на взаимно неналегающие области $\{B_k\}_{k=0}^n$ (причем области $\{B_k\}_{k=1}^n$ симметричны относительно единичной окружности) так, что

$$f_0(0) = 0, \qquad |f_k(0)| = 1.$$

Тогда из доказанной теоремы для класса T следует такое утверждение.

Следствие. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\gamma \in (0,\gamma_n]$, $\gamma_n = 0{,}38n^2$. *Тогда для произвольной системы функций* $\{f_k\}_{k=0}^n \in T$ *выполняется неравенство*

$$|f_0'(0)|^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}|f_k'(0)| \le \left|f_0'^{(0)}(0)\right|^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\left|f_k'^{(0)}(0)\right|.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается для системы функций $\{f_k\}_{k=0}^n \in T$ *такой, что* $f_k^{(0)}(U) = B_k^{(0)}$, $f_k^{(0)}(0) = a_k^{(0)}$, $a_0^{(0)} = 0$, *где* $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, *— соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала* (2).

Литература

1. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3 – 76.
2. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21 – 27.
3. *Ковалев Л. В.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Математика. – 2000. – **6**. – С. 80 – 81.
4. *Ковалев Л. В.* О трех непересекающихся областях // Дальневост. мат. сб. – 2000. – **1**. – С. 3 – 7.
5. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
6. *Тамразов П. М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033 – 1043.
7. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

8. *Бахтина Г. П.* Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях // Укр. мат. журн. — 1975. – **27**, № 2. – С. 202 – 204.
9. *Бахтина Г. П.* Экстремумы коэффициентов однолистных функций без общих значений // Геометрическая теория функций и топология: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 9 – 15.
10. *Дубинин В. Н.* О произведении внутренних радиусов „частично неналегающих” областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 24 – 31.
11. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
12. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Денега И. В.* Экстремальное разбиение комплексной плоскости с фиксированными полюсами // Зб. праць Iн-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 34 – 38.
13. *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane // Bull. Soc. Sci. Let. Łódź. Sér. Rech. Déform. – 2012. – **62**, № 2. – P. 83 – 92.
14. *Бахтин А. К.* Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Iн-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 1. – С. 25 – 33.
15. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Получено 19.07.17