УДК 517.9

Б. А. Алиев, Н. К. Курбанова (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку),
Я. Якубов (Школа мат. наук, Ун-т Тель-Авива, Израиль)

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

The problem of solvability of a boundary-value problem for a differential-operator equation of the second order on a finite interval is studied in a complex separable Hilbert space H in the case where the same spectral parameter appears in the equation in the form of a quadratic function and in the boundary conditions in the form of a linear function and, moreover, the boundary conditions are not separated. The asymptotic behavior of the eigenvalues of one homogeneous abstract boundary-value problem is also investigated. The asymptotic formulas for the eigenvalues are obtained and an application of the obtained results to partial differential equations is analyzed.

У сепарабельному комплексному гільбертовому просторі H вивчаються питання розв'язності однієї крайової задачі для диференціально-операторного рівняння другого порядку на скінченному відрізку у випадку, коли один і той же спектральний параметр входить у рівняння квадратично, а в крайові умови лінійно і крайові умови не відокремлені. Вивчено асимптотичну поведінку власних значень однієї абстрактної однорідної крайової задачі. Отримано асимптотичні формули для власних значень і наведено одне застосування цих результатів до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

1. Введение. Краевые задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда один и тот же спектральный параметр входит и в уравнение, и в граничные условия, в различных аспектах изучались во многих работах (см., например, [1 – 10]).

Отметим, что все указанные работы характеризуются тем, что, во-первых, порядок спектрального параметра, входящего в уравнение и в граничные условия, одинаков, т. е. спектральный параметр линейно входит и в уравнение, и в граничное условие; во-вторых, граничные условия являются разделенными, т. е. на каждом конце отрезка задается граничное условие, в которое входят искомая функция и ее первая производная на том же конце.

В отличие от работ [1 – 10] в данной работе изучается краевая задача для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда один и тот же спектральный параметр входит в уравнение квадратично, а в граничные условия линейно и граничные условия являются неразделенными.

Итак, в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве H будем рассматривать следующую краевую задачу для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка:

$$L(\lambda, D)\, u := \lambda^2 u(x) - u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} L_1(\lambda)\, u &:= \alpha u'(0) + \lambda u(1) = f_1, \\ L_2(\lambda)\, u &:= \beta u'(1) + \lambda u(0) = f_2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где λ — спектральный параметр; A — линейный, неограниченный, самосопряженный, положительно определенный оператор в H; $\alpha,\ \beta$ — некоторые положительные числа; $D := \dfrac{d}{dx}$.

Отметим, что всюду далее речь идет о сепарабельных комплексных гильбертовых пространствах, даже если об этом явно не сказано.

В данной работе найдены простые достаточные условия для разрешимости задачи (1.1), (1.2) (а именно, доказана теорема об изоморфизме) и установлены некоторые оценки (относительно u и λ) для решения этой задачи в пространстве $L_p\left((0,1)\,;H\right),\ 1<p<\infty$.

Кроме того, изучается асимптотическое поведение собственных значений одной однородной краевой задачи, похожей на краевую задачу (1.1), (1.2). Найдены асимптотические формулы для собственных значений.

Отметим, что случай, когда краевые условия (1.2) разделены и λ входит только в одно граничное условие, был рассмотрен в работе авторов [11]. Этот случай охватывает частный случай задачи Редже.

Задачи с достаточно общими краевыми условиями (1.2), но без λ в краевых условиях, были рассмотрены в монографии [12] (глава V). При изучении разрешимости краевых задач (1.1), (1.2) мы используем технику, разработанную в монографии [12], а при исследовании асимптотики собственных значений однородной краевой задачи, соответствующей краевой задаче (1.1), (1.2), — идею и технику, имеющиеся в работах [1, 2].

Введем определения и понятия, используемые в данной работе.

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства. Множество $E_1\dot{+}E_2$ всех векторов вида (u,v), где $u\in E_1,\ v\in E_2$, с обычными координатно-линейными операциями и с нормой

$$\|(u,v)\|_{E_1\dot{+}E_2}:=\|u\|_{E_1}+\|v\|_{E_2}$$

является банаховым пространством и называется прямой суммой банаховых пространств E_1 и E_2.

Пусть E_1 и E — банаховы пространства. Через $B\left(E_1,E\right)$ обозначим банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из E_1 в E, с обычной операторной нормой. В частном случае полагаем $B\left(E\right):=B\left(E,E\right)$.

Определение 1.1. *Линейный замкнутый оператор A в гильбертовом пространстве H будем называть сильно позитивным, если область определения $D\left(A\right)$ плотна в H, при некотором $\varphi\in[0,\pi)$ для всех точек из угла $|\arg\mu|\le\varphi$ (включая $\mu=0$) существуют операторы $\left(A+\mu I\right)^{-1}$ и имеет место оценка*

$$\left\|\left(A+\mu I\right)^{-1}\right\|_{B(H)}\le C\left(1+|\mu|\right)^{-1},$$

где I — единичный оператор в H, $C=\mathrm{const}>0$.

При $\varphi=0$ оператор A называется позитивным.

Простейшим примером сильно позитивных операторов являются самосопряженные, положительно определенные операторы, действующие в гильбертовом пространстве.

Отметим, что из сильной позитивности оператора A следует сильная позитивность оператора $A^{\alpha},\ \alpha\in(0,1)$. Пусть A — сильно позитивный оператор в H. Поскольку обратный оператор A^{-1} ограничен в H, то

$$H\left(A^n\right):=\left\{u\colon u\in D\left(A^n\right),\|u\|_{H(A^n)}=\|A^nu\|_H\right\},\quad n\in\mathbb{N},$$

— гильбертово пространство, норма которого эквивалентна норме графика оператора A^n. Если оператор A сильно позитивен в H, то оператор $-A$ является генератором аналитической при $t > 0$ полугруппы e^{-tA}, и эта полугруппа экспоненциально убывает, т. е. существуют два таких числа $C > 0$, $\sigma_0 > 0$, что $\left\| e^{-tA} \right\| \le Ce^{-\sigma_0 t}$, $0 \le t < +\infty$.

В силу теоремы 1.5.5 [13] оператор $-A^{1/2}$ порождает аналитическую полугруппу при $t > 0$, убывающую на бесконечности.

Определение 1.2 ([14], теорема 1.14.5). *Пусть A — сильно позитивный оператор в H. Тогда интерполяционные пространства $\left(H\left(A^n\right), H\right)_{\theta,p}$ гильбертовых пространств $H\left(A^n\right)$ и H определяются равенством*

$$\left(H\left(A^n\right), H\right)_{\theta,p} := \left\{ u\colon u \in H, \|u\|_{\left(H\left(A^n\right), H\right)_{\theta,p}} := \int\limits_0^{+\infty} t^{-1+n\theta p} \left\| A^n e^{-tA} u \right\|_H^p dt < \infty \right\},$$

$\theta \in (0,1)\,,\ p > 1,\ n \in \mathbb{N}$. *При этом* $\left(H\left(A^n\right), H\right)_{0,p} := H\left(A^n\right)$ *и* $\left(H\left(A^n\right), H\right)_{1,p} := H$.

Через $L_p\left((0,1); H\right)$, $1 < p < \infty$, обозначим банахово пространство (при $p = 2$ — гильбертово пространство) функций $x \to u\left(x\right)\colon [0,1] \to H$, сильно измеримых и суммируемых в p-й степени, с нормой

$$\|u\|_{L_p((0,1);H)} := \left(\int\limits_0^1 \|u\|_H^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а через $W_p^n\left((0,1); H\left(A^n\right), H\right) := \left\{ u\colon A^n u, u^{(n)} \in L_p\left((0,1); H\right) \right\}$ — пространство вектор-функций с нормой

$$\|u\|_{W_p^n((0,1);H(A^n),\,H)} := \|A^n u\|_{L_p((0,1);H)} + \left\| u^{(n)} \right\|_{L_p((0,1);H)}.$$

Известно [14] (теорема 1.8.2), что если $u \in W_p^n\left((0,1); H\left(A^n\right), H\right)$, то

$$u^{(j)}\left(\cdot\right) \in \left(H\left(A^n\right), H\right)_{\frac{j+1/p}{n},p}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Наконец, введем обозначение $H_k := (H(A), H)_{\frac{k}{2}+\frac{1}{2p},p}$, $k = 0, 1$.

2. Однородное уравнение. Рассмотрим сначала следующую краевую задачу в сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$L\left(\lambda, D\right) u := \lambda^2 u(x) - u''(x) + Au(x) = 0, \quad x \in (0,1)\,, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} L_1\left(\lambda\right) u &:= \alpha u'(0) + \lambda u(1) = f_1, \\ L_2\left(\lambda\right) u &:= \beta u'(1) + \lambda u(0) = f_2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *A является самосопряженным, положительно определенным оператором $(A = A^* \ge \gamma^2 I)$ в H;*

2) *α, β — некоторые положительные числа.*

Тогда для $f_k \in H_1$ *и достаточно больших* $|\lambda|$ *из угла* $|\arg\lambda| \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ *задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное решение* $u(x)$, *принадлежащее* $W_p^2\left((0,1);H(A),H\right)$, *для которого справедлива оценка*

$$|\lambda|^2 \|u\|_{L_p((0,1);H)} + \left\|u''\right\|_{L_p((0,1);H)} + \|Au\|_{L_p((0,1);H)} \leq$$
$$\leq C_\varphi \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k\|_{H_1} + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}} \|f_k\|_H \right). \tag{2.3}$$

Доказательство. Поскольку $A = A^* \geq \gamma^2 I$ в H, то согласно спектральной теореме (см., например, [15], глава V, разделы 5,6 и глава VI, раздел 5) существует операторнозначная функция $f(A) = \displaystyle\int_{\gamma^2}^{+\infty} f(\mu)\, dE_\mu$ для любых измеримых, ограниченных, комплекснозначных функций $f(\mu)$. Более того, $f(A)$ — ограниченный оператор в H и $\|f(A)\| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma^2 \leq \mu < \infty} |f(\mu)|$. Тогда из условий 1 следует, что для любого ψ, $0 \leq \psi < \pi$, существует такое $C_\psi > 0$, что

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C_\psi (1 + |\lambda|)^{-1}, \quad |\arg\lambda| \geq \pi - \psi,$$

где $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A. Отсюда в силу леммы 5.4.2/6 [12] для $|\arg\lambda| \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ существует аналитическая при $x > 0$ и сильно непрерывная для $x \geq 0$ полугруппа $e^{-x\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}}$. В силу леммы 5.3.2/1 [12] для того, чтобы функция $u(x)$ была решением уравнения (2.1) при $|\arg\lambda| \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, принадлежащим $W_p^2\left((0,1);H(A),H\right)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$u(x) = e^{-x\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} g_1 + e^{-(1-x)\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} g_2, \tag{2.4}$$

где $g_k \in H_0$, $k = 1, 2$.

Потребуем, чтобы функция $u(x)$ вида (2.4) удовлетворяла условиям (2.2). Тогда получим следующую систему для элементов g_1 и g_2:

$$\begin{gathered}
\left[-\alpha\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2} + \lambda e^{-\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}}\right] g_1 + \left[\alpha\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2} e^{-(A+\lambda^2 I)^{1/2}} + \lambda I\right] g_2 = f_1, \\
\left[-\beta\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2} e^{-\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} + \lambda\right] g_1 + \left[\beta\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2} + \lambda e^{-(A+\lambda^2 I)^{1/2}}\right] g_2 = f_2.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Систему (2.5) в пространстве $\mathbb{H} := H_1 \dot{+} H_1$ запишем в виде операторного уравнения

$$(A(\lambda) + R(\lambda)) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где $A(\lambda)$ и $R(\lambda)$ — операторные матрицы размера 2×2:

$$A(\lambda) := \begin{pmatrix} -\alpha\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2} & \lambda \\ \lambda & \beta\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$D\left(A\left(\lambda\right)\right):=H_0\dot{+}H_0$$

и

$$R\left(\lambda\right):=\left(\begin{array}{cc}\lambda e^{-(A+\lambda^2 I)^{1/2}} & \alpha\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}e^{-\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}}\\ -\beta\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}e^{-\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} & \lambda e^{-\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}}\end{array}\right),$$

$$D\left(R\left(\lambda\right)\right):=\mathbb{H}.$$

Покажем, что оператор $A\left(\lambda\right)$ в пространстве $\mathbb{H}$ для λ из угла $|\arg\lambda|\leq\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ имеет ограниченный обратный $A\left(\lambda\right)^{-1}$, действующий из $\mathbb{H}$ в $H_0\dot{+}H_0$, и справедлива оценка

$$\left\|A\left(\lambda\right)^{-1}\right\|_{B\left(\mathbb{H},H_0\dot{+}H_0\right)}\leq C, \tag{2.7}$$

где $C>0$ — некоторая константа, не зависящая от λ. Заметим, что формально $A\left(\lambda\right)^{-1}$ имеет вид

$$A\left(\lambda\right)^{-1}=\left[I+\frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1}\left(\begin{array}{cc}-\dfrac{1}{\alpha}\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2} & \dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1}\\ \dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1} & \dfrac{1}{\beta}\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}\end{array}\right). \tag{2.8}$$

Сначала покажем, что оператор $\left[I+\dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1}$ для $|\arg\lambda|\leq\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ ограниченно действует из H в H.

Рассмотрим функцию $f\left(\mu\right)=\left(1+\dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(\mu+\lambda^2\right)^{-1}\right)^{-1}$. Докажем, что для $|\arg\lambda|\leq$ $\leq\varphi<\dfrac{\pi}{2}$

$$\inf_{\gamma^2\leq\mu<\infty}\left|\left(f\left(\mu\right)\right)^{-1}\right|=\inf_{\gamma^2\leq\mu<\infty}\left|\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(\mu+\lambda^2\right)^{-1}\right)\right|\geq C,\quad C>0. \tag{2.9}$$

Действительно, если $0<\arg\lambda\leq\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ и $\gamma^2\leq\mu<\infty$, то $0\leq\arg\left(\mu+\lambda^2\right)\leq 2\varphi$ и $-2\varphi\leq\arg\left(\mu+\lambda^2\right)^{-1}\leq 0$. Следовательно, $-2\varphi\leq\arg\left(\dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(\mu+\lambda^2\right)^{-1}\right)\leq 2\varphi$. Если $-\dfrac{\pi}{2}<$ $<-\varphi\leq\arg\lambda\leq 0$ и $\gamma^2\leq\mu<\infty$, то $-2\varphi\leq\arg\left(\mu+\lambda^2\right)\leq 0$. Отсюда $0\leq\arg\left(\mu+\lambda^2\right)^{-1}\leq$ $\leq 2\varphi$. Следовательно, $-2\varphi\leq\arg\left(\dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(\mu+\lambda^2\right)^{-1}\right)\leq 2\varphi$. Итак, для $|\arg\lambda|\leq\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ и $\gamma^2\leq\mu<\infty$ имеем

$$\left|\arg\left(\frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(\mu+\lambda^2\right)^{-1}\right)\right|\leq 2\varphi<\pi. \tag{2.10}$$

Если бы (2.9) не имело место, то существовали бы последовательности μ_n и λ_n такие, что $\gamma^2\leq\mu_n<\infty$, $|\arg\lambda_n|\leq\varphi$ и $\dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda_n^2\left(\mu_n+\lambda_n^2\right)^{-1}+1\to 0$ или $\dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda_n^2\left(\mu_n+\lambda_n^2\right)^{-1}\to -1$, а это противоречит (2.10). Следовательно, имеет место (2.9). Отсюда следует, что функция $f(\mu)$ является ограниченной на $\left[\gamma^2, +\infty\right)$, равномерно по λ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда согласно замечанию, приведенному в начале доказательства, существует такое $C > 0$, что

$$\left\| \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} \right]^{-1} \right\|_{B(H)} \le \sup_{\gamma^2 \le \mu < \infty} \left| 1 + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(\mu + \lambda^2\right)^{-1} \right|^{-1} \le C \tag{2.11}$$

равномерно по λ, $|\arg\lambda| \le \varphi < \frac{\pi}{2}$. Отметим, что $\operatorname{esssup} = \sup$, так как $f(\mu)$ — непрерывная функция. Итак, утверждение, сформулированное после (2.8), доказано.

Заметим, что в силу замечания, приведенного в начале доказательства, для λ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\left\| \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} \right\|_{B(H)} \le \frac{C_\varphi}{1 + |\lambda|^2}, \tag{2.12}$$

а также

$$\left\| \left(A + \lambda^2 I\right)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{B(H)} \le \frac{C_\varphi}{1 + |\lambda|}. \tag{2.13}$$

Теперь докажем оценку (2.7). Согласно представлению оператора $A(\lambda)^{-1}$ (2.8), для этого достаточно показать, что:

a) оператор $\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1/2}$ для λ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ ограниченно действует из H_1 в H_0 и справедлива оценка

$$\left\| \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1/2} \right\|_{B(H_1, H_0)} \le C, \tag{2.14}$$

где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от λ;

b) оператор $\lambda\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1}$ для λ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ ограниченно действует из H_1 в H_0 и имеет место оценка

$$\left\| \lambda\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} \right\|_{B(H_1, H_0)} \le C, \tag{2.15}$$

где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от λ;

c) оператор $\left(I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} \right)^{-1}$ для λ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ ограниченно действует из H_0 в H_0 и справедлива оценка

$$\left\| \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} \right]^{-1} \right\|_{B(H_0)} \le C, \tag{2.16}$$

где $C > 0$ — некоторая константа, не зависящая от λ.

Утверждение a) доказано в [16]. Докажем утверждение b). Представим оператор $\lambda\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1}$ в виде

$$\lambda\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} = \lambda\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1/2} \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1/2}. \tag{2.17}$$

Из оценки (2.13) следует, что оператор $\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}$ для λ из угла $|\arg\lambda|\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ ограниченно действует из H в H и справедлива оценка

$$|\lambda|\left\|\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}\right\|_{B(H)}\le C,\quad C>0. \tag{2.18}$$

Очевидно, что этот оператор для λ из угла $|\arg\lambda|\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ ограниченно действует из $H(A)$ в $H(A)$ и имеет место оценка

$$\left\|\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}\right\|_{B(H(A))}\le C,\quad C>0. \tag{2.19}$$

Тогда, согласно интерполяционной теореме [14] (теорема 1.3.3(a)) (см. также [12], раздел 1.7.9), из оценок (2.18) и (2.19) следует, что для λ из угла $|\arg\lambda|\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ оператор $\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}$ ограниченно действует из $(H(A),H)_{\theta,p}$ в $(H(A),H)_{\theta,p}$ при любом $\theta\in(0,1)$ и, в частности, при $\theta=\dfrac{1}{2p}$ имеет место оценка

$$\left\|\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}\right\|_{B(H_0)}\le$$

$$\le\left\|\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}\right\|_{B(H(A))}^{1-\frac{1}{2p}}\left\|\lambda\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2}\right\|_{B(H)}^{\frac{1}{2p}}\le C. \tag{2.20}$$

Тогда в силу оценок (2.14) и (2.20) из представления (2.17) следует, что для λ из угла $|\arg\lambda|\le$ $\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ справедлива оценка (2.15). Это доказывает утверждение b). Аналогично доказывается утверждение c). Действительно, согласно интерполяционной теореме [14] (теорема 1.3.3/(a)), из оценки (2.11) следует, что для λ из угла $|\arg\lambda|\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ оператор $\left[I+\dfrac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1}$ ограниченно действует из $(H(A),H)_{\theta,p}$ в $(H(A),H)_{\theta,p}$ при любом $\theta\in(0,1)$ и имеет место оценка

$$\left\|\left[I+\frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2\left(A+\lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1}\right\|_{B\left((H(A),H)_{\theta,p}\right)}\le C, \tag{2.21}$$

где $C>0$ — некоторая константа, не зависящая от λ.

Возьмем в (2.21) $\theta=\dfrac{1}{2p}$. Тогда получим (2.16), т. е. утверждение c) доказано. Из оценок (2.14)–(2.16) следует, что для λ из угла $|\arg\lambda|\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ оператор $A(\lambda)^{-1}$ ограниченно действует из $\mathbb{H}$ в $H_0\dot{+}H_0$ и имеет место оценка (2.7). Тогда из уравнения (2.6) имеем

$$\left(I+A(\lambda)^{-1}R(\lambda)\right)\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}=A(\lambda)^{-1}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Используя лемму 5.4.2/6 [12] и интерполяционную теорему [14] (теорема 1.3.3/(a)), можно показать, что все операторы, фигурирующие в оператор-матрице $A(\lambda)^{-1}R(\lambda)$, при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda|\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ ограниченно действуют из H_0 в H_0 и для этих λ операторная норма меньше единицы, т. е.

$$\left\| A(\lambda)^{-1} R(\lambda) \right\|_{B\left(H_0 \dot{+} H_0\right)} < 1. \tag{2.23}$$

Отсюда по тождеству Неймана для $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ и $|\lambda| \to \infty$ получаем

$$\left(I + A(\lambda)^{-1} R(\lambda)\right)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-A(\lambda)^{-1} R(\lambda)\right)^{k}, \tag{2.24}$$

где ряд в правой части сходится по норме пространства ограниченных операторов в $H_0 \dot{+} H_0$.

Тогда из (2.22) при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ имеем

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \left(I + A(\lambda)^{-1} R(\lambda)\right)^{-1} A(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, используя представления $A(\lambda)^{-1}$, $R(\lambda)$ и (2.24), для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ элементы g_1 и g_2 можно представить в виде

$$g_k = \left(C_{k1}(\lambda) + R_{k1}(\lambda)\right) f_1 + \left(C_{k2}(\lambda) + R_{k2}(\lambda)\right) f_2, \quad k = 1, 2, \tag{2.25}$$

где

$$C_{11}(\lambda) = -\frac{1}{\alpha}\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1/2} \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1},$$

$$C_{12}(\lambda) = \frac{1}{\alpha\beta}\lambda \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1},$$

$$C_{21}(\lambda) = \frac{1}{\alpha\beta}\lambda \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1} \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1},$$

$$C_{22}(\lambda) = \frac{1}{\beta}\left(A + \lambda^2 I\right)^{-1/2} \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A + \lambda^2 I\right)^{-1}\right]^{-1}$$

и $R_{kj}(\lambda)$ — некоторые ограниченные операторы, действующие из H_0 в H_0. Более того, из оценок (2.7) и (2.23) следует, что для $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ и $|\lambda| \to \infty$

$$\left\| R_{kj}(\lambda) \right\|_{B(H_0)} \le C e^{-\omega|\lambda|}, \quad C, \omega > 0. \tag{2.26}$$

Из представлений $A(\lambda)^{-1}$ и $R(\lambda)$ также следует, что при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ для операторов $R_{kj}(\lambda)$ имеем

$$\left\| R_{kj}(\lambda) \right\|_{B(H)} \le C e^{-\omega|\lambda|}, \quad C, \omega > 0. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.25) в (2.4), получаем

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \left\{ e^{-x\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} \left(C_{1k}(\lambda) + R_{1k}(\lambda)\right) + e^{-(1-x)\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} \left(C_{2k}(\lambda) + R_{2k}(\lambda)\right) \right\} f_k. \tag{2.28}$$

Далее, для того чтобы установить оценку (2.3), необходимо оценить, для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, некоторое конечное число интегралов в пространстве $L_p\left((0,1);H\right)$. В этих интегралах подынтегральные выражения являются функциями от $u\left(x\right)$, $u''\left(x\right)$, $Au\left(x\right)$, причем $u\left(x\right)$ определено равенством (2.28). При этом существенно используются теорема 5.4.2/1 [12], оценки (2.11)–(2.13), (2.21) при $\theta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p}$, (2.26) и (2.27).

Оценим один из этих интегралов, например интеграл

$$|\lambda|^2 \left(\int\limits_0^1 \left\| e^{-x\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} C_{11}\left(\lambda\right) f_1 \right\|_H^p dx \right)^{1/p}.$$

В силу теорему 5.4.2/1 [12] и оценок (2.11), (2.13) и (2.21) при $\theta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p}$ для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ имеем

$$|\lambda|^2 \left(\int\limits_0^1 \left\| e^{-x\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} C_{11}\left(\lambda\right) f_1 \right\|_H^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= |\lambda|^2 \left(\int\limits_0^1 \left\| e^{-x\left(A+\lambda^2 I\right)^{1/2}} \frac{1}{\alpha} \left(A+\lambda^2 I\right)^{-1/2} \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A+\lambda^2 I\right)^{-1} \right]^{-1} f_1 \right\|_H^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C \left(\left\| \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A+\lambda^2 I\right)^{-1} \right]^{-1} f_1 \right\|_{H_1} + \right.$$

$$\left. + |\lambda|^{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}\right)} \left\| \left[I + \frac{1}{\alpha\beta}\lambda^2 \left(A+\lambda^2 I\right)^{-1} \right]^{-1} f_1 \right\|_H \right) \leq$$

$$\leq C \left(\|f_1\|_{H_1} + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}} \|f_1\|_H \right).$$

3. Неоднородное уравнение. Рассмотрим теперь краевую задачу для неоднородного уравнения с параметром в сепарабельном гильбертовом пространстве H, т. е. задачу (1.1), (1.2).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.

Тогда оператор $\mathbb{L}\left(\lambda\right) : u \to \mathbb{L}\left(\lambda\right) u := \left(L\left(\lambda, D\right) u, L_1\left(\lambda\right) u,\ L_2\left(\lambda\right) u\right)$ *для достаточно больших* $|\lambda|$ *из угла* $|\arg\lambda| \leq \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ *является изоморфизмом из* $W_p^2\left((0,1);H\left(A\right),H\right)$ *в* $L_p\left((0,1);H\right) \dot{+} H_1 \dot{+} H_1$, $p \in (1,\infty)$ *и для этих* λ *справедлива следующая оценка для решения задачи* (1.1), (1.2):

$$|\lambda|^2 \|u\|_{L_p((0,1);H)} + \left\|u''\right\|_{L_p((0,1);H)} + \|Au\|_{L_p((0,1);H)} \leq$$

$$\leq C \left[|\lambda| \|f\|_{L_p((0,1);H)} + \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k\|_{H_1} + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}} \|f_k\|_H \right) \right]. \tag{3.1}$$

Доказательство. Инъективность отображения $\mathbb{L}(\lambda)$ следует из теоремы 2.1. Таким образом, достаточно показать, что $\mathbb{L}(\lambda)$ сюрьективно, т. е. для любого $f \in L_p((0,1);H)$ и любых $f_1, f_2 \in H_1$ существует решение задачи (1.1), (1.2), принадлежащее $W_p^2((0,1);H(A),H)$. Определим $\tilde{f}(x) := f(x)$, если $x \in (0,1)$, и $\tilde{f}(x) = 0$, если $x \notin (0,1)$. Решение задачи (1.1), (1.2) представляется в виде суммы $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, где $u_1(x)$ — сужение на $(0,1)$ решения $\tilde{u}_1(x)$ уравнения

$$L(\lambda, D)\,\tilde{u}_1(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty), \tag{3.2}$$

а $u_2(x)$ — решение задачи

$$L(\lambda, D)\,u_2(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad L_1(\lambda)\,u_2 = f_1 - L_1(\lambda)\,u_1, \quad L_2(\lambda)\,u_2 = f_2 - L_2(\lambda)\,u_1. \tag{3.3}$$

Доказано [12] (теорема 5.4.4), что сужение решения (3.2) u_1 принадлежит $W_p^2((0,1);H(A),$ $H)$ и для $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ справедлива оценка

$$|\lambda|^2\,\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + \|u_1\|_{W_p^2((0,1);H(A),H)} \le C\,\|f\|_{L_p((0,1);H)}. \tag{3.4}$$

В силу теоремы 1.7.7/1 [12] (см. также теорему 1.8.2 [14]) и неравенства (3.4) имеем

$$u_1^{(s)}(x_0) \in H_s \quad \forall x_0 \in [0,1], \quad s = 0,1.$$

Отсюда $L_1(\lambda)\,u_1 \in H_1,\ L_2(\lambda)\,u_1 \in H_1$, так как $H_0 \subset H_1$.

Таким образом, в силу теоремы 2.1 для достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ задача (3.3) имеет единственное решение $u_2(x)$, которое принадлежит $W_p^2((0,1);H(A),H)$. Более того, используя технику, имеющуюся в [12] (теорема 5.4.4), можно показать, что для решения задачи (3.3) при $|\arg\lambda| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $|\lambda| \to \infty$, имеет место оценка

$$\begin{gathered}
|\lambda|^2\,\|u_2\|_{L_p((0,1);H)} + \left\|u_2''\right\|_{L_p((0,1);H)} + \|Au_2\|_{L_p((0,1);H)} \le \\
\le C\left[|\lambda|\,\|f\|_{L_p((0,1);H)} + \sum_{k=1}^{2}\left(\|f_k\|_{H_1} + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\,\|f_k\|_H\right)\right].
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Далее, из (3.4) и (3.5) следует (3.1), так как $u = u_1 + u_2$.

Теорема 3.1 доказана.

4. Асимптотика собственных значений. В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим следующую краевую задачу для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda^2 u(x), \quad x \in (0,1), \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}
u'(0) - \lambda u(1) = 0, \\
u'(1) + \lambda u(0) = 0,
\end{gathered} \tag{4.2}$$

где λ — спектральный параметр, A — линейный, неограниченный, самосопряженный, положительно определенный оператор в H, A^{-1} вполне непрерывен в H.

Лемма. *Собственные значения краевой задачи* (4.1), (4.2) *вещественны.*

Доказательство. Собственные элементы оператора A, соответствующие собственным значениям $\mu_k \to +\infty$, обозначим через $\varphi_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$. Известно, что $\{\varphi_k\}$ образует полный ортонормированный базис в H. Тогда из разложения $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (u(x), \varphi_k)_H \varphi_k$ для коэффициентов Фурье $u_k(x) = (u(x), \varphi_k)_H$ получим спектральную задачу

$$-u_k''(x) + \mu_k u_k(x) = \lambda^2 u_k(x), \quad x \in (0,1), \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} u_k'(0) - \lambda u_k(1) = 0, \\ u_k'(1) + \lambda u_k(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Таким образом, изучение собственных значений краевой задачи (4.1), (4.2) сводится к изучению собственных значений краевой задачи (4.3), (4.4) для различных натуральных k. Спектр краевой задачи (4.1), (4.2) состоит из тех λ, при которых задача (4.3), (4.4) имеет нетривиальное решение $u_k(x)$ хотя бы при одном k. Число $\lambda = \pm\sqrt{\mu_k},\ \mu_k \neq 4$, не может быть собственным значением задачи (4.3), (4.4) для достаточно больших k (напомним, что $\mu \to +\infty$, поэтому $\mu_k \neq 4$), так как в данном случае эта задача имеет только тривиальное решение.

Пусть λ — собственное значение краевой задачи (4.3), (4.4) и $u_k(x,\lambda)$ — соответствующая собственная функция. Умножая обе части равенства (4.3) на функцию $\overline{u_k(x,\lambda)}$ и интегрируя полученное тождество по x от 0 до 1, получаем

$$-\int_0^1 u_k''(x,\lambda)\,\overline{u_k(x,\lambda)}dx + \mu_k \int_0^1 |u_k(x,\lambda)|^2 dx = \lambda^2 \int_0^1 |u_k(x,\lambda)|^2 dx. \tag{4.5}$$

Используя формулу интегрирования по частям и краевые условия (4.4), находим

$$\int_0^1 u_k''(x,\lambda)\,\overline{u_k(x,\lambda)}dx = \overline{u_k(x,\lambda)}u_k'(x,\lambda)\,|_0^1 - \int_0^1 u_k'(x,\lambda)\,\overline{u_k'(x,\lambda)}dx =$$

$$= \overline{u_k(1,\lambda)}u_k'(1,\lambda) - \overline{u_k(0,\lambda)}u_k'(0,\lambda) - \int_0^1 \left|u_k'(x,\lambda)\right|^2 dx =$$

$$= -\lambda\left[\overline{u_k(1,\lambda)}u_k(0,\lambda) + \overline{u_k(0,\lambda)}u_k(1,\lambda)\right] - \int_0^1 \left|u_k'(x,\lambda)\right|^2 dx =$$

$$= -\lambda\left[\overline{u_k(1,\lambda)\,\overline{u_k(0,\lambda)}} + \overline{u_k(0,\lambda)}u_k(1,\lambda)\right] - \int_0^1 \left|u_k'(x,\lambda)\right|^2 dx =$$

$$= -\lambda 2\,\mathrm{Re}\left[\overline{u_k(0,\lambda)}u_k(1,\lambda)\right] - \int_0^1 \left|u_k'(x,\lambda)\right|^2 dx\,.$$

Отсюда и из (4.5) следует, что

$$\lambda^2 \int_0^1 |u_k(x,\lambda)|^2 dx - \lambda 2\mathrm{Re}\left[\overline{u_k(0,\lambda)} u_k(1,\lambda)\right] -$$

$$-\mu_k \int_0^1 |u_k(x,\lambda)|^2 dx - \int_0^1 \left|u_k'(x,\lambda)\right|^2 dx = 0\,. \tag{4.6}$$

Обозначим

$$a_k(\lambda) = \int_0^1 |u_k(x,\lambda)|^2 dx, \quad b_k(\lambda) = -2\mathrm{Re}\left[\overline{u_k(0,\lambda)} u_k(1,\lambda)\right],$$

$$c_k(\lambda) = -\mu_k \int_0^1 |u_k(x,\lambda)|^2 dx - \int_0^1 \left|u_k'(x,\lambda)\right|^2 dx.$$

Тогда уравнение (4.6) можно представить в виде

$$a_k(\lambda)\lambda^2 + b_k(\lambda)\lambda + c_k(\lambda) = 0. \tag{4.7}$$

Поскольку $a_k(\lambda) > 0,\ c_k(\lambda) < 0$ при каждом k, то $b_k^2(\lambda) - 4a_k(\lambda)c_k(\lambda) > 0$.

Следовательно, уравнение (4.7) при каждом k имеет только вещественные корни.

Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть A — самосопряженный, положительно определенный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H и A^{-1} вполне непрерывен в H.*

Тогда краевая задача (4.1), (4.2) *имеет четыре серии собственных значений*[1]:

$$\lambda_k^{(1)} \sim \sqrt{\frac{\mu_k}{2}}, \quad \lambda_k^{(2)} \sim -\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}, \quad k \to \infty,$$

и

$$\lambda_n^{(3,k)} = \sqrt{\mu_k + \gamma_n}, \quad \lambda_n^{(4,k)} = -\sqrt{\mu_k + \delta_n},$$

где $\mu_k \to +\infty$ — собственные значения оператора A, $\gamma_n \sim 4n^2\pi^2$ и $\delta_n \sim 4n^2\pi^2$ при $n \to +\infty$.

Доказательство. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.3) имеет вид

$$u_k(x,\lambda) = c_1 e^{-x\sqrt{\mu_k-\lambda^2}} + c_2 e^{-(1-x)\sqrt{\mu_k-\lambda^2}}, \tag{4.8}$$

где $c_i,\ i = 1,2,$ — произвольные константы. Подставив (4.8) в (4.4), получим систему относительно $c_i,\ i = 1,2,$ определитель которой имеет вид

$$D(\lambda) = -\left(\sqrt{\mu_k - \lambda^2} + \lambda e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\mu_k - \lambda^2} e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}} - \lambda\right)^2.$$

Таким образом, собственные значения краевой задачи (4.3), (4.4), а следовательно, и краевой задачи (4.1), (4.2) — это нули следующего уравнения (относительно λ, $\lambda \neq \pm\sqrt{\mu_k}$) хотя бы при

[1] Под асимптотикой $\lambda_n \sim f(n),\ n \to \infty$, мы понимаем стандартное обозначение, т. е. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{f(n)} = 1$.

одном k:

$$\left(\sqrt{\mu_k-\lambda^2}+\lambda e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}}\right)^2-\left(\sqrt{\mu_k-\lambda^2}e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}}-\lambda\right)^2=0. \tag{4.9}$$

Запишем уравнение (4.9) в виде системы уравнений

$$e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}}\left(\lambda+\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)-\left(\lambda-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)=0, \tag{4.10}$$

$$e^{-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}}\left(\lambda-\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)+\left(\lambda+\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)=0. \tag{4.11}$$

Следовательно, собственные значения краевой задачи (4.3), (4.4), а значит, и краевой задачи (4.1), (4.2) состоят из тех вещественных $\lambda\neq\pm\sqrt{\mu_k}$, которые хотя бы при одном k удовлетворяют, по крайней мере, одному из уравнений (4.10) или (4.11).

Запишем систему (4.10), (4.11) в виде

$$\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)-\lambda\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)=0, \tag{4.12}$$

$$\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)+\lambda\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)=0. \tag{4.13}$$

Исследуем уравнение (4.12). В работе [11] при исследовании собственных значений некоторых краевых задач, отличных от краевых задач (4.1), (4.2), получено трансцендентное уравнение

$$\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)+\lambda\operatorname{sh}\left(\sqrt{\mu_k-\lambda^2}\right)=0. \tag{4.14}$$

Аналогичными рассуждениями, приведенными в работе [11] для уравнения (4.14), исследуя уравнение (4.12), можно убедиться, что для собственных значений краевых задач (4.1), (4.2) имеют место асимптотические формулы

$$\lambda_k^{(1)}\sim\sqrt{\frac{\mu}{2}},\quad k\to\infty,\quad \lambda_n^{(3,k)}=\sqrt{\mu_k+\gamma_n},\quad \lambda_n^{(4,k)}=-\sqrt{\mu_k+\delta_n},$$

где $\gamma_n\sim 4n^2\pi^2$, $\delta_n\sim 4n^2\pi^2$, $n\to\infty$.

Исследуем теперь уравнение (4.13) тем же способом, которым исследовано уравнение (4.12). Найдем те собственные значения λ, для которых $\lambda^2<\mu_k$. Положим $\sqrt{\mu_k-\lambda^2}=y$ $\left(0<y\leq\sqrt{\mu_k}\right)$. Отсюда $\lambda=\pm\sqrt{\mu_k-y^2}$.

Сначала в уравнении (4.13) возьмем $\lambda=\sqrt{\mu_k-y^2}$. Тогда уравнение (4.13) примет вид

$$y\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)+\sqrt{\mu_k-y^2}\operatorname{ch}\left(\frac{y}{2}\right)=0,\quad 0<y\leq\sqrt{\mu_k}. \tag{4.15}$$

Рассмотрим функцию $\eta_k(y)=y\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)+\sqrt{\mu_k-y^2}\operatorname{ch}\left(\frac{y}{2}\right)$, $y\in\left(0,\sqrt{\mu_k}\right]$. Очевидно, что $\eta_k(y)>0$ при каждом фиксированном k и при всех $y\in\left(0,\sqrt{\mu_k}\right]$. Поэтому уравнение (4.15) для каждого k не имеет решений на интервале $\left(0,\sqrt{\mu_k}\right]$.

Теперь в уравнении (4.13) возьмем $\lambda=-\sqrt{\mu_k-y^2}$. Тогда уравнение (4.13) примет вид

$$y\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)-\sqrt{\mu_k-y^2}\operatorname{ch}\left(\frac{y}{2}\right)=0,\quad 0<y\leq\sqrt{\mu_k}\,. \tag{4.16}$$

Уравнение (4.16) эквивалентно уравнению

$$y\,\mathrm{th}\left(\frac{y}{2}\right)-\sqrt{\mu_k-y^2},\quad y\in(0,\sqrt{\mu_k}]\,. \tag{4.17}$$

Рассмотрим функцию $\psi_k\left(y\right)=y\,\mathrm{th}\left(\dfrac{y}{2}\right)-\sqrt{\mu_k-y^2}=0,\ y\in\left(0,\sqrt{\mu_k}\right]$.

Производная $\psi_k'\left(y\right)=\dfrac{\mathrm{sh}(y)+y}{2\,\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{y}{2}\right)}+\dfrac{y}{\sqrt{\mu_k-y^2}}>0$. Значит, $\psi_k\left(y\right)$ строго монотонно возрастает на $\left(0,\sqrt{\mu_k}\right]$ при каждом k. Очевидно, что

$$\psi_k\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}\right)=\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}\left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_k}{2}}\right)-1\right)<0$$

для любого k. С другой стороны, легко можно показать, что

$$\psi_k\left(\sqrt{\frac{\mu_k}{2}+\frac{1}{\mu_k}}\right)=\sqrt{\frac{\mu_k}{2}+\frac{1}{\mu_k}}\left(\left(1-\frac{2}{e^{\sqrt{\frac{\mu_k}{2}+\frac{1}{\mu_k}}}+1}\right)-\sqrt{1-\frac{4}{\mu_k^2+2}}\right)>0,$$

начиная с некоторого k. Поэтому заключаем, что в интервале $\left(\sqrt{\dfrac{\mu_k}{2}},\sqrt{\dfrac{\mu_k}{2}+\dfrac{1}{\mu_k}}\right)$ уравнение (4.17), начиная с некоторого k, имеет точно один нуль y_k, т. е. $y_k\sim\sqrt{\dfrac{\mu_k}{2}}$. Отсюда и из равенства $\lambda=-\sqrt{\mu_k-y^2}$ для собственных значений краевой задачи (4.3), (4.4), удовлетворяющих условию $\lambda^2<\mu_k$, получаем асимптотическую формулу

$$\lambda_k^{(2)}\sim-\sqrt{\frac{\mu_k}{2}},\quad k\to\infty.$$

Исследуем теперь уравнение (4.13) в случае, когда $\lambda^2>\mu_k$. Положим $z=\sqrt{\lambda^2-\mu_k},\ 0<$ $<z<\infty$. Если учесть эту замену в уравнении (4.13) и вместо λ использовать $\lambda=\sqrt{z^2+\mu_k}$, то уравнение (4.13) примет вид

$$\sqrt{z^2+\mu_k}\cos\frac{z}{2}-z\sin\frac{z}{2}=0,\quad z\in(0,+\infty)\,. \tag{4.18}$$

Пусть $z\neq(2n+1)\,\pi,\ n=0,1,2,\ldots$. Тогда уравнение (4.18) эквивалентно уравнению

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+\mu_k}}\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2}-1=0,\quad z\in(0,+\infty)\,,\quad z\neq(2n+1)\,\pi,\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{4.19}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_k\left(z\right)=\frac{z}{\sqrt{z^2+\mu_k}}\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2}-1,\quad z\in(0,+\infty)\,,\quad z\neq(2n+1)\,\pi,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Поскольку в каждом интервале $\left((2n-1)\,\pi,\ (2n+1)\,\pi\right),\ n=1,2,\ldots$, функция $\Phi_k\left(z\right)$ пробегает от $-\infty$ до $+\infty$, а ее производная

$$\Phi_k'\left(z\right)=\frac{\mu_k\left(\sin z+z\right)+z^3}{2\left(z^2+\mu_k\right)^{3/2}\cos^2\dfrac{z}{2}}>0,$$

то в нем при каждом k функция $\Phi_k(z)$ имеет только один нуль $z_n^{(k)}$:

$$(2n-1)\pi < z_n^{(k)} < (2n+1)\pi.$$

Найдем асимптотические формулы для $z_n^{(k)}$ при каждом k, когда $n \to \infty$.

Из (4.19) имеем

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{\sqrt{z^2+\mu_k}}{z}, \quad z \in (0,+\infty), \quad z \neq (2n+1)\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Рассмотрим функцию $q_k(z) = \dfrac{\sqrt{z^2+\mu_k}}{z}$, $z \in (0,+\infty)$. Легко можно показать, что при каждом k $q_k(z)$ — положительная, убывающая, строго выпуклая вниз функция. Кроме того, прямая $z = 1$ является горизонтальной асимптотой функции $q_k(z)$ при каждом k и $\lim_{z\to 0_+} q_k(z) = +\infty$. С другой стороны, точки $z_n^{(k)}$ при каждом k являются абсциссами точек пересечения функции $q_k(z)$ и ветвей функции $\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}$, $z > 0$. При увеличении n точки $z_n^{(k)}$ будут приближаться к абсциссе точки пересечения ветвей функции $\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}$ с прямой $z = 1$, т. е. $z_n^{(k)}$ — приблизительное решение уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{z}{2} = 1$ на интервале $(2(n-1)\pi, 2(n+1)\pi)$. Итак, для каждого k

$$z_n^{(k)} \sim 2\operatorname{arctg}1 + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

Поскольку $\lambda = \sqrt{z^2+\mu_k}$, то полученная серия собственных значений краевой задачи (4.3), (4.4) имеет такую же асимптотику, как $\lambda_n^{(3,k)}$.

Теперь в уравнении (4.13) возьмем $\lambda = -\sqrt{z^2+\mu_k}$. Тогда уравнение (4.13) примет вид

$$\sqrt{z^2+\mu_k}\cos\frac{z}{2} + z\sin\frac{z}{2} = 0, \quad z \in (0,+\infty). \tag{4.20}$$

Аналогично уравнению (4.18), исследуя уравнение (4.20), можно получить что последняя серия собственных значений краевой задачи (4.3), (4.4) асимптотически совпадает с $\lambda_n^{(4,k)}$ при каждом k.

Теорема 4.1 доказана.

Пример. Рассмотрим в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ задачу на собственные значения

$$-\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 v(x,y)}{\partial y^4} + \omega v(x,y) = \lambda^2 v(x,y), \tag{4.21}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial v(0,y)}{\partial x} - \lambda v(1,y) = 0, \\ \frac{\partial v(1,y)}{\partial x} + \lambda v(0,y) = 0, \end{gathered} \tag{4.22}$$

$$v_y^{(j)}(x,0) = v_y^{(j)}(x,1), \quad j = 0,1,2,3, \tag{4.23}$$

где $\omega > 0$ — некоторое число.

Запишем задачу (4.21) – (4.23) в операторной форме

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda^2 u(x), \quad x \in (0,1),$$
$$u'(0) - \lambda u(1) = 0,$$
$$u'(1) + \lambda u(0) = 0,$$

где $u(x) = v(x, \cdot)$ — вектор-функция со значениями в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1)$, оператор A определен следующим образом:

$$D(A) = W_2^4((0,1)), \quad u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1), \quad j = 0,1,2,3, \quad Au = \frac{d^4u}{dy^4} + \omega u. \tag{4.24}$$

Очевидно, что оператор A, определенный формулой (4.24), самосопряженный и при достаточно больших $\omega > 0$ положительно определенный, а A^{-1} вполне непрерывен в $L_2(0,1)$, так как вложение $D(A) \subset L_2(0,1)$ является компактным. Простые вычисления показывают, что собственные значения оператора A имеют вид $\mu_k(A) = 16k^4\pi^4 + \omega$, $k = 0,1,2,\ldots$. Тогда в силу теоремы 4.1 для собственных значений краевой задачи (4.21) – (4.23) имеют место асимптотические формулы

$$\lambda_k^{(1)} \sim 2\sqrt{2}k^2\pi^2, \quad \lambda_k^{(2)} \sim -2\sqrt{2}k^2\pi^2, \quad k \to +\infty,$$
$$\lambda_n^{(3,k)} = \sqrt{16k^4\pi^4 + \gamma_n}, \quad \lambda_n^{(4,k)} = -\sqrt{16k^4\pi^4 + \delta_n}, \quad k \to +\infty,$$

где $\gamma_n \sim 4n^2\pi^2$, $\delta_n \sim 4n^2\pi^2$ при $n \to \infty$. Используя, например, [17] (см. также [18]), можно записать последние две формулы как асимптотические формулы относительно одного индекса вместо двух:

$$\lambda_m^{(3)} \sim \left(\frac{4\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3} m^{2/3}, \quad \lambda_m^{(4)} \sim -\left(\frac{4\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3} m^{2/3}, \quad m \to +\infty,$$

где $\gamma = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{3/2}\, dt$.

Литература

1. *Горбачук В. И., Рыбак М. А.* О граничных задачах для уравнения Штурма – Лиувилля со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Прямые и обратные задачи теории рассеяния. – Киев, 1981. – С. 3 – 16.
2. *Рыбак М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 248 – 252.
3. *Олейник Л. А.* Неоднородные граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений. – Киев, 1986. – С. 25 – 28.
4. *Denche M.* Abstract differential equation with a spectral parameter in the boundary conditions // Res. Math. – 1999. – **35**. – P. 216 – 227.
5. *Aliev B. A.* Asymptotic behavior of eigenvalues of a boundary value problem with spectral parameter in the boundary conditions for the second order elliptic differential-operator equation // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerbaijan. Ser. Phys.-Tech. and Math. Sci. – 2005. – **25**, № 7. – P. 3 – 8.

6. *Алиев Б. А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 8. – С. 1146 – 1152.
7. *Алиев Б. А.* Разрешимость краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 3 – 14.
8. *Aliev B. A., Yakubov Ya.* Elliptic differential-operator problems with a spectral parameter in both the equation and boundary-operator conditions // Adv. Different. Equat. – 2006. – **11**, № 10. – P. 1081 – 1110. (Erratum. – 2007. – **12**, № 9. – P. 1079).
9. *Байрамоглы М., Асланова Н. М.* Распределение собственных значений и формула следа операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 7. – С. 867 – 877.
10. *Aibeche A., Favini A., Mezoued Ch.* Deficient coerciveness estimate for an abstract differential equation with a parameter dependent boundary conditions // Boll. Unione mat. ital. Ser. B. – 2007. – **10(8)**, № 3. – P. 535 – 547.
11. *Aliev B. A., Kurbanova N. K., Yakubov Ya.* Solvability of the abstract Regge boundary value problem and asymptotic behavior of eigenvalues of one abstract spectral problem // Riv. mat. Univ. Parma. – 2015. – **6**. – P. 241 – 265.
12. *Yakubov S., Yakubov Ya.* Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations. – Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2000. – 541 p.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
14. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
15. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М.: Мир, 1965. – 570 с.
16. *Aliev B. A., Yakubov Ya.* Second order elliptic differential operator equations with unbounded operator boundary conditions in UMD Banach spaces // Inteqral Equat. and Oper. Theory. – 2011. – **69**. – P. 269 – 300.
17. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма – Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 291 – 305.
18. *Мамедов К. С.* Асимптотика функции распределения собственных чисел абстрактного дифференциального оператора // Мат. заметки. – 1982. – **31**, № 1. – С. 41 – 51.

Получено 10.05.16