УДК 510.22+517.5+519.21

В. П. Маркітан, М. В. Працьовитий, І. О. Савченко (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ)

СУПЕРФРАКТАЛЬНІСТЬ МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ ОДНОГО ДОДАТНОГО РЯДУ

We consider a family of convergent positive normed series with real terms defined by the conditions

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \underbrace{c_1 + \ldots + c_1}_{a_1} + \underbrace{c_2 + \ldots + c_2}_{a_2} + \ldots + \underbrace{c_n + \ldots + c_n}_{a_n} + \widetilde{r}_n = 1,$$

where (a_n) is a nondecreasing sequence of real numbers. The structural properties of these series are investigated. For a partial case, namely, $(a_n) = 2^{n-1}$, $c_n = (n+1)\widetilde{r}_n$, $n \in \mathbb{N}$, we study the geometry of the series (i.e., the properties of cylindrical sets, metric relations generated by them, and topological and metric properties of the set of all incomplete sums of the series). For the infinite Bernoulli convolution determined we describe its Lebesgue structure (discrete, absolutely continuous, and singular components) and spectral properties, as well as the behavior of the absolute value of the characteristic function at infinity. We also study the finite autoconvolutions of distributions of this kind.

Розглядається сім'я додатних нормованих рядів із дійсними членами, визначених умовами

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \underbrace{c_1 + \ldots + c_1}_{a_1} + \underbrace{c_2 + \ldots + c_2}_{a_2} + \ldots + \underbrace{c_n + \ldots + c_n}_{a_n} + \widetilde{r}_n = 1,$$

де (a_n) — неспадна послідовність дійсних чисел. Досліджуються структурні властивості таких рядів. Для частинного випадку, а саме, $(a_n) = 2^{n-1}$, $c_n = (n+1)\widetilde{r}_n$, $n \in \mathbb{N}$, вивчається геометрія ряду (властивості циліндричних множин і ними породжених метричних співвідношень та тополого-метричні властивості множини всіх неповних сум ряду). Для нескінченної згортки Бернуллі, керованої таким рядом, вивчається лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) і спектральні властивості, а також поведінка модуля характеристичної функції цього розподілу на нескінченності та скінченні автозгортки таких розподілів.

Вступ. Для заданого збіжного ряду $d_1 + d_2 + \ldots + d_n + \ldots$ вираз

$$\sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} d_n = x(M)$$

називається *підрядом*, а його сума $x(M)$ — *підсумою* (неповною сумою), визначеною множиною M. Зрозуміло, що всі частинні суми ряду $S_n = d_1 + \ldots + d_n$ і його залишки $r_n = d_{n+1} + d_{n+1} + \ldots$ є неповними сумами, але не лише вони. Якщо $A_2 = \{0; 1\}$ — алфавіт, а $L = A \times A \times \ldots A \times \ldots$ — простір послідовностей алфавіту, то множина $E(d_n) = \Big\{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n d_n, (\varepsilon_n) \in L\Big\}$, де послідовність (d_n) пробігає весь простір L, називається *множиною всіх неповних сум* (*або підсум*) даного ряду.

Уперше задачу щодо тополого-метричних властивостей множини неповних сум абсолютно збіжного ряду сформульовано у роботі Какея [5], де доведено, що множина неповних сум є: континуальною, досконалою множиною, яка ніде не щільна, якщо $r_n < d_n$ для всіх достатньо великих n; відрізком $[0, 1]$, якщо $r_n \geq d_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Пізніше отримані Какеєм факти перевідкривалися іншими авторами (Г. Горничем, П. К. Меноном). За більш ніж столітню історію розвитку цього напрямку дослідження теорія суттєво збагатилася різними фактами, переважна більшість яких є теоремами існування, і цікавими прикладами рядів (або класів рядів), множини неповних сум яких мають задані властивості. Фінальну крапку у напрямку класифікації топологічних типів множин неповних сум абсолютно збіжних рядів поставлено відносно недавно [4, 6]. Було доведено, що множина неповних сум може бути лише одного з трьох топологічних типів: ніде не щільною (гомеоморфною класичній множині Кантора); відрізком або об'єднанням відрізків; канторвалом $\Big($множиною, яка є специфічним об'єднанням ніде не щільної множини та множини відрізків, а саме, множиною, гомеоморфною множині неповних сум ряду $\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{2}{4^2}+\dfrac{3}{4^3}+\dfrac{3}{2^3}\ldots\Big)$. Окремим напрямком дослідження є вивчення метричних властивостей множин неповних сум. Незважаючи на значні здобутки у цьому напрямку, у загальній постановці задачі до цього часу критерій нульвимірності множини (до речі, як і ніде не щільності) [21, 23, 24] є невідомим.

Більше ста років проводяться дослідження нескінченних симетричних згорток Бернуллі та їх різнопланових узагальнень, зокрема нескінченних згорток Бернуллі з різними порушеннями симетрії. Це розподіл випадкової величини

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty} d_n\xi_n, \tag{1}$$

де (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин із розподілами

$$\mathrm{P}\{\xi_n=0\}=p_{0n}\geq 0, \qquad \mathrm{P}\{\xi_n=1\}=p_{1n}\geq 0, \qquad p_{0n}+p_{1n}=1. \tag{2}$$

Зрозуміло, що властивості розподілу випадкової величини ξ однозначно визначаються послідовністю (d_n) членів ряду, точніше рядом, і нескінченною стохастичною матрицею $\|p_{in}\|$. Варто зазначити, що інтерес до таких розподілів випадкових величин внаслідок різних причин в останні роки значно посилився [1, 7, 8, 10, 11, 18, 22]. Це пов'язано, зокрема, з дослідженнями їх фрактальних властивостей [14]. З теореми Джессена – Вінтнера [15, 18] випливає, що випадкова величина ξ має чистий лебегівський тип розподілу, тобто її функція розподілу є або чисто дискретною, або чисто абсолютно неперервною, або сингулярною (неперервною функцією, похідна якої майже скрізь дорівнює нулю в розумінні міри Лебега). Відома теорема П. Леві [15, 18] разом з теоремою Джессена – Вінтнера дає необхідні і достатні умови дискретності та неперервності розподілу ξ, але розділити випадки абсолютної неперервності та сингулярності в загальній постановці задачі до цього часу не вдалося. Проте для деяких класів рядів, що мають певні властивості однорідності, це зроблено [19, 20].

У теорії нескінченних згорток Бернуллі існує ряд складних імовірнісних проблем [16, 17]. Однією з таких є проблема поглиблення теореми Джессена – Вінтнера [2], яка стверджує лебегівську чистоту (дискретність, абсолютну неперервність, сингулярність) розподілу суми з імовірністю одиниця збіжного випадкового ряду з незалежними дискретно розподіленими доданками, але не дає відповіді на питання: коли та який? Інша проблема стосується тополого-метричних та фрактальних властивостей спектра розподілу (множини точок зростання функції розподілу), яка безпосередньо пов'язана з тополого-метричними властивостями множини неповних сум ряду. Третя стосується поведінки модуля характеристичної функції на нескінченності [11, 17]. Поки що вони не піддаються розв'язанню в загальній постановці, а тому дослідники їх розглядають в окремих класах.

Нас цікавить лебегівська структура і властивості нескінченної згортки Бернуллі, керованої збіжним додатним рядом

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \underbrace{c_1 + \ldots + c_1}_{a_1} + \underbrace{c_2 + \ldots + c_2}_{a_2} + \ldots + \underbrace{c_n + \ldots + c_n}_{a_n} + \widetilde{r}_n = 1, \tag{3}$$

для якого виконується умова

$$\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} \equiv b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

$$\text{де } \widetilde{r}_n = \underbrace{c_{n+1} + \ldots + c_{n+1}}_{a_{n+1}} + \underbrace{c_{n+2} + \ldots + c_{n+2}}_{a_{n+2}} + \ldots,$$

причому (a_n) та (b_n) — неспадні послідовності натуральних чисел. Не маючи перспектив вичерпно розв'язати вищезазначені задачі, ми звужуємо розгляд питання до випадку $a_n = 2^{n-1}$ та $b_n = n + 1$.

1. Структурна властивість ряду.

Теорема 1. *Загальний член ряду* (3) *має вигляд*

$$c_n = b_n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1}. \tag{5}$$

Доведення. Для $n = 1$ маємо

$$r_0 = a_1 c_1 + \widetilde{r}_1 = a_1 c_1 + \frac{c_1}{b_1} = c_1 \left(a_1 + \frac{1}{b_1} \right) = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{b_1}{a_1 b_1 + 1}.$$

Аналогічно, з рівності (4) отримуємо

$$c_n = b_n \widetilde{r}_n = b_n (a_{n+1} c_{n+1} + \widetilde{r}_{n+1}) = b_n c_{n+1} \left(a_{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} \right),$$

звідки

$$c_{n+1} = c_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n (a_{n+1} + 1)}. \tag{6}$$

Рівність (5) доведемо за індукцією. Нехай формула (5) справедлива при $n = p$.

При $n = p + 1$, згідно з (6), маємо

$$c_{p+1} = c_p \cdot \frac{b_{p+1}}{b_p (a_{p+1} + 1)} = b_p \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{a_k b_k + 1} \cdot \frac{b_{p+1}}{b_p (a_{p+1} + 1)} = b_{p+1} \prod_{k=1}^{p+1} \frac{1}{a_k b_k + 1}.$$

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** *Для членів та залишків ряду* (3) *мають місце співвідношення*

$$\widetilde{r}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k b_k + 1},$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n (a_{n+1} + 1)}, \qquad \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{1}{a_{n+1} b_{n+1} + 1}.$$

Далі нас цікавитиме випадкова величина ξ, для якої ряд (3) визначається умовами $a_n = 2^{n-1}$ та $b_n = n+1$ і має вигляд

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k = c_1 + \underbrace{c_2 + c_2}_{2} + \underbrace{c_3 + c_3 + c_3 + c_3}_{4} + \ldots + \underbrace{c_n + \ldots + c_n}_{2^{n-1}} + \widetilde{r}_n, \tag{7}$$

де

$$\frac{c_n}{\widetilde{r}_n} = n+1 = \frac{d_m}{r_m}, \qquad m = 2^k - 1, \quad k = 1,2,3,\ldots, \tag{8}$$

$$\widetilde{r}_m = r_{2^n-1} = \sum_{k=2^n}^{\infty} d_k = \underbrace{c_{n+1} + \ldots + c_{n+1}}_{2^n} + \underbrace{c_{n+2} + \ldots + c_{n+2}}_{2^{n+1}} + \ldots =$$

$$= 2^n c_{n+1} + 2^{n+1} c_{n+2} + 2^{n+2} c_{n+3} + \ldots, \tag{9}$$

$$c_n = d_{2^{n-1}} = d_{2^{n-1}+1} = d_{2^{n-1}+2} = \ldots = d_{2^n-1}.$$

Із рівностей (8) та (9) випливає, що для всіх номерів $m \neq 2^{k-1}$ виконується нерівність $d_m < r_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} d_i$.

Загальний член ряду (7), згідно з (5), має вигляд

$$c_n = (n+1) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1},$$

а відповідний залишок —

$$\widetilde{r}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1}.$$

2. Критерій дискретності. Точковий спектр.

Теорема 2. *Розподіл випадкової величини* (1), *визначеної рядом* (7), *є чистим*, *до того ж чисто дискретним*, *тоді і тільки тоді*, *коли*

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

У випадку дискретності розподілу випадкової величини (1) *його точковий спектр складається з точки*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* d_n, \quad \text{де} \quad p_{\alpha_n^* n} \geq p_{[1-\alpha_n^*]n},$$

і всіх таких точок x, *що*

$$x = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n d_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_n^* d_n,$$

де $\alpha_n \in \{0,1\}$, $p_{\alpha_n n} \neq 0$ *при* $n \leq m$.

Доведення. Перша частина твердження безпосередньо випливає з теорем Джессена – Вінтнера і П. Леві [15, 18]. Доведемо другу частину твердження.

Нехай $M > 0$. Рівності (2) визначають ймовірнісну міру (розподіл) не лише на $[0;1]$, але й у просторі L послідовностей елементів алфавіту $A_2 = \{0;1\}$. Для останнього розподілу очевидним є те, що точка $(\alpha_n^*) \in L$, визначена умовами $p_{\alpha_n^* n} \neq 0$ і $p_{\alpha_n^* n} \geq p_{[1-\alpha_n^*]n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, є атомом, до того ж максимальної маси M, оскільки

$$\mathrm{P}\left\{(\xi_n) = (\alpha_n)\right\} = \prod_{n=1}^{\infty} p_{\alpha_n n} \leq \prod_{n=1}^{\infty} p_{\alpha_n^* n} = M. \tag{10}$$

Зазначимо, що таких точок може бути не одна, оскільки можливо, що $p_{0n} = \dfrac{1}{2} = p_{1n}$. Але їх неминуче скінченна кількість, оскільки необхідною умовою збіжності нескінченного добутку (10) є умова $\max\{p_{0n}, p_{1n}\} \to 1 \quad (n \to \infty)$, а отже, існує $m \in N$ таке, що $p_{0m} = \dfrac{1}{2} = p_{1m}$ і $p_{\alpha_j j} > p_{[1-\alpha_j]j}$ при $j > m$. Тоді кількість атомів максимальної маси дорівнює 2^t, де $t = \# \left\{ j : p_{0j} = \dfrac{1}{2} \right\}$.

Нехай (α_n^*) — одна з таких точок простору L, тобто атом розподілу випадкової величини ξ максимальної маси M, а саме, $(\alpha_n^*) = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_{k-1}^*, \alpha_k^*, \alpha_{k+1}^*, \ldots)$. Якщо $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}^*, \ldots)$ і при цьому $p_{\alpha_j j} > 0$ при $j = \overline{1,k}$, то послідовність $(\alpha_n) \in L$ є атомом розподілу і відрізняється від (α_n^*) не більш ніж k першими членами, до того ж

$$\mathrm{P}\left\{(\xi_n) = (\alpha_n)\right\} = \frac{M}{\prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n n} > 0.$$

Нехай B_k — множина всіх послідовностей (α_n), які відрізняються від (α_n^*) не більш ніж k першими членами, до того ж $p_{\alpha_j j} > 0$ при $j = \overline{1,k}$.

Тоді B_0 містить лише одну точку (α_n^*), B_1 — не більше двох точок і т. д. Більш того, $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \ldots \subset B_k \subset B_{k+1} \ldots$ і

$$\mathrm{P}\{\xi \in B_k\} = \sum_{\alpha_1=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{1} \frac{M}{\prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n n} =$$

$$= \frac{M}{\prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \sum_{\alpha_1=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{1} \prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n n} = \frac{M}{\prod_{n=1}^{k} p_{\alpha_n^* n}} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

У цьому випадку точковий спектр $D_{\overline{\xi}}$ збігається з хвостовою множиною з представником (α_n^*), тобто з множиною

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \lim_{n \to \infty} B_k.$$

Таким чином, у просторі L існує злічення множина точок, ймовірність якої дорівнює 1. Якщо (α_n) — атом розподілу $\overline{\xi}$ у просторі L, то $x = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \ldots + \alpha_n d_n + \ldots$ є атомом розподілу на $[0;1]$. Маса останнього теоретично може бути більшою, ніж $\mathrm{P}\left\{\overline{\xi} = (\alpha_n)\right\}$, оскільки число x може бути значенням різних підсум. Таким чином, існує не більш ніж злічення множина $G \subset [0;1]$ така, що $P(G) = 1$.

Теорему 2 доведено.

3. Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини ξ. Нагадаємо [18], що *спектром* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ називають множину точок зростання її функції розподілу $F_\xi(x)$ (рівносильно мінімальний замкнений носій), тобто

$$S_\xi = \Big\{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) = \mathrm{P}\left\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\right\} > 0 \ \forall \varepsilon > 0\Big\}.$$

Лема 1. *Якщо* $p_{in} > 0$ *для всіх* $i \in \{0,1\}$ *та всіх* $n \in \mathbb{N}$, *то спектром* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є множина* $E\{d_n\}$ *всіх підсум* (*неповних сум*) *ряду* (7), *тобто*

$$S_\xi = E\{d_n\} \equiv \left\{x : x = \sum_{n\in M} d_n,\ M \in 2^{\mathbb{N}}\right\}.$$

Доведення. Дане твердження випливає безпосередньо з означень спектра розподілу і того, що кожну неповну суму ряду можна записати у вигляді

$$x(M) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M, \end{cases}$$

а також властивостей множини всіх неповних сум ряду, яка є досконалою (замкненою множиною без ізольованих точок) [5].

Наслідок 2. *Для спектра* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *має місце включення* $S_\xi \subset \subset E\{d_n\}$.

З метою вивчення спектральних властивостей розподілу випадкової величини ξ проведемо дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей множини неповних сум $E\{d_n\}$ ряду (7), для якого справджується рівність (8).

Для ряду (3), у якого $d_n \geq d_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відомо, що коли виконується умова $r_n \geq d_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то множина його неповних сум є відрізком $[0,1]$ [5]. Якщо $r_n \geq d_n$ для всіх достатньо великих n, то множина є скінченним об'єднанням відрізків. Якщо $r_n < d_n$ для всіх достатньо великих n, то множина неповних сум є ніде не щільною множиною [5, 18]. Менш дослідженим є випадок, коли нерівності $d_n \leq r_n$ і $d_n > r_n$ виконуються для нескінченної кількості n. У такому випадку множина неповних сум ряду може бути як ніде не щільною, так і може містити цілі відрізки. Тополого-метричні властивості множин неповних сум суттєво залежать від швидкості збіжності ряду. На сьогодні авторам невідомі необхідні і достатні умови її нульвимірності (у розумінні міри Лебега). Ще менш досліджено фрактальні властивості множини неповних сум, хоча для деяких класів рядів це зроблено у [8, 13, 14, 18].

Нагадаємо означення *α-міри Гаусдорфа* і *розмірності Гаусдорфа–Безиковича* множини $E \subset \mathbb{R}^1$, які більш тонко характеризують „масивність” множин у випадку їх нульвимірності (у розумінні міри Лебега).

Означення 1. *Нехай* $0 < \alpha$ — *фіксоване дійсне число.* α*-Вимірною мірою* (α*-мірою*) *Гаусдорфа множини* E *називається значення функції множини, визначеної рівністю*

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon^\alpha(E) = \sup_{\varepsilon>0} m_\varepsilon^\alpha(E), \quad \text{де} \quad m_\varepsilon^\alpha(E) = \inf_{|E_j|\leq\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\},$$

і точна нижня грань визначається за всеможливими не більш ніж зліченними покриттями множини E *відрізками* E_i, *діаметри* $|E_i|$ *яких не перевищують* ε.

Означення 2. *Невід'ємне число*

$$\alpha_0(E) = \sup\left\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = +\infty\right\} = \inf\left\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\right\}$$

називається розмірністю Гаусдорфа – Безиковича множини E.

Розмірність Гаусдорфа – Безиковича має такі *властивості*: 1) якщо $E_1 \subset E_2$, то $\alpha_0(E_1) \leq \leq \alpha_0(E_2)$; 2) $\alpha_0\left(\bigcup\limits_i E_i\right) = \sup_i \alpha_0(E_i)$.

Означення 3. *Множини нульової міри Лебега простору* $\mathbb{R}^1$, *розмірність Гаусдорфа – Безиковича яких дорівнює* 1, *називаються суперфрактальними, а континуальні множини, що мають нульову розмірність Гаусдорфа – Безиковича, — аномально фрактальними.*

Відомо [5], що при виконанні умов

$$d_n \geq r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad \text{для всіх достатньо великих} \quad n \tag{11}$$

множина $E\{d_n\}$ неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ є ніде не щільною (нуль-множиною Лебега або множиною додатної міри). При виконанні умови

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} = +\infty$$

множина $E\{a_n\}$ є *аномально фрактальною* (континуальною множиною нульової розмірності Гаусдорфа – Безиковича) [18].

З теореми 2.2 роботи [9] випливає, що при виконанні умов (11) та

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{r_n} = +\infty \tag{12}$$

множина підсум $E\{d_n\}$ є аномально фрактальною. Нас цікавить питання: чи буде множина $E\{d_n\}$ аномально фрактальною при виконанні умови (12)?

При обчисленні розмірності множини буває зазвичай досить складно отримати нижню оцінку, тобто довести, що $\alpha_0(E) \geq \delta$, тоді як верхню оцінку $\alpha_0(E) \leq \delta$ можна часто отримати без особливих труднощів. Для швидкого отримання нижньої оцінки іноді зручно використовувати наступну теорему, доведену Х. Г. Еглстоном [3], яка успішно використовувалася в роботах Т. Шалата [9, 25].

Теорема 3 [3, 25]. *Нехай* $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$,

$$J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n \supset J_{n+1} \supset \ldots,$$

і кожна із множин J_n *складається із скінченного числа* g_n *скінченних відрізків* i_n^m *однакової довжини* $\lambda_n > 0$, *які не містять попарно спільних внутрішніх точок. Нехай кожний відрізок* $i_n^m \in J_n$ *містить однакове число* $(= g_{n+1}/g_n)$ *інтервалів* $i_{n+1}^m \in J_{n+1}$. *Нехай для заданої системи* F *вимірних функцій* $\mu^{(\alpha)}(t)$ *існує число* $\delta \in \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$ *таке, що для кожного* $\alpha < \delta$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1}{g_n \mu^{(\alpha)}(\lambda_n)} < +\infty \quad (\lambda_0 = 1). \tag{13}$$

Тоді $\dim_F M \geq \delta$.

Теорема 4. *Множина неповних сум ряду* (7), *для якого виконується умова* (8), *є суперфрактальною множиною.*

Доведення. Покажемо, що множина $E\{d_n\}$ неповних сум ряду (7) є ніде не щільною нуль-множиною Лебега. Оскільки $E\{d_n\}$ належить об'єднанню $k_n \equiv \prod_{k=1}^{n}(2^{k-1}+1)$ ізометричних відрізків довжини $\widetilde{r_n}$, то для її міри Лебега має місце нерівність

$$\lambda\big(E\{d_n\}\big) \leq \lim_{n\to\infty} k_n \cdot \widetilde{r_n} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2^{k-1}+1)}{2^{k-1}(k+1)+1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k-1}+1)}{2^{k-1}(k+1)+1} = 0,$$

тому що *n*-й член добутку

$$p_n = \frac{(2^{n-1}+1)}{2^{n-1}(n+1)+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оскільки непорожня множина $E\{d_n\}$ є досконалою нуль-множиною Лебега, то вона є ніде не щільною.

Встановимо нижню оцінку розмірності Гаусдорфа – Безиковича множини $E\{d_n\}$. Врахувавши, що для ряду (7)

$$\lambda_n = \widetilde{r_n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}(k+1)+1}, \qquad g_n = \prod_{k=1}^{n}(2^{k-1}+1), \quad \mu^{\alpha}(\lambda_n) = \widetilde{r_n}^{\,\alpha},$$

запишемо формулу відповідного *n*-го члена для ряду (13). Маємо

$$a_n = \frac{\widetilde{r_{n-1}}}{\widetilde{r_n}} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(2^{k-1}+1)\widetilde{r_n}^{\,\alpha}} =$$

$$= \frac{2^{n-1}(n+1)+1}{\prod_{k=1}^{n}(2^{k-1}+1)\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^{\alpha}}} = \frac{2^{n-1}(n+1)+1}{\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k-1}+1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^{\alpha}}}.$$

Дослідимо збіжність ряду (13) за ознакою Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \frac{2^{n}(n+2)+1}{\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k-1}+1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^{\alpha}}\dfrac{2^{n}+1}{(2^{n}(n+2)+1)^{\alpha}}} \frac{\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k-1}+1}{(2^{k-1}(k+1)+1)^{\alpha}}}{2^{n-1}(n+1)+1} =$$

$$= \frac{(2^{n}(n+2)+1)^{\alpha+1}}{(2^{n}+1)(2^{n-1}(n+1)+1)} \leq$$

$$\leq \frac{((n+3)\cdot 2^{n})^{1+\alpha}}{2^{n}\cdot 2^{n-1}\cdot(n+1)} = \frac{2(n+3)^{\alpha+1}}{(2^{1-\alpha})^{n}\cdot(1+n)} = \frac{2\cdot\left(1+\dfrac{3}{n}\right)\cdot(n+3)^{\alpha}}{(2^{1-\alpha})^{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

якщо $\alpha < 1$.

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний при всіх $\alpha < 1$, то, згідно з попередньою теоремою, розмірність Гаусдорфа – Безиковича $\alpha_0\big(E\{d_n\}\big) \geq 1$, а це означає, що $\alpha_0\big(E\{d_n\}\big) = 1$.

Теорему 4 доведено.

***Наслідок* 3.** *Спектр S_ξ розподілу випадкової величини ξ є суперфрактальною множиною.*

Теорема 5. *У випадку неперервності $(M = 0)$ розподіл випадкової величини ξ є сингулярним розподілом канторівського типу із суперфрактальним спектром.*

Доведення. При $M = 0$ випадкова величина ξ має неперервний розподіл. Її спектр є підмножиною множини неповних сум. Згідно з проведеними дослідженнями щодо геометричної структури множини неповних сум ряду (7), спектр розподілу випадкової величини ξ є нуль-множиною Лебега і суперфрактальною множиною.

4. Автозгортки розподілу випадкової величини $\boldsymbol{\xi}$. Нагадаємо, що *автозгорткою розподілу випадкової величини* ξ називають розподіл випадкової величини $\psi_2 = \xi^{(1)} + \xi^{(2)}$, а *$s$-кратною згорткою розподілу випадкової величини* ξ — розподіл випадкової величини

$$\psi_s = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(s)},$$

де $\xi^{(j)}$ — незалежні й однаково розподілені випадкові величини, розподіл кожної з яких збігається з розподілом ξ. Відомо, що якщо ξ дискретно розподілена, то ψ_s матиме дискретний розподіл. Нас цікавить випадок, коли розподіл ξ є сингулярним, оскільки згортка двох сингулярних розподілів може бути як сингулярною чи абсолютно неперервною, так і їх сумішшю.

***Зауваження* 1.** Автозгортка двох (скінченного числа) нескінченних згорток Бернуллі не може бути сумішшю, оскільки сума двох (скінченного числа) незалежних випадкових величин типу Джессена – Вінтнера є випадковою величиною Джессена – Вінтнера, а тому має чистий тип розподілу.

***Зауваження* 2.** Випадкову величину ξ можна записати у вигляді

$$\xi = \xi_1 c_1 + (\xi_2 + \xi_3)c_2 + (\xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7)c_3 + \ldots + (\xi_{2^{n-1}} + \ldots + \xi_{2^n - 1})c_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\xi}_n c_n,$$

де

$$\widetilde{\xi}_n = \xi_{2^{n-1}} + \ldots + \xi_{2^n - 1}$$

— незалежні випадкові величини, які мають розподіли

$$\mathrm{P}\{\widetilde{\xi}_n = i\} = \widetilde{p}_{in}, \quad i \in \big\{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}\big\} = A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{2^{n-1}} \widetilde{p}_{in} = 1.$$

Імовірності $\widetilde{p}_{in}$ стандартно виражаються через імовірності $p_{in}0$:

$$\widetilde{p}_{01} = p_{01}, \qquad \widetilde{p}_{11} = p_{11}, \qquad \widetilde{p}_{02} = p_{02}p_{03}, \qquad \widetilde{p}_{12} = p_{02}p_{13} + p_{12}p_{03}, \qquad \widetilde{p}_{22} = p_{12}p_{13},$$

$$\widetilde{p}_{03} = p_{04}p_{05}p_{06}p_{07}, \qquad \widetilde{p}_{43} = p_{14}p_{15}p_{16}p_{17},$$

$$\widetilde{p}_{13} = p_{14}p_{05}p_{06}p_{07} + p_{04}p_{15}p_{06}p_{07} + p_{04}p_{05}p_{16}p_{07} + p_{04}p_{05}p_{06}p_{17},$$

$$\widetilde{p}_{33} = p_{04}p_{15}p_{16}p_{17} + p_{14}p_{05}p_{16}p_{17} + p_{14}p_{15}p_{06}p_{17} + p_{14}p_{15}p_{16}p_{07},$$

$$\widetilde{p}_{23} = p_{04}p_{05}p_{16}p_{17} + p_{04}p_{15}p_{06}p_{17} + p_{14}p_{05}p_{06}p_{17} + p_{04}p_{15}p_{16}p_{07} + p_{14}p_{05}p_{16}p_{07} + p_{14}p_{15}p_{06}p_{07},$$

і т. д.

Лема 2. *Спектр* S_{ψ_s} *розподілу випадкової величини* ψ_s *є підмножиною відрізка* $[0, s]$ *і належить об'єднанню* $\prod_{k=0}^{n}(s \cdot 2^k + 1)$ *ізометричних відрізків довжини* $s\widetilde{r}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Доведення. Випадкову величину ψ_s можна записати у вигляді

$$\psi_s = \eta_1 c_1 + \eta_2 c_2 + \ldots + \eta_n c_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n c_n,$$

де

$$\eta_n = \widetilde{\xi}_n^{(1)} + \widetilde{\xi}_n^{(2)} + \ldots + \widetilde{\xi}_n^{(s)}$$

— незалежні випадкові величини, які мають розподіли

$$\mathrm{P}\{\eta_n = i\} = p'_{in}, \quad i \in \left\{0, 1, 2, \ldots, s \cdot 2^{n-1}\right\} = A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=0}^{s \cdot 2^{n-1}} p'_{in} = 1.$$

Якщо $p_{in} > 0$, то спектр випадкової величини ψ_s збігається з множиною

$$S_{\psi_s} = S_{\xi^{(1)}} \oplus S_{\xi^{(2)}} \oplus \ldots \oplus S_{\xi^{(s)}} = \left\{x\colon\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n c_n,\ \zeta_n \in A_n^{\infty}\right\}.$$

Нехай $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ — фіксований впорядкований набір чисел, де $f_i \in A_i$, $i = \overline{1, m}$, а $\Delta'_{f_1 \ldots f_m}$ — множина всіх чисел вигляду

$$\sum_{n=1}^{m} f_n c_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \zeta_n c_n, \quad \text{де} \quad \zeta_n \in A_n.$$

Легко бачити, що множина S_{ψ_s} належить об'єднанню всіх відрізків вигляду

$$\Delta_{f_1 f_2 \ldots f_m} = \left[\sum_{n=1}^{m} f_n a_n,\ s\widetilde{r}_m + \sum_{n=1}^{m} f_n c_n\right] = \left[\inf \Delta'_{f_1 \ldots f_m},\ \sup \Delta'_{f_1 \ldots f_m}\right],$$

які називаються *циліндричними відрізками рангу* m *з основою* $f_1 f_2 \ldots f_m$ ($f_i \in A_i$). Діаметр такого відрізка дорівнює $|\Delta_{f_1 \ldots f_n}| = s\widetilde{r}_n$. Оскільки

$$\Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m} = \Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m 0} \cup \Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m 1} \cup \ldots \cup \Delta'_{f_1 f_2 \ldots f_m (s \cdot 2^{n-1})},$$

то кількість $\widetilde{k}_m$ відповідних циліндричних відрізків рангу m становить

$$\widetilde{k}_m = (s+1)(2s+1)(4s+1) \ldots (s 2^{m-1} + 1) = \prod_{k=1}^{m} (s \cdot 2^{k-1} + 1).$$

Таким чином, $S_{\psi_s} \subset G_{m+1} \subset G_m$ для всіх m і має місце рівність

$$S_{\psi_s} = \lim_{m \to \infty} G_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m, \quad \text{де} \quad G_m = \bigcup_{(d_1 \ldots d_m)} \Delta_{f_1 \ldots f_m}.$$

Лему 2 доведено.

Теорема 6. *У випадку неперервності випадкової величини ξ $(M = 0)$ розподіл випадкової величини ψ_s для будь-якого натурального $s \geq 2$ є сингулярним розподілом канторівського типу із суперфрактальним спектром.*

Доведення. Оскільки, згідно з попередньою лемою, множина S_{ψ_s} належить об'єднанню $\widetilde{k}_n = \prod_{k=1}^{n}(s \cdot 2^{k-1} + 1)$ циліндричних відрізків рангу n діаметра $s\widetilde{r}_n$, то міра Лебега

$$\lambda(S_{\psi_s}) \leq \lim_{n\to\infty} \widetilde{k}_n \widetilde{r}_n = s \cdot \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{s2^{k-1}+1}{(k+1)2^{k-1}+1} = s \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{s2^{k-1}+1}{(k+1)2^{k-1}+1} = 0,$$

позаяк

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s2^{n-1}+1}{(n+1)2^{n-1}+1} = 0.$$

Оскільки нуль-множина Лебега S_{ψ_s} має суперфрактальну підмножину S_ξ, то S_{ψ_s}, згідно з першою властивістю розмірності Гаусдорфа – Безиковича, також є суперфрактальною, тобо $\alpha_0(S_{\psi_s}) = 1$ при довільному $s \in \mathbb{N}$.

5. Характеристична функція випадкової величини ξ.

Означення 4. *Характеристичною функцією $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ називається математичне сподівання комплекснозначної випадкової величини $e^{it\xi}$, тобто*

$$f_\xi(t) = \mathbf{M}e^{it\xi}.$$

Апарат характеристичних функцій є зручним для дослідження структури і властивостей розподілів дійснозначних випадкових величин. Зокрема, відомо [15], що величина

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$$

дорівнює:

1) 1, якщо ξ має дискретний розподіл;

2) 0, якщо ξ має абсолютно неперервний розподіл.

Для сингулярних розподілів L_ξ може набувати всіх значень з $[0, 1]$. Сингулярні розподіли з $L_\xi = 1$ близькі до дискретних, а з $L_\xi = 0$ — до абсолютно неперервних. Тому величина L_ξ характеризує близькість за властивостями сингулярного розподілу до дискретного або абсолютно неперервного.

Лема 3 [8]. *Характеристична функція випадкової величини ξ, визначеної рівністю* (1), *має вигляд*

$$f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} p_{0k} + p_{1k}e^{itd_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \big(p_{0k} + p_{1k}\cos(d_k t) + ip_{1k}\sin(d_k t)\big),$$

а її модуль

$$|f_\xi| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|, \quad \text{де} \quad |f_k(t)| = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{ik}\sin^2\frac{td_k}{2}}.$$

Теорема 7. *Має місце рівність*

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = 1.$$

Доведення. Розглянемо послідовність $t_n = \dfrac{2\pi}{\widetilde{r}_n} = 2\pi \cdot \prod_{k=1}^{n} \big(2^{k+1}(k+1)+1\big)$.

Оцінимо

$$\big|f_\xi(t)\big| = \prod_{k=1}^{\infty} \big|f_k(t_n)\big| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{ik}\sin^2\frac{td_k}{2}} \geq \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \sin^2\frac{td_k}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos\frac{td_k}{2}\right|.$$

Маємо

$$L_\xi \geq \lim_{n\to\infty} \big|f_\xi(t_n)\big| = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \big|f_k(t_n)\big| \geq \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos\frac{t_n d_k}{2}\right|.$$

Оскільки для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує єдина пара $(m, r) \in \mathbb{N}$ така, що $k = 2^{m-1} + r$, де $r \in \big\{0, 1, 2, \ldots, 2^{m-1}\big\}$, то $d_k = d_{2^{m-1}+r} = c_m$.

Таким чином, для кожного $k = 2^{m-1} + r$ маємо

$$\frac{t_n d_k}{2} = \frac{t_n c_m}{2} = \begin{cases} \pi(m+1) \cdot \displaystyle\prod_{j=m+1}^{n} \big(2^{j-1}(j+1)+1\big), & \text{якщо} \quad n \geq m, \\ \dfrac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}, & \text{якщо} \quad n < m, \end{cases}$$

і тому

$$\left|\cos\frac{t_n d_k}{2}\right| = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \geq m, \\ \cos\left(\dfrac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right), & \text{якщо} \quad n < m. \end{cases}$$

Отже,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \big|f_k(t_n)\big| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos\frac{t_n d_k}{2}\right| = \left|\cos\frac{t_n d_1}{2}\right| \ldots \left|\cos\frac{t_n d_{2^n-1}}{2}\right| \cdot \prod_{k=2^n}^{\infty} \left|\cos\frac{t_n d_k}{2}\right| =$$

$$= \prod_{k=2^n}^{\infty} \left|\cos\frac{t_n d_k}{2}\right| = \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(\cos\frac{t_n c_m}{2}\right)^{2^{m-1}} = \prod_{m=n+1}^{\infty} \cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right).$$

Для $m > n$ маємо

$$\prod_{m=n+1}^{\infty} \cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right) =$$

$$= \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 - \sin^2\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right)^{2^{m-2}} \geq$$

$$\geq \prod_{m=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2(m+1)^2}{\prod_{i=n+1}^{m}(4^{i-1}(i+1)^2)}\right)^{2^{m-2}} \geq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2}{4^{jn}}\right)^{2^{n+j-2}} \equiv \pi_{n+1}.$$

Добуток π_{n+1} є збіжним при кожному $n \in \mathbb{N}$, оскільки ряд

$$\underbrace{\frac{\pi^2}{4^n}+\ldots+\frac{\pi^2}{4^n}}_{2^{n-1}}+\underbrace{\frac{\pi^2}{4^{2n}}+\ldots+\frac{\pi^2}{4^{2n}}}_{2^n}+\underbrace{\frac{\pi^2}{4^{3n}}+\ldots+\frac{\pi^2}{4^{3n}}}_{2^{n+1}}+\ldots=\frac{\pi^2}{2^{n+1}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{n+j-2}}{4^{jn}}$$

збігається і має суму $\dfrac{\pi^2\cdot 2^{n-2}}{2^{2n-1}-1}$, а тому збігається і нескінченний добуток

$$\prod_{m=n+1}^{\infty}\cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right).$$

Із збіжності останнього добутку випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{m=n+1}^{\infty}\cos^{2^{m-1}}\left(\frac{\pi(m+1)}{\prod_{i=n+1}^{m}(2^{i-1}(i+1)+1)}\right)=1,$$

звідки $L_\xi \geq 1$. Оскільки завжди $L_\xi \leq 1$, то $L_\xi = 1$.

Теорему 7 доведено.

Література

1. *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 2009. – **54**, №. 2. – P. 85 – 115.
2. *Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Jessen – Wintner type random variables and fractal properties of their distributions // Math. Nachr. – 2006. – **279**, № 15. – S. 1619 – 1633.
3. *Eggleston H. G.* Sets of fractional dimensions which occur is some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. – 1952. – **54**. – P. 42 – 93.
4. *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – **55**, № 2. – P. 323 – 327.
5. *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tohoku Sci. Rep. – 1914. – **3**, № 4. – P. 159 – 163.
6. *Nymann J. E., Sáenz R. A.* On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – **83**. – P. 323 – 327.
7. *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty year of Bernoulli convolutions // Fractal Geom. and Stochast. II. Progr. Probab. – 2000. – **46**. – P. 39 – 65.
8. *Pratsiovytyi M. V., Feshchenko O. Y.* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series // Theory Stochast. Process. – 2007. – **13 (29)**, № 1-2. – P. 205 – 224.
9. *Šalát T.* Absolut konvergente Reihen und Hausdorffsche Mass // Czechoslovak Math. J. – 1959. – **9**, № 3. – P. 372 – 389.
10. *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem) // Ann. Math. – 1995. – **142**, № 3. – P. 611 – 625.
11. *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського – Серпінського – Пірса та їхні застосування. – Київ: Наук. думка, 2013. – 286 с.
12. *Гончаренко Я. В.* Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наук. зап. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2003. – № 4. – С. 216 – 232.
13. *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2005. – № 6. – С. 210 – 224.
14. *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2008. – Вип. 79. – С. 34 – 49.

15. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
16. *Працьовитий М. В.* Згортки сингулярних розподілів // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 36 – 43.
17. *Працьовитий М. В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Доп. НАН України. – 1996. – № 5. – С. 32 – 37.
18. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
19. *Працьовитий М. В., Савченко І. О.* Множина неповних сум числового ряду з однією нелінійною властивістю однорідності // Буков. мат. журн. – 2014. – **2**, № 2-3. – С. 196 – 202.
20. *Працьовитий М. В., Савченко І. О.* Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2014. – **91**. – С. 133 – 142.
21. *Працьовитий М. В., Савченко І. О.* Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 14. – С. 227 – 239.
22. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена – Вінтнера // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 48 – 54.
23. *Савченко І. О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум знакододатних рядів одного класу // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 13. – С. 188 – 196.
24. *Савченко І. О.* Тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум (підсум) одного класу збіжних рядів з суттєвими перекриттями // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 15. – С.119 – 133.
25. *Шалат Т.* О мере Хаусдорфа линейных множеств // Чехосл. мат. журн. – 1961. – **11 (86)**. – С. 24 – 56.

Одержано 22.02.18