УДК 517.9

А. А. Тарасенко, А. А. Карелин (Отдел мат. исследований при Гос. ун-те штата Идальго, Мексика)

О СВЯЗИ МЕЖДУ НОРМАМИ ОПЕРАТОРОВ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОНЦАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА И ЛЕБЕГА

We select a special class of operators with endpoint singularities was found. For these operators we establish inequalities connecting the norms in Lebesgue spaces with weight and in Hölder spaces with weight. We describe specific types of operators satisfying the conditions of the main theorem on the relationship between the norms. These results can be used to study the operators acting on Hölder spaces with weight on the basis of the well-known results for operators acting on Lebesgue spaces with weight.

Виділено клас операторів з особливостями на кінцях контура, для яких доведено нерівності між нормами у вагових просторах Гельдера і Лебега. Наведено конкретні види операторів, які задовольняють умови основної теореми про зв'язок норм. Отримані результати можуть використовуватися для дослідження операторів у вагових просторах Гельдера на основі відомих результатів у вагових просторах Лебега.

1. Введение. Напомним определения, которые будем использовать в этой статье. Функции $\varphi(x)$, определенные на $J=[0,1]$ и удовлетворяющие условию $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le C|x_1-x_2|^{\mu}$, $x_1\in J,\ x_2\in J,\ 0<\mu<1$, называются функциями Гельдера. Обозначим через $H_{\mu}^{0}(J,h)$ банахово пространство, состоящее из функций, которые становятся гельдеровскими, причем с нулевыми значениями в конечных точках $x=0,\ x=1$, после умножения их на степенной вес $h(x)=(x-0)^{\mu_0}(1-x)^{\mu_1},\ \mu<\mu_0<1+\mu,\ \mu<\mu_1<1+\mu$. Норма в пространстве $H_{\mu}^{0}(J,h)$ и $H_{\mu}(J)$ определяется так:

$$\|f\|_{H_{\mu}^{0}(J,h)}=\|hf\|_{H_{\mu}(J)},\qquad \|hf\|_{H_{\mu}(J)}=\|hf\|_{C}+\|hf\|_{\mu},$$

где

$$\|hf\|_{C}=\max_{x\in J}|h(x)f(x)|,\qquad \|hf\|_{\mu}=\sup_{x_1\neq x_2}|h(x)f(x)|_{\mu},$$

$$|h(x)f(x)|_{\mu}=\frac{|h(x_1)f(x_1)-h(x_2)f(x_2)|}{|x_1-x_2|^{\mu}}.$$

Обозначим через $L_p(J,\rho)$ множество функций, которые после умножения на степенной вес $\rho(x)=(x-0)^{\alpha}(1-x)^{\beta},\ -1<\alpha<1-p,\ -1<\beta<p-1,\ p>1$, становятся интегрируемыми со степенью p. Норма в пространстве $L_p(J,\rho)$ задается формулой

$$\|f\|_{L_p(J,\rho)}=\left(\int\limits_J|f(t)|^p\rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Как мы видим, нормы очень отличаются и трудно ожидать связей между ними. Этим объясняется независимость развития теории разрешимости сингулярных интегральных операторов со сдвигом в этих столь разных пространствах [1–6]. Настоящая статья посвящена описанию операторов с локальными особенностями на концах, для которых находятся связи между нормами в весовых пространствах Гельдера и Лебега.

Примерами операторов с локальными особенностями на концах являются операторы

$$(V_k f)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(t)dt}{t+kx}, \quad k>0; \qquad (Wf)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(t)dt}{t+x-2tx}.$$

Интерес к операторам с локальными особенностями стимулируется развитием теории разрешимости операторов со сдвигом, они используются для эффективного построения правых и левых регуляризаторов, а также при доказательстве принадлежности некоторых операторов к рассматриваемым алгебрам операторов.

В пункте 2 содержатся сведения и результаты, которые будут использоваться при доказательстве основной теоремы 2. В пункте 3 доказывается основная теорема 2 о связи норм в весовых пространствах Гельдера и Лебега. В пункте 4 приводится конкретный пример оператора с точечной особенностью, для которого выполняются все требования основной теоремы 2.

2. Неравенства для операторов с точечными особенностями. Пусть $(\mathcal{D}v)(x) = x(1-x)\dfrac{d}{dx}\,v(x)$ и $\mathcal{D}^0 = I$, где I — тождественный оператор, $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}^n = \mathcal{D}^{n-1}\mathcal{D}$.

Для функций $g(x)$, определенных на J, введем

$$\mathcal{K}^n_\mu(g) = \left\{\varphi \;\Bigg|\; \sup_{0<x<1}\frac{\big|g(x)(\mathcal{D}^n\varphi)(x)\big|}{x^\mu(1-x)^\mu} < \infty\right\},$$

где n — неотрицательное целое число и $\mathcal{K}_\mu(g) = \mathcal{K}^0_\mu(g)$.

Для множества непрерывных функций на сегменте $[0,1]$ будем, как обычно, использовать символ $C\big([0,1]\big)$, а для множества дифференцируемых функций на интервале $(0,1)$ — символ $C^1((0,1))$.

Теорема 1. *Пусть $g(x)$, $f(x)$ принадлежат $C^1\big((0,1)\big)$ и*

$$f(x)\in\mathcal{K}_\mu(g)\cap\mathcal{K}^1_\mu(g), \qquad \sup_{0<x<1}\left|\frac{(\mathcal{D}g)(x)}{g(x)}\right| < \infty.$$

Тогда gf и $g(\mathcal{D}f)$ принадлежат $C\big([0,1]\big)$ с нулевыми значениями на концах $x=0$ и $x=1$. Более того, gf принадлежат $H_\mu(J)$ и для нормы выполняется неравенство

$$\|gf\|_{H_\mu(J)} \le C_1\left(\sup_{0<x<1}\frac{|g(x)f(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu} + \sup_{0<x<1}\frac{|g(x)(\mathcal{D}f)(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu}\right), \tag{1}$$

причем постоянная C_1 не зависит от функции f.

Доказательство. Из $g(x)f(x) = \dfrac{g(x)f(x)}{x^\mu(1-x)^\mu}x^\mu(1-x)^\mu$ и $f\in\mathcal{K}_\mu(g)$ следует

$$\lim_{t\to0} g(t)f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to1} g(t)f(t) = 0.$$

Таким образом, $gf\in C\big([0,1]\big)$. Далее, для любой функции $f(x)\in C\big((0,1)\big)$ выполняется $\mathcal{D}f\in\mathcal{K}_\mu(g)$ тогда и только тогда, когда $f\in\mathcal{K}^1_\mu(g)$. Следовательно, $\lim_{t\to0} g(x)(\mathcal{D}f)(x) = \lim_{t\to1} g(x)(\mathcal{D}f)(x) = 0$ и $g(x)\mathcal{D}f\in C\big([0,1]\big)$.

Теперь оценим норму $\|gf\|_{H_\mu(J)} = \|gf\|_C + \|gf\|_\mu$. Для первого слагаемого имеем

$$\|gf\|_C \le \sup_{0<x<1}\frac{|g(x)f(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu}\|x^\mu(1-x)^\mu\|_C \le \sup_{0<x<1}\frac{|g(x)f(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu}.$$

Второе слагаемое оценивается не столь очевидно. Сначала упорядочим переменные

$$\sup_{x_1,x_2\in J,x_1\neq x_2}\frac{\big|g(x_1)f(x_1)-g(x_2)f(x_2)\big|}{\big|x_1-x_2\big|^\mu}=\sup_{0<x_1<x_2<1}\frac{|g(x_1)f(x_1)-g(x_2)f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu}.$$

Рассмотрим три случая.

Первый случай: $0<x_1<x_2<1,\ x_2\geq 2x_1$. Из того, что $|x_2-x_1|\geq 2x_1-x_1=x_1$ и $|x_2-x_1|\geq x_2-\dfrac{1}{2}x_2=\dfrac{1}{2}x_2$, получаем

$$\sup_{x_1,x_2}\frac{\big|g(x_1)f(x_1)-g(x_2)f(x_2)\big|}{|x_1-x_2|^\mu}\leq\sup_{x_1,x_2}\frac{|g(x_1)f(x_1)|}{|x_1-x_2|^\mu}+\sup_{x_1,x_2}\frac{|g(x_2)f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu}\leq$$

$$\leq\sup_{x_1}\frac{|g(x_1)f(x_1)|}{|x_1|^\mu}+2^\mu\sup_{x_2}\frac{|g(x_2)f(x_2)|}{|x_2|^\mu}\leq(1+2^\mu)\sup_{0<x<1}\frac{|g(x)f(x)|}{x^\mu}.$$

Второй случай: $0<x_1<x_2<1,\ 1-x_1\geq 2(1-x_2)$. Из того, что $|x_2-x_1|\geq x_2-(-1+{}$ ${}+2x_2)=1-x_2$ и $|x_2-x_1|\geq\dfrac{1}{2}(1+x_1)-x_1=\dfrac{1}{2}(1-x_1)$, имеем

$$\sup_{x_1,x_2}\frac{\big|g(x_1)f(x_1)-g(x_2)f(x_2)\big|}{|x_1-x_2|^\mu}\leq\sup_{x_1,x_2}\frac{|g(x_1)f(x_1)|}{|x_1-x_2|^\mu}+\sup_{x_1,x_2}\frac{|g(x_2)f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu}\leq$$

$$\leq 2^\mu\sup_{x_1}\frac{|g(x_1)f(x_1)|}{|1-x_1|^\mu}+\sup_{x_2}\frac{|g(x_2)f(x_2)|}{|1-x_2|^\mu}\leq(1+2^\mu)\sup_{0<x<1}\frac{|g(x)f(x)|}{|1-x|^\mu}.$$

Третий случай: $0<x_1<x_2<1,\ x_2<2x_1,\ 1-x_1<2(1-x_2)$. Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\|gf\|_\mu=\sup_{x_1,x_2}\frac{|g(x_1)f(x_1)-g(x_2)f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\mu}\leq$$

$$\leq\sup_{x_1,x_2}(x_2-x_1)^{1-\mu}\left(\left|\left[\frac{d\ \mathrm{Re}\,g(x)f(x)}{dx}\right]_{x=\theta_1}\right|+\left|\left[\frac{d\ \mathrm{Im}\,g(x)f(x)}{dx}\right]_{x=\theta_2}\right|\right)\leq$$

$$\leq\sup_{x_1,x_2}\left|(x_2-x_1)^{1-\mu}\left[\frac{dg(x)f(x)}{dx}\right]_{x=\theta_1}\right|+\sup_{x_1,x_2}\left|(x_2-x_1)^{1-\mu}\left[\frac{dg(x)f(x)}{dx}\right]_{x=\theta_2}\right|,$$

где $x_1<\theta_1<x_2,\ x_1<\theta_2<x_2$.

Принимая во внимание неравенства $x_2-x_1<2x_1-x_1<\theta_j,\ j=1,2$, и соотношения

$$x_2-x_1=(1-x_1)-(1-x_2)<2(1-x_2)-(1-x_2)<1-\theta_j,\quad j=1,2,$$

убеждаемся, что и при $\theta_j\leq\dfrac{1}{2}$, и при $\theta_j>\dfrac{1}{2}$ имеет место $x_2-x_1<2\theta_j\dfrac{1}{2}\leq 2\theta_j(1-\theta_j)$, т. е. неравенство $x_2-x_1\leq 2\theta_j(1-\theta_j),\ j=1,2$, выполняется для всех значений $\theta_j, 0<\theta_j<1$.

Итак,

$$\|gf\|_\mu\leq 2^{1-\mu}\left(\sup_{0<\theta_1<1}\big[\theta_1(1-\theta_1)\big]^{1-\mu}\left|\frac{dg(\theta_1)}{d\theta_1}f(\theta_1)\right|+\sup_{0<\theta_1<1}\big[\theta_1(1-\theta_1)\big]^{1-\mu}\left|g(\theta_1)\frac{df(\theta_1)}{d\theta_1}\right|\right)+$$

$$+2^{1-\mu}\left(\sup_{0<\theta_2<1}\big[\theta_2(1-\theta_2)\big]^{1-\mu}\left|\frac{dg(\theta_2)}{d\theta_2}f(\theta_2)\right|+\sup_{0<\theta_2<1}\big[\theta_2(1-\theta_2)\big]^{1-\mu}\left|g(\theta_2)\frac{df(\theta_2)}{d\theta_2}\right|\right).$$

Этими случаями исчерпываются все возможные варианты. Отсюда и следует утверждение теоремы.

3. О связи между нормами операторов с точечными особенностями в весовых пространствах Гельдера и Лебега. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ множество линейных ограниченных операторов, действующих на банаховом пространстве $\mathcal{X}$, через $\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{X})}$ норму оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, через $\chi_x(t)$ характеристическую функцию на сегменте $[0,x]\subset J=[0,1]$. Через $C^{01}((0,1),h)$ обозначим класс дифференцируемых функций на интервале $(0,1)$ с нулями на концах

$$\lim_{t\to 0}h(t)\varphi(t)=0,\qquad \lim_{t\to 1}h(t)\varphi(t)=0.$$

Теорема 2. *Пусть весовые пространства Гельдера*

$$H_\mu^0(J,h),\qquad h(x)=x^{\mu+r}(1-x)^{\mu+s},\quad 0<\mu<1,\quad 0<r<1,\quad 0<s<1,$$

вложены в весовые пространства Лебега

$$L_p(J,\rho),\qquad \rho(x)=x^{\alpha}(1-x)^{\beta},\quad -1<\alpha<p-1,\quad -1<\beta<p-1:$$

$$0<r<\frac{1+\alpha}{p},\qquad 0<s<\frac{1+\beta}{p}. \tag{2}$$

Пусть линейный оператор B имеет следующие свойства:

1) *операторы $\mathcal{D}^nB$, $n=0,1,2$, ограничены в пространствах $L_p(J,\rho)$*;

2) *выполняются неравенства*

$$\left\|(\mathcal{D}^nBt^{-r}\right\|_{L_p((0,x),\rho)}\le C_2\,x^{-r+\frac{1+\alpha}{p}}\left\|(\mathcal{D}^nBt^{-r}\right\|_{L_p(J,\rho)},\quad n=0,1,2, \tag{3}$$

$$\left\|(\mathcal{D}^nB(1-t)^{-s}\right\|_{L_p((x,1),\rho)}\le C_3(1-x)^{-s+\frac{1+\beta}{p}}\left\|(\mathcal{D}^nB(1-t)^{-s}\right\|_{L_p(J,\rho)},\quad n=0,1,2; \tag{4}$$

3) *для положительного $x\in(0,1)$ и любой функции $\varphi\in H_\mu^0(J,h)$*

$$\mathcal{D}^nB\chi_x\varphi\in C^{01}((0,1),h),\qquad \mathcal{D}^nB(1-\chi_x)\varphi\in C^{01}((0,\,1),h),\quad n=0,1,2. \tag{5}$$

Тогда

$$\|B\|_{H_\mu^0(J,h)}\le C_5\sum_{n=0}^{2}\|\mathcal{D}^nB\|_{L_p(J,\rho)}, \tag{6}$$

где C_5 — положительная постоянная.

Доказательство. Введем обозначение $\vartheta(t)=(B\varphi)(t)$, где $\varphi(t)$ — функция из пространства $H_\mu^0(J,h)$. Чтобы применить теорему 1 к $\vartheta(t)$, покажем принадлежность этой функции классу $\mathcal{K}_\mu(h)\cap\mathcal{K}_\mu^1(h)$, для чего докажем конечность супремумов

$$\sup_{0<x<1}\frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu},\qquad \sup_{0<x<1}\frac{|h(x)(\mathcal{D}\vartheta)(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu}.$$

Другие требования теоремы 1 обеспечиваются условиями (5).

Рассмотрим случай $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$. Выберем положительные числа $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2$ так, чтобы $\varepsilon_1 \geq \mu$ и $r + \varepsilon_1 - 1 - \dfrac{\alpha}{p} > 0, \ \varepsilon_2 \geq \mu$ и $s + \varepsilon_2 - 1 - \dfrac{\beta}{p} > 0$. Тогда

$$\sup_{0<x<\frac{1}{2}} \frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}} = \sup_{0<x<\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\varepsilon_1}(1-x)^{\varepsilon_2}} \left| \int_0^x \frac{d}{dt}\left(\frac{h(t)\vartheta(t)}{t^{\mu-\varepsilon_1}(1-t)^{\mu-\varepsilon_2}}\right) dt \right|.$$

Подсчитаем производную и оценим ее:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^{r+\mu}(1-t)^{s+\mu}\vartheta(t)}{t^{\mu-\varepsilon_1}(1-t)^{\mu-\varepsilon_2}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{r+\varepsilon_1}(1-t)^{s+\varepsilon_2}\vartheta(t)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(t^{r+\varepsilon_1}(1-t)^{s+\varepsilon_2}\right)\vartheta(t) + t^{r+\varepsilon_1}(1-t)^{s+\varepsilon_2}\frac{d}{dt}\vartheta(t) =$$

$$= t^{r+\varepsilon_1-1}(1-t)^{s+\varepsilon_2-1}\big[(r+\varepsilon_1)(1-t) + (s+\varepsilon_2)t\big]\vartheta(t) + t^{r+\varepsilon_1-1}(1-t)^{s+\varepsilon_2-1}(\mathcal{D}\vartheta)(t) \leq$$

$$\leq c_1 t^{r+\varepsilon_1-1}(1-t)^{s+\varepsilon_2-1}\big[\vartheta(t) + \mathcal{D}\vartheta)(t)\big],$$

где $c_1 = \max\left\{\sup_{0<x<\frac{1}{2}}\big[(r+\varepsilon_1)(1-t) + (s+\varepsilon_2)t\big], 1\right\}$.

Таким образом,

$$\sup_{0<x<\frac{1}{2}} \frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}} \leq$$

$$\leq \sup_{0<x<\frac{1}{2}} \frac{c_1}{x^{\varepsilon_1}(1-x)^{\varepsilon_2}} \int_0^x t^{r+\varepsilon_1-1}(1-t)^{s+\varepsilon_2-1}\rho^{-\frac{1}{p}}(t)\rho^{\frac{1}{p}}(t)\big|\vartheta(t) + \mathcal{D}\vartheta)(t)\big| dt. \qquad (7)$$

Поскольку $\varphi \in H^0_{\mu}(J, h)$, то из (2) следует, что $\varphi \in L_p\ (J, \rho)$ и, значит, $\rho^{\frac{1}{p}}(t)(\mathcal{D}^n\vartheta)(t) \in$ $\in L_p\ (J), \ n = 0, 1$. Отсюда следует, что

$$\rho^{\frac{1}{p}}(t)(\mathcal{D}^n\vartheta)(t) \in L_p((0,x)), \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

Выбор $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2$ обеспечивает принадлежность функции

$$t^{r+\varepsilon_1-1}(1-t)^{s+\varepsilon_2-1}\rho(t)^{-\frac{1}{p}} = t^{r+\varepsilon_1-1-\frac{\alpha}{p}}(1-t)^{s+\varepsilon_2-1-\frac{\beta}{p}}$$

пространству $L_q\ ((0,x), \rho)$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Эти соотношения дают возможность применить неравенство Гельдера к (7):

$$\sup_{0<x<\frac{1}{2}} \frac{c_1}{x^{\varepsilon_1}(1-x)^{\varepsilon_2}} \left\| t^{r+\varepsilon_1-1-\frac{\alpha}{p}}(1-t)^{s+\varepsilon_2-1-\frac{\beta}{p}} \right\|_{L_q((0,x))} \left\| \rho^{\frac{1}{p}}(t)\sum_{n=0}^{1}\mathcal{D}^n\vartheta \right\|_{L_p((0,x))}. \qquad (8)$$

Теперь избавимся от вспомогательных постоянных ε_1 и ε_2. Напомним, что $-1 < r - \dfrac{1+\alpha}{p} <$ < 0. Рассмотрим первую норму с множителем из (8):

$$\frac{c_1}{x^{\varepsilon_1}(1-x)^{\varepsilon_2}}\left|\int\limits_0^x\left|t^{\varepsilon_1+r-1-\frac{\alpha}{p}}(1-t)^{\varepsilon_2+s-1-\frac{\beta}{p}}\right|^q dt\right|^{\frac{1}{q}}\leq\frac{c_1c_2}{x^{\varepsilon_1}}\left|\int\limits_0^x\left|t^{\varepsilon_1+r-1-\frac{\alpha}{p}}\right|^q dt\right|^{\frac{1}{q}}=$$

$$=c_1c_2x^{-\varepsilon_1}\left(\varepsilon_1+r-1-\frac{\alpha}{p}\right)x^{\left[(\varepsilon_1+r-1-\frac{\alpha}{p})q+1\right]\frac{1}{q}}=c_1c_2\left(\varepsilon_1+r-1-\frac{\alpha}{p}\right)x^{r-\frac{1+\alpha}{p}},\qquad(9)$$

где $c_2=\sup_{0<x<\frac{1}{2}}\dfrac{1}{(1-x)^{\varepsilon_2}}\sup_{0<t<\frac{1}{2}}(1-t)^{\varepsilon_2+s-1-\frac{\beta}{p}}$.

Итак, из (7) – (9) имеем

$$\sup_{0<x<\frac{1}{2}}\frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}\leq c_3\sup_{0<x<\frac{1}{2}}x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\sum_{n=0}^{1}\left\|(\mathcal{D}^n\vartheta)\right\|_{L_p((0,x),\rho)}.\qquad(10)$$

Аналогично, для случая $\dfrac{1}{2}<x<1$ получаем

$$\sup_{\frac{1}{2}<x<1}\frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}\leq c_4\sup_{\frac{1}{2}<x<1}(1-x)^{s-\frac{1+\beta}{p}}\sum_{n=0}^{1}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((x,1),\rho)}.\qquad(11)$$

Из (10) и (11) следует оценка

$$\sup_{0<x<1}\frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}\leq\sup_{0<x<\frac{1}{2}}\frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}+\sup_{\frac{1}{2}<x<1}\frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}\leq$$

$$\leq c_7\left[\sup_{0<x<\frac{1}{2}}x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\sum_{n=0}^{1}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)}+\sup_{\frac{1}{2}<x<1}(1-x)^{s-\frac{1+\beta}{p}}\sum_{n=0}^{1}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((x,1),\rho)}\right].\qquad(12)$$

Действуя по такой же схеме, оцениваем $\sup_{0<x<1}\dfrac{|h(x)(\mathcal{D}\vartheta)(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}$ и получаем

$$\sup_{0<x<\frac{1}{2}}\frac{|h(x)\mathcal{D}\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}\leq c_5\sup_{0<x<\frac{1}{2}}x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\sum_{n=1}^{2}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)},$$

$$\sup_{\frac{1}{2}<x<1}\frac{|h(x)\mathcal{D}\vartheta(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}\leq c_6\sup_{\frac{1}{2}<x<1}(1-x)^{s-\frac{1+\beta}{p}}\sum_{n=1}^{2}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((x,1),\rho)}.$$

Следовательно,

$$\sup_{0<x<1}\frac{|h(x)(\mathcal{D}\vartheta)(x)|}{x^{\mu}(1-x)^{\mu}}\leq$$

$$\leq c_8\left[\sup_{0<x<\frac{1}{2}}x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\sum_{n=1}^{2}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)}+\sup_{\frac{1}{2}<x<1}(1-x)^{s-\frac{1+\beta}{p}}\sum_{n=1}^{2}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((x,1),\rho)}\right].\qquad(13)$$

Покажем, что все супремумы в (12), (13) ограничены.

Действительно, при $x \to 0$ первые множители стремятся к бесконечности, в то время как вторые множители уменьшаются и стремятся к нулю, компенсируя этот рост. Условия (3), (4) как раз и показывают, каким образом происходит это уменьшение.

Применим эти условия к (12), (13).

Рассмотрим сначала произведение из (12):

$$x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\|\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)} = x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\left|\int\limits_0^x \rho(t)\left|\left(B\frac{t^\mu(1-t)^\mu}{h(t)}\frac{h(t)}{t^\mu(1-t)^\mu}\varphi\right)(t)\right|^p dt\right|^{\frac{1}{p}}, \quad 0<x<\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\varphi(t) \in H^0_\mu(J,h)$, то выполняется неравенство

$$\left|\frac{h(t)\varphi(t)}{t^\mu(1-t)^\mu}\right| \le \frac{((1-x)^\mu + x^\mu)\,|\,h(t)\varphi(t)\,|}{x^\mu(1-x)^\mu} \le$$

$$\le \sup_{0<x<1}\frac{|h(t)\varphi(t)|}{|x|^\mu} + \sup_{0<x<1}\frac{|h(t)\varphi(t)|}{|1-x|^\mu} \le 2\|\varphi(t)\|_{H^0_\mu(J,h)},$$

и мы получаем для этого произведения оценку

$$x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\|\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)} \le 2^{1+s}x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\left|\int\limits_0^x \rho(t)\left|Bt^{-r}\right|^p dt\right|^{\frac{1}{p}}\|\varphi(t)\|_{H^0_\mu(J,h)} \le$$

$$\le c_9 x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}x^{-r+\frac{1+\alpha}{p}}\|Bt^{-r}\|_{L_p(J,\rho)}\|\varphi(t)\|_{H^0_\mu(J,h)}.$$

Здесь было использовано условие (3) доказываемой теоремы.

Учитывая неравенство $\|Bt^{-r}\|_{L_p(J,\rho)} \le \|B\|_{L_p(J,\rho)}\|\|t^{-r}\|_{L_p(J,\rho)}$, окончательно получаем

$$x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\|\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)} \le x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\|B\varphi\|_{L_p((0,x),\rho)} \le c_{10}\|B\|_{L_p(J,\rho)}\|\varphi(t)\|_{H^0_\mu(J,h)}. \tag{14}$$

Остальные произведения из (12), (13) оцениваются по этой же схеме, и они оказываются ограниченными:

$$x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)} \le c_{11}\|\mathcal{D}^n B\|_{L_p(J,\rho)}\|\varphi(t)\|_{H^0_\mu(J,h)}, \quad n=1,2, \tag{15}$$

$$(1-x)^{s-\frac{1+\beta}{p}}\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((x,1),\rho)} \le c_{12}\|\mathcal{D}^n B\|_{L_p(J,\rho)}\|\varphi(t)\|_{H^0_\mu(J,h)}, \quad n=0,1,2. \tag{16}$$

Отметим, что положительные постоянные c_i, $i=1,\ldots,12$, не зависят от функции φ.

Следовательно, функция $\vartheta(t)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_\mu(h)\bigcap\mathcal{K}^1_\mu(h)$.

Условие (5) теоремы позволяет применить теорему 2 к функции $\vartheta(t)$. Итак,

$$\|B\varphi\|_{H^0_\mu(J,h)} = \|\vartheta\|_{H^0_\mu(J,h)} = \|h\vartheta\|_{H_\mu(J)} \le$$

$$\le C_1\left(\sup_{0<x<1}\frac{|h(x)\vartheta(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu} + \sup_{0<x<1}\frac{|h(x)(\mathcal{D}\vartheta)(x)|}{x^\mu(1-x)^\mu}\right) \le$$

$$\le C_4\left[\sup_{0<x<\frac{1}{2}} x^{r-\frac{1+\alpha}{p}}\sum_{n=0}^2\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((0,x),\rho)} + \sup_{\frac{1}{2}<x<1}(1-x)^{s-\frac{1+\beta}{p}}\sum_{n=0}^2\|\mathcal{D}^n\vartheta\|_{L_p((x,1),\rho)}\right].$$

Здесь были использованы неравенства (12), (13).

Учитывая (14) – (16), получаем неравенство

$$\|B\varphi\|_{H^0_\mu(J,h)} \le C_5 \sum_{n=0}^{2} \|\mathcal{D}^n B\|_{L_p(J,\rho)} \|\varphi\|_{H^0_\mu(J,h)}.$$

Положительные постоянные $C_i, i = 1, \ldots, 5$, не зависят от функции φ.

Теорема 2 доказана.

4. Пример оператора с точечными особенностями. Покажем, что оператор $(V_1 f)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(t)dt}{t+x}$ имеет все свойства, указанные в теореме 2.

Ограниченность оператора $\mathcal{D}^n V_1,\ n = 0, 1$, в пространстве $L_p(J,\rho),\ 1 < p < +\infty,\ \rho(x) = x^\alpha(1-x)^\beta,\ -1 < \alpha < p-1,\ -1 < \beta < p-1$, следует из оценок

$$\left|(\mathcal{D}V_1\varphi)(x)\right| = \left|\mathcal{D}\frac{1}{\pi i}\int\limits_J \frac{\varphi(t)dt}{t+x}\right| =$$

$$= \left|\frac{-1}{\pi i}\int\limits_J \frac{x(1-x)\varphi(t)dt}{(t+x)^2}\right| = \left|\frac{1}{\pi i}\int\limits_J \frac{x(1-x)}{t+x}\,\frac{\varphi(t)dt}{t+x}\right| \le \left|\frac{1}{\pi i}\int\limits_J \frac{|\varphi(t)|dt}{t+x}\right| =$$

$$= \left|C_J Q_{\mathcal{J}} S_{\mathcal{J}} E_{\mathcal{J}\setminus J}|\varphi(t)|\right|,$$

$$\left\|(\mathcal{D}V_1\varphi)(x)\right\|_{L_p(J,\rho)} = \left|\int\limits_J \rho(x)\left|(\mathcal{D}V_1\varphi)(x)\right|^p dx\right|^{\frac{1}{p}} \le \left|\int\limits_J \rho(x)\left|C_J Q_{\mathcal{J}} S_{\mathcal{J}} E_{\mathcal{J}\setminus J}|\varphi(t)|\right|^p dx\right|^{\frac{1}{p}} \le \tag{17}$$

$$\le \left\|Q_{\mathcal{J}} S_{\mathcal{J}}\right\|_{L_p(\mathcal{J},\tilde\rho)} \|\varphi\|_{L_p(J,\rho)}.$$

Здесь C_J — оператор сужения на контур J для функций, заданных на $\mathcal{J} = [-1,1]$, и $E_{\mathcal{J}\setminus J}$ — оператор расширения значением нуль на контур $[-1,0]$ для функций, заданных на J. Вес $\tilde\rho$ выбирается так, чтобы оператор отражения $(Q_{\mathcal{J}} f)(x) = f(-x)$ был ограничен в пространстве $L_p(\mathcal{J},\tilde\rho)$, где $\tilde\rho(x) = (x-0)^\alpha(1-x)^\beta(1+x)^\beta,\ -1 < \alpha < 1-p,\ -1 < \beta < p-1$. Через $(S_{\mathcal{J}} f)(x) = \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\mathcal{J}} \dfrac{f(t)dt}{t-x},\ \mathcal{J} = (-1,1)$, обозначен сингулярный интегральный оператор Коши. Оператор $S_{\mathcal{J}}$ ограничен [3] в пространстве $L_p(\mathcal{J},\tilde\rho),\ p > 1$.

Ограниченность оператора $\mathcal{D}^2 V_1$ в пространстве $L_p(J,\rho)$ доказывается аналогично. Теперь покажем выполнение условий (5) теоремы 2.

Рассмотрим оператор V_1 в весовом пространстве Гельдера $H^0_\mu(J,h)$. Поскольку функция

$$\overline{\omega}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{t+x}, \quad x \in (0,1),$$

дифференцируема, то остается убедиться, что $\lim_{x\to0} h(x)\,\overline{\omega}(x) = 0$ и $\lim_{x\to1} h(x)\,\overline{\omega}(x) = 0$.

Выберем число γ так, чтобы $r < \gamma < \mu + r$, и подсчитаем

$$\lim_{x\to 0} h(x)\,\overline{\omega}(x) = \lim_{x\to 0} h(x)x^{-\gamma}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{x}{t+x}\right)^{\gamma} \frac{h(t)\varphi(t)}{t^{\mu}(1-t)^{\mu}}\frac{t^{\mu}(1-t)^{\mu}}{h(t)(t+x)^{1-\gamma}}\,dt.$$

Здесь $\lim_{x\to 0} h(x)x^{-\gamma} = \lim_{x\to 0} x^{\mu+r}(1-x)^{\mu+s}x^{-\gamma} = 0$, поскольку $\left(\dfrac{x}{t+x}\right)^{\gamma} < 1$.

Неравенства $\left|\dfrac{h(t)\varphi(t)}{t^{\mu}(1-t)^{\mu}}\right| \leq 2^{\mu}\|h\varphi\|_{H_{\mu}(J)}$ выполняются, а особенность сомножителя $\dfrac{t^{\mu}(1-t)t^{\mu}}{h(t)(t+x)^{1-\gamma}} = \dfrac{1}{(t)^{r}(1-t)^{s}(t+x)^{1-\gamma}}$ меньше 1, поскольку $\dfrac{1}{(t)^{r}(t+x)^{1-\gamma}} \leq \dfrac{1}{t^{r}(t+0)^{1-\gamma}} = t^{\gamma-r-1}$ и $r<\gamma$.

Из

$$(DV_1\varphi)(x) = -\frac{x(1-x)}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t+x)^2},$$

$$(D^2V_1\varphi)(x) = \frac{x(1-x)}{\pi}\left[(2x-1)\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t+x)^2} + 2x(1-x)\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t+x)^3}\right]$$

следует, что $\overline{\omega}_1(x) = (\mathcal{D}V_1\varphi)(x)$, $\overline{\omega}_2(x) = (\mathcal{D}^2V_1\varphi)(x)$ дифференцируемы в $(0,1)$ и

$$\lim_{x\to 0} h(x)\,\overline{\omega}_j(x) = \lim_{x\to 1} h(x)\,\overline{\omega}_j(x) = 0, \quad j=1,2.$$

Доказательство проводится так же, как и в случае функции $\overline{\omega}(x)$.

Случай, когда x стремится к 1, является более простым, так как функция $\dfrac{1}{t+x}$ в точке $x=1$ не имеет особенностей.

Осталось проверить выполнение условия (3). Сформулируем это в виде утверждения.

Утверждение. *Для оператора V_1 при $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$ имеет место неравенство*

$$\left\|\mathcal{D}^n V_1 t^{-r}\right\|_{L_p((0,x),\rho)} \leq C_6\; x^{-r+\frac{1+\alpha}{p}} \left\|\mathcal{D}^n V_1 t^{-r}\right\|_{L_p(J,\rho)} \quad n=0,1,2,$$

где положительная постоянная C_6 не зависит от функции φ.

Доказательство. Чтобы оценить норму

$$\left\|\mathcal{D}^n V_1 t^{-r}\right\|_{L_p((0,x),\rho)} = \left|\int\limits_0^x \rho(t)\left|\mathcal{D}^n V_1 t^{-r}\right|^p dt\right|^{\frac{1}{p}} = \left|\int\limits_0^x \rho(t)\left|\mathcal{D}^n\int\limits_0^1 \frac{\tau^{-r}d\tau}{\tau+t}\right|^p dt\right|^{\frac{1}{p}},$$

выделим особенности в интеграле $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tau^{-r}d\tau}{\tau+t}\,dt$, для чего выполним замену переменной $\tau = ut$. В результате получим $t^{-r}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{u^r(u+1)}$.

Установим оценку для случая $n=0$, случаи $n=1,2$ рассматриваются аналогично, с учетом переходов (17) от $(\mathcal{D}V_1\varphi)(x)$ к $(V_1\varphi)(x)$.

Функция $\Pi(t) = |1-t|^{\beta}\left(\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{u^r(u+1)}\right)^p$, $0 < t < x \leq \frac{1}{2}$, отделена от нуля положительной постоянной $\Pi\left(\frac{1}{2}\right)$ и ограничена сверху конечной постоянной $\Pi(0) = \left(\int_0^{\infty} \frac{du}{u^r(u+1)}\right)^p < \infty$.

Итак,

$$\left|\int_0^x \rho(t)\left|\int_0^1 \frac{\tau^{-r}d\tau}{\tau+t}\right|^p dt\right|^{\frac{1}{p}} = \left|\int_0^x \rho(t)\left| t^{-r}\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{u^r(u+1)}\right|^p dt\right|^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \Pi(0)\left|\int_0^x t^{-rp+\alpha}dt\right|^{\frac{1}{p}} = \Pi(0)x^{-rp+1+\alpha}\left|\int_0^1 t^{-rp+\alpha}\frac{\Pi(t)}{\Pi(t)}dt\right|^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{\Pi(0)}{\Pi\left(\frac{1}{2}\right)}x^{-rp+1+\alpha}\left|\int_0^1 t^{-rp+\alpha}(1-t)^{\beta}\left(\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{u^r(u+1)}\right)^p dt\right|^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{\Pi(0)}{\Pi\left(\frac{1}{2}\right)}x^{-rp+1+\alpha}\left|\int_0^1 \rho(t)\left(t^{-r}\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{du}{u^r(u+1)}\right)^p dt\right|^{\frac{1}{p}}.$$

От переменной u возвращаемся к переменной τ и получаем требуемую оценку (3).

Утверждение доказано.

Поскольку ядро оператора V_1 не имеет особенностей в точке $x = 1$, то при проверке условия (4) трудности не возникают.

Литература

1. *Дудучава Р. В.* Одномерные сингулярные интегральные операторные алгебры в пространствах Гельдера с весом // Труды Тбил. мат. ин-та АН ГССР. – 1963. – **43**. – С. 19 – 52.
2. *Дудучава Р. В.* Интегральные уравнения в свертках с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения и их приложения к задачам механики // Труды Тбил. мат. ин-та АН ГССР. – 1979. – **60**. – С. 2 – 136.
3. *Gohberg I., Krupnik N.* One-dimensional linear singular integral equations // Operator Theory: Adv. and Appl. – Basel etc.: Birkhäuser, 1992. – **53**.
4. *Karlovich Yu. I., Kravchenko V. G.* Singular integral equations with non-Carleman shift on an open contour // Different. Equat. – 1981. – **17**. – P. 1408 – 1417.
5. *Litvinchuk G. S.* Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2000.
6. *Mikhlin S. G., Prossdorf S.* Singular integral operators. – Berlin: Akad.-Verl., 1986.

Получено 27.08.16