УДК 517.555

**А. І. Бандура** (Івано-Франк. нац. техн. ун-т нафти і газу),
**О. Б. Скасків** (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

# ЛОГАРИФМІЧНА ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ ТА РОЗПОДІЛ НУЛІВ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО $L$-ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ

We establish new criteria of boundedness of the $L$-index in the direction for entire functions in $\mathbb{C}^n$. These criteria are formulated as estimate of the maximum modulus via the minimum modulus on a circle and describe the distribution of their zeros and the behavior of the directional logarithmic derivative. In this way, we prove Hypotheses 1 and 2 from the article [*Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Open problems for entire functions of bounded index in direction // Mat. Stud. – 2015. – **43**, № 1. – P. 103 – 109]. The obtained results are also new for the entire functions of bounded index in $\mathbb{C}$. They improve the known results by M. N. Sheremeta, A. D. Kuzyk, and G. H. Fricke.

Получены новые критерии ограниченности $L$-индекса по направлению для целых функций в $\mathbb{C}^n$, формулируемые в терминах оценки максимума модуля через минимум модуля на окружности, а также в терминах ограничений на распределение их нулей поведение логарифмической производной по направлению. Тем самым доказаны гипотезы 1 и 2 из статьи [*Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Open problems for entire functions of bounded index in direction // Mat. Stud. – 2015. – **43**, № 1. – P. 103 – 109]. Полученные результаты также являются новыми для функций ограниченного индекса и $l$-индекса в $\mathbb{C}$ и улучшают известные результаты М. Н. Шереметы, А. Д. Кузыка, Г. Х. Фрике.

**1. Вступ.** У цій статті розглянуто два відкриті питання у класі цілих функцій обмеженого $L$-індексу за напрямком. Власне, доведемо дві гіпотези про характеризацію функцій з цього класу [1]. Встановлені нами результати є новими навіть в одновимірному випадку. В достатніх частинах наслідків з них про обмеженість індексу та $l$-індексу вони покращують відповідні твердження Ґ. Х. Фріке (див. теорему 5 у [2] та теорему 2 у [3]), а також М. М. Шеремети, А. Д. Кузика (див. теореми 1 та 6 у [4]). На відміну від останніх тверджень виявилось, що у відповідних умовах на цілу функцію досить вимагати, щоб вони виконувались лише для кола з деяким одним значенням радіуса замість вимоги їхнього виконання для всіх додатних значень радіуса. Перейдемо тепер до детального викладу. Насамперед введемо деякі потрібні позначення та поняття. Нехай $L\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — довільна фіксована неперервна функція. Ціла функція $F(z),\ z \in \mathbb{C}^n$, називається [1, 5 – 8] *функцією обмеженого $L$-індексу за напрямком* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, якщо існує таке $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та всіх $z \in \mathbb{C}^n$

$$\frac{1}{m!L^m(z)}\left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m}\right| \le \max\left\{\frac{1}{k!L^k(z)}\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| : 0 \le k \le m_0\right\}, \tag{1}$$

де $\dfrac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} := F(z),\ \dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} := \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j = \langle \mathbf{grad} F, \overline{\mathbf{b}}\rangle,\ \dfrac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} := \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\left(\dfrac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}}\right)$, $k \ge 2$.

Найменше таке ціле число $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ називається *$L$-індексом за напрямком* $\mathbf{b}$ *цілої функції* $F(z)$ *та позначається через* $N_{\mathbf{b}}(F, L) = m_0$.

У випадку $n = 1$ та $\mathbf{b} = 1$ отримуємо означення цілої у $\mathbb{C}$ функції обмеженого $l$-індексу (див. [4, 9]); якщо ж $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$ та $L(z) \equiv 1$, це означення задає функцію обмеженого індексу, введену Б. Лепсоном [10].

Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ та додатної неперервної функції $L\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\lambda_1(\eta) = \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) := \inf_{z\in\mathbb{C}^n} \inf\big\{L(z+t\mathbf{b})/L(z)\colon |t| \le \eta/L(z)\big\},$$

$$\lambda_2(\eta) = \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) := \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \sup\big\{L(z+t\mathbf{b})/L(z)\colon |t| \le \eta/L(z)\big\}.$$

Через $Q_{\mathbf{b}}^n$ позначимо клас функцій $L$, які задовольняють умову

$$(\forall \eta \ge 0)\colon 0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty. \tag{2}$$

Також використовуємо позначення $Q = Q_1^1$ для класу додатних неперервних функцій $l(z)$, якщо $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{b} = 1$, $n = 1$, $L \equiv l$.

Нескладно переконатися, що клас $Q_{\mathbf{b}}^n$ можна визначити так:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \sup \left\{ \frac{L(z+t_1\mathbf{b})}{L(z+t_2\mathbf{b})}\colon |t_1 - t_2| \le \frac{\eta}{\min\{L(z+t_1\mathbf{b}), L(z+t_2\mathbf{b})\}} \right\} < \infty, \tag{3}$$

тобто умови (2) та (3) рівносильні.

Авторами отримано (див., наприклад, [5, 8]) ряд критеріїв обмеженості $L$-індексу за напрямком, що є аналогами одновимірних критеріїв обмеженості $l$-індексу. Крім того, виявлено, що деякі твердження (теореми 2 і 6 з [5]) мають видозмінені сильніші версії, власне, їхнє посилення полягає у заміні кванторів загальності на квантори існування (див. теорему 5 у [6] і теорему 7 у [5]). Цю обставину ілюструють, зокрема, два наступних твердження. Перше з них є повним аналогом відповідної теореми Фріке – Кузика – Шеремети [2, 4].

**Теорема 1** [5, 8]. *Нехай $L$ належить $Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли для кожної пари $r_1$ та $r_2$ такої, що $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, існує таке число $P_1 = P_1(r_1, r_2) \ge 1$, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$*

$$\max\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = r_2/L(z^0)\big\} \le P_1 \max\big\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = r_1/L(z_0)\big\}. \tag{4}$$

Виявляється, що умову „для кожної пари $r_1$ та $r_2$” у теоремі 1 можна замінити умовою „існують числа $r_1$ та $r_2$”. На це вказує наступне твердження.

**Теорема 2** [5, 8]. *Нехай $L$ належить $Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли існують числа $r_1$ та $r_2$, $0 < r_1 < 1 < r_2 < +\infty$, і $P_1 \ge 1$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність* (4).

**2. Оцінка максимуму модуля через мінімум модуля.** Сформульовану нижче теорему доведено у [5, 8].

**Теорема 3** [5, 8]. *Нехай $L$ належить $Q_{\mathbf{b}}^n$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $R > 0$ існують $P_2(R) \ge 1$ та $\eta(R) \in (0, R)$ такі, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$ і деякого $r = r(z^0) \in [\eta(R), R]$ справджується нерівність*

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\} \le P_2 \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t| = \frac{r}{L(z^0)}\right\}. \tag{5}$$

З урахуванням теорем 1 та 2 в [1] було поставлено таке питання.

**Проблема 1** [1]. *Чи правильна гіпотеза* 1?

**Гіпотеза 1** [1]. *Нехай $L$ належить $Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ тоді і тільки тоді, коли існують $R>0,\ P_2(R)\ge 1$ та $\eta(R)\in(0,R)$ такі, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$ і деякого $r=r(z^0)\in[\eta(R),R]$ виконується нерівність* (5).

Доведемо цю гіпотезу за припущення, що $R\in(0,1)$. Чи можна відмовитись у достатній частині наступної теореми від обмеження $R<1$ — авторам на даний час невідомо.

**Теорема 4.** *Нехай $L$ належить $Q^n_{\mathbf{b}}$. Ціла в $\mathbb{C}^n$ функція $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ тоді і тільки тоді, коли існують $R\in(0,1),\ P_2\ge 1$ та $\eta\in(0,R)$ такі, що для кожного $z^0\in\mathbb{C}^n$ і деякого $r=r(z^0)\in[\eta,R]$ виконується* (5).

***Доведення.*** *Необхідність.* Якщо $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$, то потрібне отримуємо безпосередньо з теореми 3.

*Достатність.* З огляду на теорему 2 досить довести, що існує число $P_1$ таке, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t|=(R+1)/L(z^0)\right\}\le P_1\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t|=R/L(z^0)\right\}. \tag{6}$$

Припустимо, що існують $R\in(0,1),\ P_2\ge 1$ та $\eta\in(0,R)$ такі, що для всіх $z^0\in\mathbb{C}^n$ і деякого $r=r(z^0)\in[\eta,R]$ виконується

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|:|t|=r/L(z^0)\right\}\le P_2\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t|=r/L(z^0)\right\}.$$

Позначимо $L^*=\max\left\{L(z^0+t\mathbf{b})\colon |t|\le(2R+2)/L(z^0)\right\},\ \rho_0=R/L(z^0),\ \rho_k=\rho_0+k\eta/L^*$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Тоді

$$\frac{\eta}{L^*}<\frac{R}{L^*}\le\frac{R}{L(z^0)}<\frac{2R+2}{L(z^0)}-\frac{R+1}{L(z^0)}.$$

Тому існує $n^*\in\mathbb{N}$, незалежне від $z^0$ і таке, що при деякому $p=p(z^0)\le n^*$

$$\rho_{p-1}<\frac{R+1}{L(z^0)}\le\rho_p\le\frac{2R+2}{L(z^0)},$$

оскільки $L\in Q^n_{\mathbf{b}}$. Справді,

$$\left(\frac{2R+2}{L(z^0)}-\rho_0\right)\Big/\left(\frac{\eta}{L^*}\right)=\frac{(R+2)L^*}{\eta L(z^0)}=$$
$$=\frac{R+2}{\eta}\max\left\{\frac{L(z^0+t\mathbf{b})}{L(z^0)}\colon |t|\le\frac{2R+2}{L(z^0)}\right\}\le\frac{R+2}{\eta}\lambda_2(2R+2).$$

Можна взяти $n^*=\left[\dfrac{R+2}{\eta}\lambda_2(2R+2)\right]$, де $[a]$ — ціла частина $a\in\mathbb{R}$.

Додатково виберемо $|F(z^0+t_k^{**}\mathbf{b})|=\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon t\in c_k\right\},\ c_k=\{t\in\mathbb{C}\colon |t|=\rho_k\}$, та через $t_k^*$ позначимо точку перетину відрізка $[0,t_k^{**}]$ з колом $c_{k-1}$. Тоді для будь-якого $r>\eta$ та всіх $k\le n^*$ виконується нерівність $|t_k^{**}-t_k^*|=\eta/L^*\le\dfrac{r}{L(z^0+t_k^*\mathbf{b})}$. Отже, для деякого $r=r(z^0+t_k^*\mathbf{b})\in[\eta,R]$ отримуємо

$$|F(z^0+t_k^{**}\mathbf{b})|\le\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t-t_k^*|=r/L(z^0+t_k^*\mathbf{b})\right\}\le$$
$$\le P_2\min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t-t_k^*|=r/L(z^0+t_k^*\mathbf{b})\right\}\le$$

$$\le P_2 \min\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: |t-t_k^*| = r/L(z^0+t_k^*\mathbf{b}), |t-t_0|\le\rho_{k-1}\right\} \le$$
$$\le P_2 \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: t\in c_{k-1}\right\}.$$

Використовуючи цю оцінку для всіх кіл $c_k$, послідовно одержуємо

$$\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: |t| = (R+1)/L(z^0)\right\} \le$$
$$\le \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: t\in c_p\right\} \le P_2\max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: t\in c_{p-1}\right\} \le \ldots$$
$$\ldots \le (P_2)^p \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: t\in c_0\right\} \le$$
$$\le (P_2)^{n^*} \max\left\{|F(z^0+t\mathbf{b})|: |t| = R/L(z^0)\right\}.$$

Отже, одержали (6) з $P_1 = (P_2)^{n^*}$.

Теорему 4 доведено.

**3. Оцінка логарифмічної похідної за напрямком.** Нехай

$$G_r = G_r^{\mathbf{b}}(F):\, = \bigcup_{z:\, F(z)=0} \left\{z + t\mathbf{b}: |t| < r/L(z)\right\}, \tag{7}$$

$a_k^0$ — нулі функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ при фіксованому $z^0\in\mathbb{C}^n$. Через $n_{z^0}(r) = n_{\mathbf{b}}(r, z^0, 1/F) := := \sum_{|a_k^0|\le r} 1$ позначимо лічильну функцію кількості нулів $a_k^0$ функції $F(z^0+t\mathbf{b})$ у крузі $\{t\in\mathbb{C}: |t|\le r\}$. Якщо $F(z^0+t\mathbf{b})\equiv 0$ при всіх $t\in\mathbb{C}$ та заданому $z^0\in\mathbb{C}^n$, то покладемо $n_{z^0}(r) = -1$.

**Теорема 5** [5, 8]**.** *Нехай $F(z)$ — ціла функція в $\mathbb{C}^n$, $L\in Q_{\mathbf{b}}^n$. Для того щоб функція $F$ була функцією обмеженого $L$-індексу за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови*:

1) *для будь-якого $r>0$ існує таке $P = P(r) > 0$, що для всіх $z\in\mathbb{C}^n\backslash G_R$*

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial\mathbf{b}}\right| \le PL(z); \tag{8}$$

2) *для будь-якого $r>0$ існує таке $\widetilde{n}(r)\in\mathbb{Z}_+$, що для всіх $z\in\mathbb{C}^n$*

$$n_z\left(r/L(z)\right) \le \widetilde{n}(r). \tag{9}$$

Одновимірний аналог теореми 5 продемонстрував свою ефективність при дослідженні обмеженості $l$-індексу нескінченних добутків в одновимірному випадку [11–13]. Нами нещодавно [7] також використано цей критерій при встановленні достатніх умов обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних у термінах обмежень на частинні логарифмічні похідні та розподіл нулів.

З огляду на теореми 1 та 2 виглядає природною така проблема.

**Проблема 2** [1]**.** *Чи правильна гіпотеза* 2?

**Гіпотеза 2** [1]**.** *Нехай $F(z)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ функція, $L\in Q_{\mathbf{b}}^n$. Функція $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови*:

1) *існують такі $r>0$, $P>0$, що для кожного $z\in\mathbb{C}^n\backslash G_r$ виконується нерівність* (8);

2) *існують такі $r>0$, $\widetilde{n}\in\mathbb{Z}_+$, що для кожного $z\in\mathbb{C}^n$ виконується нерівність* (9).

Накладаючи додаткове обмеження, ми доводимо цю гіпотезу. Позначимо

$$n(r) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} n_z(r/L(z)).$$

**Теорема 6.** *Нехай $F(z)$ — ціла в $\mathbb{C}^n$ функція, $L \in Q^n_{\mathbf{b}}$. $F(z)$ є функцією обмеженого $L$-індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови*:

1) *існують такі $r_1 > 0,\ P > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}$ виконується нерівність* (8);

2) *існує таке $r_2 \in (0,1)$, що $n(r_2) \in [-1;\infty)$ та $2r_1 n(r_2) < r_2\lambda_1(r_2)$, а $r_1$ вибрано в умові* 1.

***Доведення.*** *Необхідність*. Нехай $F$ — функція обмеженого $L$-індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Тоді безпосередньо з теореми 5 випливає, що виконуються умови 1 і 2 теореми 6.

*Достатність*. Навпаки, вважаємо, що умови 1 та 2 виконуються.

Спочатку розглянемо випадок, коли $n(r_2) \in [-1;0]$. Тоді функція $F$ може лише тотожно дорівнювати нулю на промені $z^* + t\mathbf{b}$ для деяких $z^* \in \mathbb{C}^n$, тобто $F(z^* + t\mathbf{b}) \equiv 0$. Для всіх точок з таких променів нерівність (5) є очевидною. Звідси за умовою 1 для всіх $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}$ $\left|\dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \le PL(z)|F(z)|$.

Нехай $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}$. Для будь-яких точок $t_1$ та $t_2$ таких, що $|t_j| = \dfrac{r_1}{L(z_0)}$, $j \in \{1,2\}$, виконується

$$\ln\left|\frac{F(z^0 + t_2\mathbf{b})}{F(z^0 + t_1\mathbf{b})}\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{1}{F(z^0 + t\mathbf{b})}\frac{\partial F(z^0 + t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| |dt| \le$$

$$\le P\int_{t_1}^{t_2} L(z^0 + t\mathbf{b})|dt| \le P\lambda_2(r_1)L(z^0)\frac{\pi r_1}{L(z^0)} \le \pi r_1 P\lambda_2(r_1).$$

Звідси

$$\max\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| \colon |t| = \frac{r_1}{L(z^0)}\right\} \le P_2 \min\left\{|F(z^0 + t\mathbf{b})| \colon |t| = \frac{r_2}{L(z^0)}\right\},$$

де $P_2 = \exp\left\{\pi r_1 P\lambda_2(r_1)\right\}$. Тому за теоремою 4 функція $F$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Нехай тепер $r_2 \in (0,1)$ є таким, що $n(r_2) \in (0;\infty)$ та $2n(r_2)r_1 < r_2\lambda_1(r_2)$. Покладемо $c = \dfrac{r_2\lambda_1(r_2)}{2r_1} - n(r_2) > 0$. Зрозуміло, що тоді $r_1 = r_2\lambda_1(r_2)/(2(n(r_2)+c))$. За умовою 2 у кожній множині $\overline{K} = \left\{z^0 + t\mathbf{b} \colon |t| \le \dfrac{r_2}{L(z^0)}\right\}$ число нулів функції $F$, де $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, не перевищує $n(r_2)$.

За умовою 1 існує таке $P > 0$, що $\left|\dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\dfrac{1}{F(z)}\right| \le PL(z)$ для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}$, тобто для всіх $z \in \overline{K}$, які лежать зовні таких множин $\left\{z^0 + t\mathbf{b} \colon |t - a^0_k| < \dfrac{r_1}{L(z^0 + a^0_k\mathbf{b})}\right\}$, де $a^0_k \in \overline{K}$ є нулями функції $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$. За означенням $\lambda_1$ отримуємо

$$\lambda_1(r_2)L(z^0) \le L(z^0 + a^0_k\mathbf{b}).$$

Тоді $\left|\dfrac{1}{F(z)}\dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq PL(z)$ для кожної точки $z \in \mathbb{C}^n$, що лежить зовні множин

$$c_k^0 = \left\{ z^0 + t\mathbf{b}\colon |t - a_k^0| \leq \frac{r_1}{\lambda_1(r_2)L(z^0)} = \frac{r_2}{2(n(r_2)+c)L(z^0)} \right\}.$$

Сума діаметрів множин $c_k^0$ не перевищує значення $\dfrac{r_2 n(r_2)}{(n(r_2)+c)L(z^0)} < \dfrac{r_2}{L(z^0)}$. Отже, існує множина $\widetilde{c}^0 = \left\{ z^0 + t\mathbf{b}\colon |t| = \dfrac{r}{L(z^0)} \right\}$, де $\dfrac{r_2 \min\{1, c\}}{2(n(r_2)+c)} = \eta < r < r_2$, така, що для всіх $z \in \widetilde{c}^0$

$$\left|\frac{1}{F(z)}\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq PL(z) \leq P\lambda_2(r)L(z^0) \leq P\lambda_2\left(r_2\right) L(z^0).$$

Для довільних точок $z_1 = z^0 + t_1\mathbf{b}$ та $z_2 = z^0 + t_2\mathbf{b}$ з $\widetilde{c}^0$ маємо

$$\ln\left|\frac{F(z^0+t_2\mathbf{b})}{F(z^0+t_1\mathbf{b})}\right| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} \left|\frac{1}{F(z^0+t\mathbf{b})}\frac{\partial F(z^0+t\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right| |dt| \leq$$

$$\leq P\lambda_2(r_2)L(z^0)\frac{\pi r}{L(z^0)} \leq \pi r_2\, P(r_1)\lambda_2(r_2).$$

Звідси

$$\max\left\{ |F(z^0+t\mathbf{b})|\colon |t-t_0| = \frac{r}{L(z^0)} \right\} \leq P_2\ \min\left\{ |F(z^0+t\mathbf{b})|\colon\ |t-t_0| = \frac{r}{L(z^0)} \right\}, \qquad (10)$$

де $P_2 = \exp\left\{\pi r_2\, P(r_1)\lambda_2\left(r_2\right)\right\}$. Якщо $F(z^0+t\mathbf{b}) \equiv 0$, то нерівність (10) очевидна. За теоремою 4 функція $F(z)$ має обмежений $L$-індекс за напрямком $\mathbf{b}$.

Теорему 6 доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо $\inf_{r\in(0,1)} n(r) \geq 1$ (тобто $F$ має деякі нулі) та $\sup_{r\in(0,1)} \dfrac{r\lambda_1(r)}{2n(r)} > r_1$, то існує таке $r_2 > 0$, що $r_1 < \dfrac{r_2\lambda_1(r_2)}{2n(r_2)}$.

***Зауваження* 2.** Ми довели гіпотезу 2 за додаткового обмеження $2r_1 n(r_2) < r_2\lambda_1(r_2)$. Наразі невідомо, чи ця умова є істотною. Тому виникає така проблема.

**Проблема 3.** *Позначимо* $r_0 = \sup_{r\in(0,1)} \dfrac{r\lambda_1(r)}{2n(r)}$. *Чи існують ціла у* $\mathbb{C}^n$ *функція* $F$ *та неперервна функція* $L\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ *з такими властивостями*:

1) $\left|\dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| \leq PL(z)|F(z)|$ *для деяких* $r_1 \in (r_0, 1),\ P > 0$ *та всіх* $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_{r_1}$;

2) $\sup_{z\in\mathbb{C}^n\backslash G_{r_2}} \dfrac{1}{|F(z)|L(z)}\left|\dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\right| = +\infty$ *для будь-якого* $r_2 \in (0; r_0)$ *та* $n(r_2) \in (0; +\infty)$?

Зауважимо, що теореми 4 та 6 є новими навіть для цілих в $\mathbb{C}$ функцій (порівн. з [2–4]). Зокрема, для $n = 1$ та цілих функцій обмеженого $l$-індексу з теореми 6 випливає такий наслідок.

***Наслідок*.** *Нехай* $l \in Q$, $f$ — *ціла у* $\mathbb{C}$ *функція. Функція* $f$ *має обмежений* $l$*-індекс тоді і тільки тоді, коли*:

1) *існують такі* $r_1 > 0,\ P > 0,$ *що для кожного* $t \in \mathbb{C}\backslash G_{r_1}$ *виконується нерівність* $\dfrac{|f'(t)|}{|f(t)|} \leq Pl(t);$

2) *існує* $r_2 \in (0,1),$ *для якого* $n(r_2) \in [0;\infty)$ *та* $2r_1 n(r_2) < r_2\lambda_1(r_2),$ *а* $r_1$ *вибрано у попередній умові.*

## Література


1. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Open problems for entire functions of bounded index in direction // Mat. Stud. – 2015. – **43**, № 1. – P. 103 – 109.
2. *Fricke G. H.* Entire functions of locally slow growth // J. Anal. Math. – 1975. – **28**, № 1. – P. 101 – 102.
3. *Fricke G. H.* Functions of bounded index and their logarithmic derivatives // Math. Ann. – 1973. – **206**. – P. 215 – 223.
4. *Шеремета М. Н., Кузык А. Д.* О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного $l$-индекса // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 2. – С. 142 – 150.
5. *Бандура А. І., Скасків О. Б.* Цілі функції обмеженого $L$-індексу за напрямком // Мат. студ. – 2007. – **27**, № 1. – С. 30 – 52.
6. *Bandura A. I.* A modified criterion of boundedness of $L$-index in direction // Mat. Stud. – 2013. – **39**, № 1. – P. 99 – 102.
7. *Bandura A. I., Bordulyak M. T., Skaskiv O. B.* Sufficient conditions of boundedness of $L$-index in joint variables // Mat. Stud. – 2016. – **45**, № 1. – P. 12 – 26.
8. *Bandura A., Skaskiv O.* Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv: Publ. I. E. Chyzhykov, 2016. – 128 p.
9. *Кузык А. Д., Шеремета М. Н.* Целые функции ограниченного $l$-распределения значений // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 1. – С. 3 – 13.
10. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Symp. Pure Math. – 1968. – **2**. – P. 298 – 307.
11. *Бордуляк М. Т., Шеремета М. Н.* О существовании целых функций ограниченного $l$-индекса и $l$-регулярного роста // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1166 – 1182.
12. *Бордуляк М. Т., Шеремета М. М.* Обмеженість $l$-індексу цілих функцій Лагерра – Пойа // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 91 – 99.
13. *Шеремета М. М.* Уточнення однієї теореми Фріке про цілі функції обмеженого індексу // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 412 – 417.


Одержано 20.11.16