УДК 515.14

Ю. Ю. Сорока (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГРУПИ ГОМЕОТОПІЙ НЕСИНГУЛЯРНИХ ШАРУВАНЬ ПЛОЩИНИ

We consider a special class of nonsingular oriented foliations F on noncompact surfaces Σ whose spaces of leaves have the structure similar to the structure of rooted trees of finite diameter. Let $H^+(F)$ be the group of all homeomorphisms of Σ mapping the leaves onto leaves and preserving their orientations. Also let K be the group of homeomorphisms of the quotient space Σ/F induced by $H^+(F)$. By $H_0^+(F)$ and K_0 we denote the corresponding subgroups formed by the homeomorphisms isotopic to identity mappings. Our main result establishes the isomorphism between the homeotopy groups $\pi_0 H^+(F) = H^+(F)/H_0^+(F)$ and $\pi_0 K = K/K_0$.

Рассматривается специальный класс несингулярных ориентированных слоений F на некомпактных поверхностях Σ, пространство слоев Σ/F которых имеет структуру, подобную „корневому дереву" конечного диаметра. Пусть $H^+(F)$ — группа гомеоморфизмов Σ, которые переводят слой в слой с сохранением ориентации, и K — группа гомеоморфизмов фактор-пространства Σ/F, индуцированных $H^+(F)$. Обозначим через $H_0^+(F)$ и K_0 соответствующие подгруппы, состоящие из гомеоморфизмов, изотопных тождественным отображениям. Основные результаты работы устанавливают изоморфизм между группами гомеотопий $\pi_0 H^+(F) = H^+(F)/H_0^+(F)$ и $\pi_0 K = K/K_0$.

1. Вступ. Вивчення властивостей шарувань на поверхнях тісно пов'язане з питаннями топологічної класифікації різних функцій на поверхнях, які досліджувалися у працях [1 – 9]. Шари шарування поверхні можуть розглядатися як лінії рівня деякої функції. Дослідженням властивостей несингулярних шарувань на площині в 40 – 50-х роках XX ст. присвячено роботи [10 – 12]. У роботі [10] розглянуто властивості сім'ї кривих, що задані на площині і задовольняють умову регулярності в деякому відкритому околі площини, та показано, що такі шарування є лініями рівня деякої функції на $\mathbb{R}^2$. Ці результати пізніше були розширені для сингулярних шарувань у роботах [13, 14].

Також у [10, 11] встановлено, що несингулярні шарування площини можна подати у вигляді некомпактної поверхні, склеєної з не більш ніж зліченного числа смуг уздовж відкритих інтервалів. Шарування на кожній смузі складається із горизонтальних прямих та компонент межі. Дослідженню властивостей несингулярних шарувань на довільних некомпактних поверхнях, склеєних із відкритих смуг подібним чином, присвячено роботи [15, 16].

Гомотопічні властивості несингулярних шарувань площини, графи яких є кореневими деревами скінченного діаметра, були розглянуті в [17], де було обчислено алгебраїчну структуру груп гомеотопій канонічних шарувань поверхонь з цього класу. В даній роботі встановлюється зв'язок між цими групами та групами гомеотопій відповідних просторів шарів (див. теорему 2).

2. Смугасті поверхні та несингулярні шарування на них. Нехай Σ_i — поверхні з шаруванням F_i, $i = 1, 2$. Тоді гомеоморфізм $h \colon \Sigma_1 \to \Sigma_2$ називатимемо *пошаровим*, якщо він відображає шари шарування F_1 у шари шарування F_2.

Означення 1. *Модельною смугою назвемо відкриту підмножину* $S \subset \mathbb{R} \times [0; 1]$, *яка задовольняє такі умови*:

1) $\mathbb{R} \times (0; 1) \subseteq S$;

2) $S \cap \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ *є незв'язним об'єднанням інтервалів, замикання яких в* $\mathbb{R} \times [0; 1]$ *попарно не перетинаються і утворюють локально скінченну множину.*

Позначимо $\partial S = S \cap \mathbb{R} \times \{0;1\}$, $\partial_- S = S \cap \mathbb{R} \times \{0\}$, $\partial_+ S = S \cap \mathbb{R} \times \{1\}$.

Зауважимо, що кожна модельна смуга має канонічне орієнтовне шарування на горизонтальні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (0;1)$, та компоненти зв'язності межі ∂S.

Будемо використовувати такі позначення:

$$[0] = \varnothing, \quad [n] = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad -\mathbb{N} = \{-1, -2, \ldots\}.$$

Нехай також $J_i = (2i+1, 2i)$, $i \in \mathbb{Z}$, і для підмножини $\Delta \subset \mathbb{Z}$ позначимо

$$A_\Delta = \bigcup_{i \in \Delta} J_i.$$

Зокрема, розглянемо такі диз'юнктні об'єднання відкритих інтервалів:

$$A_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} (2i+1, 2i), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad A_{\mathbb{N}} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (2i+1, 2i),$$

$$A_{-\mathbb{N}} = \bigcup_{-i \in \mathbb{N}} (2i+1, 2i), \quad A_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (2i+1, 2i),$$

які називатимемо *стандартними*.

Означення 2. *Модельну смугу $S \subset \mathbb{R} \times [0;1]$ назвемо стандартною, якщо $\partial_- S$ і $\partial_+ S$ є стандартними об'єднаннями інтервалів.*

Легко показати справедливість наступної леми.

Лема 1. *Нехай S — модельна смуга. Тоді існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, який залишає інваріантною кожну пряму $\mathbb{R} \times t$, $t \in (0,1)$, зберігає її орієнтацію і такий, що $h(S)$ є стандартною модельною смугою з $\partial_- h(S) = A_\alpha \times \{0\}$ і $\partial_+ h(S) = A_\beta \times \{1\}$, де A_α і A_β — стандартні об'єднання інтервалів, тобто $\alpha, \beta \in \{[0], [1], \ldots, \mathbb{N}, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$. Крім того, α і β не залежать від вибору h.*

Приклад. Згідно з означенням 1, модельною смугою є смуга S з межею $\partial_- S = \varnothing$, $\partial_+ S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n; 2n+1) \times \{1\}$.

Водночас для S з межею $\partial_- S = \varnothing$, $\partial_+ S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \diagup \{0,-1\}} \left(\dfrac{1}{n+1}; \dfrac{1}{n} \right) \times \{1\}$ не виконується умова 2 означення 1.

Смугаста поверхня. Нехай Σ — некомпактна поверхня. Припустимо, що існує сім'я модельних смуг $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ і сюр'єктивне відображення $p \colon \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \to \Sigma$ з такими властивостями:

1) обмеження p на модельну смугу $p_\lambda = p|_{S_\lambda} : S_\lambda \to \Sigma$ є пошаровим вкладенням;

2) образи внутрішностей модельних смуг не перетинаються, тобто $p(\operatorname{Int}(S_\lambda)) \cap \cap p(\operatorname{Int}(S_\mu)) = \varnothing$, $\lambda, \mu \in \Lambda$;

3) для кожного шару $\omega \in \partial_- S_\lambda$ виконується одна з таких умов:

a) $p^{-1} \circ p(\omega) = \omega$;

b) $p^{-1} \circ p(\omega) = \omega \cup \gamma$, де γ — інтервал межі $\partial_+ S_\mu$ деякої модельної смуги S_μ і $\varphi := p_\mu^{-1} \circ p_\lambda$, $\varphi \colon \omega \to \gamma$ — афінний гомеоморфізм, що зберігає орієнтацію.

Тоді Σ називатимемо *смугастою поверхнею*, відображення $p \colon \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \to \Sigma$ — *атласом* смугастої поверхні, а обмеження $p_\lambda \colon S_\lambda \to \Sigma$ — *картою* для смуги S_λ.

Зауваження. В означенні смугастої поверхні єдиний зберігаючий орієнтацію афінний гомеоморфізм $\varphi\colon (a,b) \to (c,d)$ визначається формулою $\varphi(t) = \dfrac{c-d}{b-a}(t-a)+a,\ t \in (a,b)$. Зокрема, для ототожнення інтервалів стандартних модельних смуг використовується афінний гомеоморфізм $\varphi\colon J_j \longrightarrow J_i$, заданий формулою

$$\varphi(t) = t + 2i - 2j.$$

Нагадаємо, що кожна модельна смуга має канонічне орієнтовне шарування. Оскільки гомеоморфізми φ ототожнюють шари таких шарувань, то кожна смугаста поверхня також несе на собі орієнтовне шарування F, що складається з шарів шарувань на модельних смугах. Називатимемо його *канонічним*.

3. Граф смугастої поверхні. Нехай Σ — смугаста поверхня з атласом $\left(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda, p\right)$, а F — канонічне шарування на Σ. Позначимо через $G = \Sigma\diagup F$ простір шарів і нехай $\pi\colon \Sigma \to G$ — фактор-відображення (рис. 1).

Рис. 1. Смугаста поверхня Σ та граф G.

Топологія на $G(F)$. Наділимо G фактор-топологією, тобто множину U в G вважатимемо відкритою тоді і тільки тоді, коли її прообраз $\pi^{-1}(U)$ є відкритим в Σ. В загальному випадку G є неґаусдорфовим топологічним простором. Множину $e_\lambda = p_\lambda(\mathrm{Int}\,(S_\lambda))$ називатимемо ребром. Очевидно, що e_λ є відкритою в G і гомеоморфною відкритому інтервалу. Таким чином, G можна розглядати як „неґаусдорфовий" граф, у якого „розщеплені" вершини. Ці вершини відповідають граничним інтервалам модельних смуг. Далі простір шарів G називатимемо *графом смугастої поверхні*.

Властивості графа смугастої поверхні. Нехай V — множина вершин графа і $E = \{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ — множина ребер графа G. Покладемо $\partial_+ e_\lambda = \pi(\partial_+ S_\lambda)$ і $\partial_- e_\lambda = \pi(\partial_- S_\lambda)$. Введемо орієнтацію на графі G, зорієнтувавши кожне ребро від $\partial_- e_\lambda$ до $\partial_+ e_\lambda$. Також для кожного ребра e_λ зафіксуємо зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм

$$\psi_\lambda\colon (0;1) \to e_\lambda.$$

Зауважимо, що лінійний порядок на інтервалах з $\partial_+ S_\lambda$ ($\partial_- S_\lambda$) визначає і лінійний порядок вершин в образі $\partial_+ e_\lambda$ ($\partial_- e_\lambda$).

Точку $x \in G$ називатимемо *спеціальною*, якщо $\{x\} \neq \cap \overline{V}$, де V пробігає базу відкритих околів точки x. Очевидно, що G є ґаусдорфовим тоді і лише тоді, коли G не має спеціальних точок. Якщо $x \in e$, то x є неспеціальною вершиною. З леми 3.2 [15] випливає, що вершина v є *неспеціальною* тоді і лише тоді, коли $v = \partial_- e_\nu = \partial_+ e_\mu$, $\nu, \mu \in \Lambda$.

Припустимо, що вершина v є неспеціальною, тобто $v = p_\nu(\partial_- S_\nu) = p_\mu(\partial_+ S_\mu)$. Позначимо $p(S_\nu) \cup p(S_\mu)$ через S. Тоді, згідно з [15], існує пошаровий гомеоморфізм $\widehat{p}_\nu\colon S_\nu \to S$, для якого виконуються умови $\widehat{p}_\nu|_{\partial_+ e_\nu} = p_\nu$, $\widehat{p}_\lambda|_{\partial_- e_\lambda} = p_\mu$. У такому випадку для всієї смугастої поверхні Σ з атласом $\left(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda, p\right)$ можна побудувати новий атлас, в якому з $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ вилучено модельну смугу S_μ і p_ν та p_μ замінено на $\widehat{p}_\nu$.

Атлас $p\colon \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \to \Sigma$ смугастої поверхні називатимемо *редукованим*, якщо виконано таку умову: кожна вершина $v \in G$ або є спеціальною, або належить образу $p(\partial\Sigma)$.

З леми 3.3 [15] випливає справедливість такої леми.

Лема 2. *На кожній смугастій поверхні існує редукований атлас.*

Якщо атлас смугастої поверхні є редукованим, то таку поверхню називатимемо *редукованою*.

4. Клас смугастих поверхонь $\mathfrak{F}$.

Означення 3. *Скажемо, що редукована смугаста поверхня Σ належить класу $\mathfrak{F}$, якщо для графа G виконуються такі умови*:

1) *$\partial_- e_\lambda$ складається лише з однієї точки*;

2) *якщо v є спільною вершиною ребер e_ν і e_μ, то $v = \partial_+ e_\nu \cap \partial_- e_\mu$ або $v = \partial_+ e_\mu \cap \partial_- e_\nu$*;

3) *G — зв'язний граф, що не містить циклів та має скінченний діаметр.*

Нехай $\Sigma \in \mathfrak{F}$. Тоді кожну поверхню Σ, граф якої має скінченний діаметр, можна зобразити у вигляді

$$\Sigma \;=\; S \bigcup_{\partial_+ S} \Big(\bigcup_{i\in\Delta} \Sigma_i \Big), \tag{1}$$

де S — стандартна модельна смуга з межею $\partial_- S = (0;1) \times \{0\}$ та $\partial_+ S = \bigcup_{i\in\Delta} J_i \times \{1\}$, $\Delta \in \{[0], [1], \ldots, \mathbb{N}, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$. Кожна Σ_λ є або порожньою, або смугастою поверхнею класу $\mathfrak{F}$, яка приклеюється до $\partial_+ S$ лише за допомогою однієї компоненти межі.

Згідно з лемою 1, кожна стандартна модельна смуга S належить одному з чотирьох типів, зображених на рис. 2.

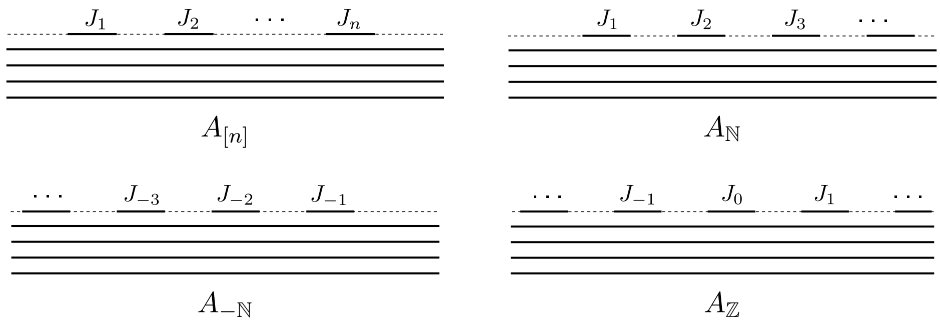

Рис. 2. Типи модельних смуг.

Очевидно, що кожна $\Sigma \in \mathfrak{F}$ є зв'язною і однозв'язною некомпактною поверхнею, а тому її внутрішність гомеоморфна $\mathbb{R}^2$ [18] (рис. 3).

Клас $\mathfrak{F}$ був уведений в роботі [17]. Зокрема, в [17] обчислено алгебраїчну структуру груп гомеотопій канонічних шарувань поверхонь із цього класу. В даній роботі встановлюється зв'язок між цими групами та групами гомеотопій відповідних просторів шарів (див. теорему 2).

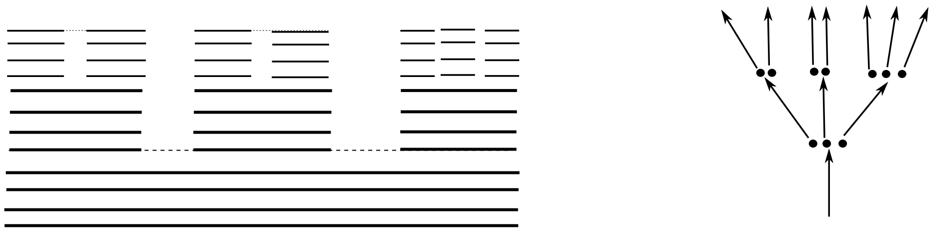

Рис. 3. Смугаста поверхня Σ класу $\mathfrak{F}$ та її граф G.

Групи гомеотопій несингулярних шарувань на поверхнях класу $\mathfrak{F}$. Позначимо через $H^+(F)$ групу всіх гомеоморфізмів $h\colon \Sigma \to \Sigma$, що задовольняють такі умови:

1) для довільного шару $\omega \in F$ його образ $h(\omega)$ є також шаром F і при цьому обмеження $h|_\omega : \omega \to h(\omega)$ зберігає орієнтацію;

2) $h(\partial_- S) = \partial_- S$ і $h(\partial_+ S) = \partial_+ S$.

Нехай також

$$\pi_0 H^+(F) = H^+(F) \diagup H_0^+(F)$$

— група гомеотопій шарування F, де $H_0^+(F)$ – підмножина $H^+(F)$, що складається з гомеоморфізмів, які ізотопні тотожному в $H^+(F)$.

Клас груп гомеотопій шарувань смугастих поверхонь із класу $\mathfrak{F}$ позначимо через

$$\mathcal{G} = \{\pi_0 H^+(F) \mid F \text{ — канонічне шарування на } \Sigma \in \mathfrak{F}\}.$$

Теорема 1 [17]. *Клас $\mathcal{G}$ міститься в $\mathcal{Z}$, де $\mathcal{Z}$ — мінімальний клас груп, що мають такі властивості*:

1) $\{1\} \in \mathcal{Z}$;

2) *якщо* $A_i \in \mathcal{Z}, i \in \mathbb{Z}$, *то* $\prod_{i=-\infty}^{\infty} A_i \in \mathcal{Z}$;

3) *якщо* $A \in \mathcal{Z}$, *то вінцевий добуток* $A \wr \mathbb{Z} \in \mathcal{Z}$.

5. Групи гомеотопій графів. Нехай X, Y — топологічні простори. Нагадаємо, що неперервне відображення $f : X \to Y$ називається *факторним*, якщо:

1) f є сюр'єктивним;

2) множина в Y буде відкритою тоді і тільки тоді, коли її повний прообраз є відкритим.

Для зручності наведемо твердження з [19] (гл. 1, § 2, п. 3).

Лема 3. *Нехай $f\colon X \to Y$ — факторне відображення і $\phi\colon X \to X$ — таке неперервне відображення, що для довільної точки $a \in Y$ існує така точка $b_a \in Y$, що*

$$\phi\left(f^{-1}(a)\right) \subset f^{-1}(b_a).$$

Тоді відображення $\psi\colon Y \to Y$, $\psi(a) = b_a$, є неперервним.

Зокрема, якщо ϕ — гомеоморфізм, то ψ теж гомеоморфізм. Крім того, має місце рівність $\psi \circ f = f \circ \phi$.

Нехай Σ — редукована смугаста поверхня класу $\mathfrak{F}$, F — канонічне шарування на Σ і $H(G)$ — група гомеоморфізмів графа G. За означенням групи $H^+(F)$ гомеоморфізм $h \in H^+(F)$ зберігає відношення еквівалентності. Тому, згідно з лемою 3, відповідне факторне відображення $\rho(h) : G \to G$ є гомеоморфізмом, тобто кожен гомеоморфізм смугастої поверхні $h\colon \Sigma \to \Sigma$ з $H^+(F)$ індукує гомеоморфізм графа $\rho(h) : G \to G$.

Зауважимо, що відповідність $h \mapsto \rho(h)$ є гомоморфізмом груп

$$\rho\colon H^+(F) \to H(G).$$

Нехай K — група гомеоморфізмів, що переводять ребра в ребра зі збереженням орієнтації та лінійного порядку вершин на ∂_+, тобто якщо $g \in K$ і $g(e_\lambda) = e_\mu$, то обмеження відображення $g\colon \partial_+ e_\lambda \to \partial_+ e_\mu$ зберігає лінійний порядок вершин. Позначимо через K_0 групу гомеоморфізмів графа G з K, що ізотопні тотожному відображенню в K.

Лема 4. $K = \rho(H^+(F))$.

Доведення. 1. Спочатку встановимо справедливість включення $\rho(H^+(F)) \subset K$.

Нехай $h \in H^+(F)$ і h індукує гомеоморфізм $\rho(h) = g$. Згідно з теоремою 1, гомеоморфізм $h \in H^+(F)$ переставляє спеціальні шари кожної модельної смуги S_λ з атласу смугастої поверхні Σ. Тому існує таке ціле число k, що для будь-якого спеціального шару $\omega_s \in \partial_+ S_\lambda$, $s \in \Delta_\lambda$, виконується умова $h(\omega_s) = \omega_{s+k}$, де $\Delta_\lambda \in \{[0],[1],\ldots,\mathbb{N},-\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$ — множина індексів інтервалів $\partial_- S_\lambda$ модельної смуги S_λ. Нехай e_λ — ребро, що відповідає S_λ, і $v_k = \pi(\omega_k)$ — відповідна вершина в $\partial_+ e_\lambda$. Тоді $g(v_s) = v_{s+k}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Тому гомеоморфізми групи K дійсно зберігають лінійний порядок вершин на $\partial_+ e_\lambda$ для кожного ребра $e_\lambda \in G$.

2. Доведемо включення $K \subset \rho(H^+(F))$.

Нехай $g \in K$. Покажемо, що існує такий гомеоморфізм $q \in H^+(F)$, що $g = \rho(q)$.

2.1. Спочатку доведемо, що існує гомеоморфізм h, визначений на $\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ і такий, що діаграма

$$\begin{array}{ccccc}
\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{\ p\ } & \Sigma & \xrightarrow{\ \pi\ } & G \\
\Big\downarrow h & & & & \Big\downarrow g \\
\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{\ p\ } & \Sigma & \xrightarrow{\ \pi\ } & G
\end{array}$$

є комутативною.

Нехай e_λ, e_μ — два ребра, для яких виконується умова $g(e_\lambda) = e_\mu$. Зафіксуємо гомеоморфізми $\psi_\lambda\colon (0,1) \to e_\lambda$, $\psi_\mu\colon (0,1) \to e_\mu$ (див. (1)), тоді гомеоморфізм g індукує гомеоморфізм відрізків $\psi_\lambda^g\colon [0,1] \to [0,1]$, що визначається формулою

$$\psi_\lambda^g(t) = \begin{cases} \psi_\mu^{-1} \circ g \circ \psi_\lambda(t), & \text{якщо} \quad t \in (0;1), \\ t, & \text{якщо} \quad t \in \{0;1\}, \end{cases}$$

тобто діаграма

$$\begin{array}{ccc}
[0,1] \supset (0,1) & \xrightarrow{\ \psi_\lambda\ } & e_\lambda \\
\widehat{\psi}_\lambda \Big\downarrow & & \Big\downarrow g \\
[0,1] \supset (0,1) & \xrightarrow{\ \psi_\mu\ } & e_\mu
\end{array}$$

є комутативною. Зауважимо, що гомеоморфізм g відображає множину $\partial_+ e_\lambda$ в $\partial_+ e_\mu$ зі збереженням лінійного порядку. Тому стандартні модельні смуги S_λ та S_μ, що відповідають ребрам e_λ і e_μ, належать до одного типу, тобто $\partial_+ S_\lambda = \partial_+ S_\mu = \bigcup_{i\in\Delta} J_i \times \{1\}$, де $\Delta = \{[n],\mathbb{N},-\mathbb{N},\mathbb{Z}\}$. Нехай $v_s = \pi\left(J_s \times \{1\}\right)$, $s \in \Delta$. Тоді g індукує монотонну бієкцію Δ на себе. Якщо $\Delta = \mathbb{Z}$, то існує таке ціле число $k = k_\lambda(g)$, що $g(v_s) = v_{s+k}$, в усіх інших випадках $g(v_s) = v_s$ і ми покладемо $k = 0$.

Тому гомеоморфізм h_λ можна задати таким чином:

$$h_\lambda(x, y) = \left(x + 2ky, \psi_\lambda^g(y)\right), \quad (x, y) \in S_\lambda. \tag{2}$$

При цьому має місце комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc} S_\lambda & \xrightarrow{p_\lambda} & p(S_\lambda) & \xrightarrow{\pi} & e_\lambda \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_\lambda} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle g} \\ S_\mu & \xrightarrow{p_\mu} & p(S_\mu) & \xrightarrow{\pi} & e_\mu \end{array} .$$

Визначивши h_λ для кожної модельної смуги смугастої поверхні Σ, отримаємо шуканий гомеоморфізм h.

2.2. Доведемо, що всі гомеоморфізми h_λ узгоджені на межі ∂e_λ, тобто гомеоморфізм h індукує гомеоморфізм q, для якого комутативною є діаграма

$$\begin{array}{ccccc} \bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{p} & \Sigma & \xrightarrow{\pi} & G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g} \\ \bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{p} & \Sigma & \xrightarrow{\pi} & G \end{array} . \tag{3}$$

Нехай $a, b \in \bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, $a \neq b$ і $p(a) = p(b)$. Оскільки образи точок a, b при факторному відображенні p тотожні, то ці точки лежать на межі стандартних модельних смуг. Нехай, для визначеності, $a = (x_1, 0) \in J_1 = (1, 2) \subset \partial_- S_{\lambda_1}$ і $b = (x_2, 1) \in J_j = (2j + 1; 2j) \subset \partial_+ S_{\lambda_2}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Тоді з формули (2) отримуємо

$$h_{\lambda_1}(x_1, 0) = (x_1, 0),$$
$$h_{\lambda_2}(x_2, 1) = (x_2 + 2k, 1).$$

Згідно з уведеними позначеннями, афінні гомеоморфізми, що приклеюють модельні смуги $\varphi_1 \colon J_1 \to J_j$ і $\varphi_2 \colon h_{\lambda_1}(J_1) \to h_{\lambda_2}(J_j)$, визначаються формулами

$$\varphi_1(t) = t + 2j, \quad t \in J_1,$$
$$\varphi_2(t) = t + 2j + 2k, \quad t \in h(J_1).$$

Тоді $h_{\lambda_2} \circ \varphi_1 \circ h_{\lambda_1}^{-1}(t) = \varphi_2(t)$, $t \in h(J_1)$. Отже, $p(h(a)) = p(h(b))$ і діаграма (3) є комутативною.

Лему 4 доведено.

Наступні леми дають характеризацію груп K_0 та H_0.

Лема 5. *Гомеоморфізм $g \in H(G)$ належить групі K_0 тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови*:

1) $g(e) = e$, *де e — довільне ребро графа*;
2) *g зберігає орієнтацію ребер*;
3) $g(v) = v$ *для кожної вершини* v.

Доведення. *Достатність.* Нехай $g \in H(G)$ і виконуються умови $1-3$ леми. Завдяки умовам 2, 3 гомеоморфізм g належить групі K. Крім того, з умов 1, 2 випливає, що для кожного ребра e_λ графа G функція $g|_{e_\lambda}$ є строго зростаючою. Тому ізотопію $\Psi(z,t)\colon G \times [0;1] \to G$ між id_G та g можна визначити формулою

$$\psi_t(z) = \begin{cases} \psi_\lambda\left((1-t)\psi_\lambda^{-1}(z) + t\psi_\lambda^{-1}(g(z))\right), & \text{якщо} \quad z \in e_\lambda, e_\lambda \subset E, \\ z, & \text{якщо} \quad z \in V, \end{cases}$$

де $t \in [0;1]$. Отже, $g \in K_0$.

Необхідність. Нехай $g \in K_0$. Тоді існує ізотопія $g_t\colon K \to K$, $t \in [0;1]$, $g_0 = \mathrm{id}_G, g_1 = g$, для якої виконується рівність

$$g_t(E) = E, \quad g_t(V) = V.$$

Оскільки $g_0 = \mathrm{id}$, то g_t залишає інваріантною кожну компоненту зв'язності множин E та V, тобто кожне ребро та кожну вершину. Це доводить властивості 1 та 3.

Крім того, для довільного ребра e обмеження $g_t|_e\colon e \to e$, $t \in [0;1]$, є ізотопією $g_0|_e = \mathrm{id}_G$ і $g_1|_e = g$, тому $g_t|_e$ зберігає орієнтацію ребра.

Лему 5 доведено.

Лема 6. $H_0^+(F) = \rho^{-1}(K_0)$, $\rho(H_0^+(F)) = K_0$.

Доведення. Якщо $h \in H_0^+(F)$, то, згідно з теоремою 4.4 [15], для $\rho(h)$ виконуються всі умови леми 5 і $\rho(h) \in K_0$, тобто $\rho(H_0^+(F)) \subset K_0$.

Тому для того, щоб показати справедливість леми, достатньо довести, що $\rho^{-1}(K_0) \subset \subset H_0^+(F)$, тобто кожен гомеоморфізм $g \in K_0$ є образом деякого відображення h з $H_0^+(F)$. Нехай $g \in K_0$. Тоді на смузі S_λ гомеоморфізм h можна визначити за допомогою формули (2), де $k_\lambda(g) = 0$.

Таким чином, $h \in H_0^+(F)$ і $K_0 \subset \rho(H_0^+(F))$.

Оскільки $H_0^+(F) = \rho^{-1}(K_0)$ і ρ — сюр'єктивне відображення, то $\rho(H_0^+(F)) = K_0$.

Лему 6 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\Sigma \in \mathfrak{F}$ і F — канонічне шарування. Тоді гомоморфізм $\rho\colon H^+(F) \to K$ індукує ізоморфізм груп $\pi_0 H^+(F)$ та $\pi_0 K$.*

Доведення. Групи $H_0^+(F)$ та K_0 є нормальними підгрупами відповідно в групах $H^+(F)$ та K. Більш того, згідно з лемою 6, $H_0^+(F) = \rho^{-1}(K_0)$, а тому ρ індукує ізоморфізм фактор-груп

$$H^+(F)\big/H_0^+(F) \cong H^+(F)\big/\rho^{-1}(K_0) = \frac{H^+(F)\big/\ker\rho}{\rho^{-1}(K_0)\big/\ker\rho} = K\big/K_0.$$

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. – М.: Наука, 1997. – 352 с.
2. *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1994. – **205**. – С. 131 – 140.
3. *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 687 – 700.

4. *Sharko V. V.* Smooth functions on non-compact surfaces // Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. – 2006. – **3**, № 3. – P. 443 – 473 / arXiv:math/0709.2511.
5. *Пришляк А. О.* Сопряженность функций Морса на поверхностях со значениями на прямой и окружности // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 10. – С. 1421 – 1425.
6. *Полулях Е. А.* Графы Кронрода – Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 375 – 396.
7. *Prishlyak O. O.* Morse functions with finite number of singularities on a plane // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 75 – 78.
8. *Polulyakh E., Yurchuk I.* On the pseudo-harmonic functions defined on a disk // Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. – 2009. – **80**. – P. 151 (in Ukrainian).
9. *Sharko V. V., Soroka Yu. Yu.* Topological equivalence to a projection // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2015. – **21**, № 1. – P. 3 – 5.
10. *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane, I // Duke Math. J. – 1940. – **7**. – P. 154 – 185.
11. *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane, II // Duke Math J. – 1941. – **8**. – P. 11 – 46.
12. *Hassler Whitney.* Regular families of curves // Ann. Math. – 1933. – **34**, № 2. – P. 244 – 270.
13. *Boothby W. M.* The topology of regular curve families with multiple saddle points // Amer. J. Math. – 1951. – **73**. – P. 405 – 438.
14. *Jenkins J., Marston M.* Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates // Amer. J. Math. – 1952. – **74**. – P. 23 – 51.
15. *Maksymenko S., Polulyakh E.* Foliations with non-compact leaves on surfaces // Proc. Geom. Center. – 2015. – **8**, № 3-4. – P. 17 – 30.
16. *Maksymenko S., Polulyakh E.* Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2016. – **3** / arXiv:1606.00045.
17. *Soroka Yu. Yu.* Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2016. – **3** / arXiv:1607.04097.
18. *Epstein D. B. A.* Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. – 1966. – **115**. – P. 83 – 107.
19. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.

Одержано 16.10.16