УДК 517.925, 519.216

**Г. К. Василина, М. И. Тлеубергенов**

(Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби, Ин-т математики и мат. моделирования МОН Республики Казахстан, Алматы)

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

By using the method of Lyapunov functions, we establish sufficient conditions of stability and asymptotic stability in probability for the integral manifold of the Itô differential equations in the presence of random perturbations from the class of processes with independent increments. Theorems on the stochastic stability of the analytically given integral manifold of differential equations are proved in the first approximation and under the permanent action of small (in the mean) random perturbations.

Із допомогою методу функцій Ляпунова отримано достатні умови стійкості та асимптотичної стійкості за ймовірністю інтегрального многовиду диференціальних рівнянь Іто за наявності випадкових збурень із класу процесів із незалежними приростами. Доведено теореми про стохастичну стійкість за першим наближенням при постійно діючих малих у середньому випадкових збуреннях аналітично заданого інтегрального многовиду диференціальних рівнянь.

Основные теоремы метода функций Ляпунова и их различные модификации об устойчивости невозмущенного движения в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [1 – 3]) обобщены в [4 – 7] на случай инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида $V(\rho, t)$, где $\rho = \rho(x, M)$ — расстояние от изображающей точки $x$ до множества $M$.

Вследствие сложности построения функции $V(\rho, t)$, как функции от расстояния $\rho$, в задаче построения уравнений устойчивого программного движения обыкновенных дифференциальных уравнений используется аналитическое описание множества [8, 9], и, по существу, задача исследования устойчивости множества сводится к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой системы. В работах [10, 11] для аналитически заданных инвариантных множеств в классе обыкновенных дифференциальных уравнений доказаны аналоги теорем второго метода Ляпунова. При этом для аналитически заданных инвариантных множеств в [12, 13] доказаны теоремы об устойчивости по первому приближению, устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Впервые задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения методом функций Ляпунова была исследована в [14, 15]. В классе обыкновенных дифференциальных уравнений при случайных возмущениях из класса винеровских процессов (как частный случай процессов с независимыми приращениями) методом функций Ляпунова в [16] доказаны теоремы о стохастической устойчивости невозмущенного движения. В этом же классе в [16 – 19] доказаны теоремы о стохастической устойчивости инвариантных множеств с помощью функций Ляпунова вида $V(\rho, t)$.

Достаточные условия устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия [10 – 13] обобщены в [20 – 23] на класс стохастических дифференциальных уравнений при наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов.

Задача о стохастической устойчивости невозмущенного движения при случайных возмущениях из класса процессов с независимыми приращениями рассматривалась в [24].

Настоящая работа посвящена исследованию стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

**1. Постановка задачи о стохастической устойчивости аналитически заданного интегрального многообразия.** Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение без последействия

$$\dot{x} = X(x(t),t)dt + \sigma(x(t),t)dw(t) + \int\limits_{R^n} f(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du), \tag{1}$$

где функции $X(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $f(x,t,u)$ не случайны, $X$, $f$ — векторные функции со значениями в $R^n$, $t \geq 0$, $x \in R^n$, $u \in R^n$, $\sigma(x,t)$ — матричная функция размера $n \times m$, $w(t)$ — $m$-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, $\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$ — пуассоновская мера на $R^n$, $E\nu(t,A) = t\Pi(A)$, процесс $w(t)$ и мера $\nu(t,A)$ независимы между собой, $\Pi(A)$ — мера на $\sigma$-алгебре борелевских множеств $R^n$.

Предположим, что:

1) существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|X(x,t)\|^2 + \|\sigma(x,t)\|^2 + \int\limits_{R^n} \|f(x,t,u)\|^2 \Pi(du) \leq L(1 + \|x\|^2);$$

2) функции $X(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $f(x,t,u)$ непрерывны по совокупности аргументов;

3) выполнено локальное условие Липшица по $x$, т. е. для любого $R > 0$ найдется постоянная $C_R > 0$ такая, что при $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R$

$$\|X(x,t) - X(y,t)\|^2 + \|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)\|^2 +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \|f(x,t,u) - f(y,t,u)\|^2 \Pi(du) \leq C_R \|x - y\|^2.$$

Согласно [25, с. 276], эти условия обеспечивают существование и единственность с точностью до стохастической эквивалентности решения $x^{x_0,t_0}(t)$ уравнения (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, являющегося непрерывным справа с вероятностью 1 строго марковским случайным процессом.

Рассмотрим в пространстве $R^n$ поверхность $\Lambda(t)$, заданную системой уравнений

$$\Lambda(t) \colon \lambda(x,t) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda = \lambda(x,t) \in C^{21}_{xt}$ — $r$-мерная вектор-функция, $r \leq n$.

В дальнейшем приведем условия того, что эта поверхность является инвариантной для уравнения (1) (интегральное многообразие), т. е. если $(x_0,t_0) \in \Lambda(t_0)$ с вероятностью 1, то

$$\mathrm{P}\{(x(t),t) \in \Lambda(t), t \geq t_0\} = 1,$$

а также исследуем ее на стохастическую устойчивость.

**Определение 1.** *Назовем $a(r)$ функцией класса $K$ $(a \in K)$, если $a(r)$ — непрерывная, строго возрастающая функция и $a(0) = 0$.*

Условия инвариантности и стохастической устойчивости приведем в терминах функций Ляпунова вида $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda x t} : R^r \times R^n \times R^+ \to R^+$ и таких, что $V(0; x, t) = 0$.

Обозначим $V_1(x, t) = V(\lambda(x, t), x, t)$. Очевидно, что $V_1(x, t) \in C^{21}_{xt}$. Будем рассматривать такие функции Ляпунова, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{R^n} \left\| \left[ V_1(x) + f(x, t, u), t) - V_1(x, t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x, t, u) \right] \right\| \Pi(du) < \infty. \tag{3}$$

Введем производящий оператор

$$\tilde{L}V(\lambda(x, t), x, t) = \tilde{L}V_1(x, t) = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i \partial x_j}\,\sigma_{ik}\,\sigma^T_{jk}\right] +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \left[ V_1(x + f(x, t, u), t) - V_1(x, t) - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^T f_i(x, t, u) \right] \Pi(du).$$

**Определение 2** [16, с. 206]**.** *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ уравнения* (1)*, определяемое формулой* (2)*, называется $\rho$-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\rho(x_0, \Lambda(t_0)) \to 0} P_{x_0} \left\{ \sup_{t > 0} \rho(x^{x_0, t_0}(t), \Lambda(t)) > \varepsilon \right\} = 0. \tag{4}$$

**Определение 3.** *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ уравнения* (1)*, определяемое формулой* (2)*, называется $\lambda$-устойчивым по вероятности, если*

$$\lim_{\|\lambda(x_0, t_0)\| \to 0} P_{x_0} \left\{ \sup_{t > 0} \|\lambda(x^{x_0, t_0}(t), t)\| > \varepsilon \right\} = 0.$$

**Определение 4** [16, с. 210]**.** *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ уравнения* (1)*, определяемое формулой* (2)*, называется асимптотически $\rho$-устойчивым по вероятности, если оно $\rho$-устойчиво по вероятности и, кроме того,*

$$\lim_{\rho(x_0, \Lambda(t_0)) \to 0} P_{x_0} \left\{ \lim_{t \to \infty} \sup_{t > 0} \rho(x^{x_0, t_0}(t), \Lambda(t)) = 0 \right\} = 1.$$

**Определение 5.** *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ уравнения* (1)*, определяемое формулой* (2)*, называется асимптотически $\lambda$-устойчивым по вероятности, если оно $\lambda$-устойчиво по вероятности и, кроме того,*

$$\lim_{\|\lambda(x_0, t_0)\| \to 0} P_{x_0} \left\{ \lim_{t \to \infty} \sup_{t > 0} \|\lambda(x^{x_0, t_0}(t), t)\| = 0 \right\} = 1.$$

**Теорема 1.** *Если для уравнения* (1) *и множества* (2) *существует функция Ляпунова $V(\lambda; x, t) \in C^{221}_{\lambda x t}$ со свойствами*

$$V(0,x,t)\equiv 0, \tag{5}$$

$$V(\lambda,x,t)\geq a(\|\lambda\|),\quad a\in K, \tag{6}$$

$$\tilde{L}V_1(x,t)\leq 0 \tag{7}$$

*и для* $V_1 = V(\lambda(x,t),x,t)$ *выполнено условие* (3), *а также существуют положительные постоянные* $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_5$ *такие, что*

$$V_1(x,t)\leq C_1+C_2\|x\|^2,\quad \left\|\frac{\partial V_1}{\partial x}\right\|\leq C_3+C_4\|x\|,\quad \left\|\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_i\partial x_j}\right\|\leq C_5,$$

*то множество* (2) *является интегральным многообразием для уравнения* (1).

*Если, к тому же, функция* $\lambda(x,t)$ *удовлетворяет условию*

$$\|\lambda(x,t)\|\geq \alpha(\rho(x,\Lambda(t))),\quad \alpha\in K, \tag{8}$$

*то множество* $\Lambda(t)$ (2) $\rho$*-устойчиво по вероятности.*

***Замечание* 1.** В дальнейшем для краткости будем обозначать $\alpha(\rho(x,\Lambda(t)))=\alpha(\rho)$.

***Доказательство.*** Пусть $x^{x_0,t_0}(t)=x(t)$ — такое произвольное решение уравнения (1), что $(x(t_0),t_0)\in\Lambda_{t_0}$ с вероятностью 1. Применяя к процессу $V_1(x(t),t)$ обобщенную формулу Ито [25, с. 274] (теорема 2), имеем

$$E_{x_0,t_0}V_1(x(t),t)-V_1(x_0,t_0)=\int\limits_{t_0}^{t}E\tilde{L}_1V_1(x(s),s))ds.$$

Отсюда в силу условий (5), (7) получаем

$$E_{x_0,t_0}V_1(x(t),t)\leq 0 \tag{9}$$

для любого $t\geq t_0$, или

$$E_{x_0,t_0}V(\lambda(x(t),t),x(t),t)\leq 0.$$

Учитывая при этом условие (3), убеждаемся, что $V(\lambda(x(t),t),x(t),t)=0$ для каждого $t$ с вероятностью 1. Поэтому и $\lambda(x(t),t)=0$ для каждого $t\geq t_0$ с вероятностью 1. Тогда получаем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{t_i\geq t_0\\ t_i\in Q^+}}\|\lambda(x(t),t)\|=0\right\}=1,$$

где $Q^+$ — множество неотрицательных рациональных чисел. Но в силу непрерывности справа траекторий

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{\substack{t_i\geq t_0\\ t_i\in Q^+}}\|\lambda(x(t),t)\|=0\right\}=\mathrm{P}\left\{\sup_{t_i\geq t_0}\|\lambda(x(t),t)\|=0\right\}=1.$$

Последнее означает инвариантность множества (2) для системы (1).

Докажем теперь устойчивость по вероятности множества (2). Для этого выберем произвольное достаточно малое число $\varepsilon>0$, произвольный момент $t_0$ и начальную точку $x_0$. Рассмотрим решение $x^{x_0,t_0}(t)$ уравнения (1). Пусть $\tau_\varepsilon=\inf\{t\colon\|\lambda(x(t)\|>\varepsilon\}$, а $\tau_\varepsilon(t)=\min(\tau_\varepsilon,t)$. Тогда по формуле Дынкина [26, с. 191] получим

$$E_{x_0,t_0}V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t));x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))=V(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0)+$$

$$+E_{x_0,t_0}\int\limits_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)}\widetilde{L}V(\lambda(x(u),u);x(u),u)du.$$

Отсюда в силу (7) следует неравенство

$$M_{x_0,t_0}V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t));x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))\leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0),$$

которое с учетом (6) можно записать в виде

$$\int\limits_{\tau_\varepsilon<t}a(\|\lambda(x(\tau_\varepsilon),\tau_\varepsilon)\|)P_{x_0,t_0}(d\omega)+\int\limits_{\tau_\varepsilon\geq t}a(\|\lambda(x(t),t)\|)P_{x_0,t_0}(d\omega)\leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0).$$

Следовательно,

$$a(\varepsilon)P_{x_0,t_0}\{\tau_\varepsilon<t\}\leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0).$$

В силу непрерывности по $\lambda$ функции $V(\lambda;x_0,t_0)$ и $V(0;x,t)\equiv0$ из последнего неравенства следует соотношение

$$\lim_{\|\lambda\|\to0}P_{x_0,t_0}\{\tau_\varepsilon<t\}=0,$$

которое влечет за собой $\lambda$-устойчивость $\Lambda(t)$ в соответствии с определением 3. Учитывая оценку (8), получаем $\rho$-устойчивость интегрального многообразия $\Lambda(t)$ уравнения (1).

**Теорема 2.** *Если для процесса* $x(t)$, *описываемого уравнением* (1), *существует функция Ляпунова* $V(\lambda;x,t)\in C^{221}_{\lambda xt}$, $V(0;x,t)\equiv0$ *со свойствами* (6),

$$V(\lambda;x,t)\leq b(\|\lambda\|),\quad b\in K,\tag{10}$$

$$\widetilde{L}V\leq-c(\|\lambda\|),\quad c\in K,\tag{11}$$

*и, кроме того, вектор-функция* $\lambda=\lambda(x,t)$ *удовлетворяет условию* (8), *то интегральное многообразие* $\Lambda(t)\colon\lambda(x,t)=0$ *уравнения* (1) *асимптотически* $\rho$*-устойчиво по вероятности.*

***Доказательство.*** По теореме 1 условия (6) и (7) обеспечивают $\lambda$-устойчивость $\Lambda(t)$ по вероятности, а условие (8) влечет за собой $\rho$-устойчивость по вероятности интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Докажем справедливость соотношения (4) — асимптотической $\lambda$-устойчивости по вероятности $\Lambda(t)$. Тогда из оценки (8) будет следовать асимптотическая $\rho$-устойчивость интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Пусть, как и при доказательстве теоремы 1, $\tau_\varepsilon = \inf\{t\colon \|\lambda(x(t),t)\| > \varepsilon\}$, $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon, t)$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество таких выборочных траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$, что $\tau_\varepsilon(t) = t$, $t \geq 0$, т. е. те траектории, которые до момента $t$ не вышли из множества $\|\lambda(x(t),t)\| < \varepsilon$. Тогда по теореме 1

$$\lim_{\|\lambda(x_0,t_0)\|\to 0} P_{x_0,t_0}\{\mathcal{R}\} = 1.$$

Из (9) и (11) следует неравенство

$$E_{x_0,t_0} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)) \leq V(\lambda(x_0,t_0); x_0,t_0),$$

т. е. случайный процесс $V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t))$ является неотрицательным супермартингалом и по теореме Дуба [27, с. 291] с вероятностью 1 существует конечный предел, который для траекторий из множества $\mathcal{R}$ имеет вид

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)); x(\tau_\varepsilon(t)),\tau_\varepsilon(t)) = \lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(t),t); x(t),t) = \kappa.$$

Покажем, что с вероятностью 1 $\kappa = 0$. Доказательство проведем от противного, т. е. предположим, что найдется хотя бы одна пара $x_0^*, t_0^* \in U_\varepsilon(0)$, $U_\varepsilon(t_0) = \{x\colon \|\lambda(x,t)\| < \varepsilon\}$, такая, что для выборочных траекторий из множества $\mathcal{R}$ с вероятностью $q$ выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} V(\lambda(x(t),t); x(t),t) = V_* > 0.$$

Тогда из свойства (10) бесконечно малого высшего предела функции $V$ следует, что с вероятностью $q$

$$\lim_{t\to\infty} \|\lambda(x(t),t)\| \geq b^{-1}(V_*) > \varepsilon_1 > 0.$$

Для дальнейших рассуждений нам необходимо доказать свойство возвратности выборочных траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{R}$, по отношению к области $\{\|\lambda(x(t),t)\| < \mu\}$ для каждого $\mu$, $0 < \mu < \varepsilon$. Действительно, для таких $\mu$ и всех $\{x\colon \mu \leq \|\lambda(x(t),t)\| \leq \varepsilon\}$ из строгой монотонности $c(r)$ выполняется оценка (11): $LV \leq -c(\mu)$.

Пусть $\tau^\mu$ — момент первого выхода процесса $x^{x_0,t_0}(t)$ из области $\mu \leq \|\lambda\| \leq \varepsilon$. Используя (9), находим

$$E_{x_0,t_0}\tau^\mu(t) - t_0 \leq c^{-1}(\mu) V(\lambda(x_0,t_0); x_0,t_0).$$

Отсюда на основании неравенства Чебышева получаем

$$P_{x_0,t_0}\{\tau^\mu \geq t\} \leq \frac{c^{-1}(\mu) V(\lambda(x_0,t_0); x_0,t_0)}{t}.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, имеем

$$P_{x_0,t_0}\{\tau^\mu < \infty\} = 1, \tag{12}$$

что и доказывает возвратность траекторий процесса $x^{x_0,t_0}(t)$, принадлежащих множеству $\mathcal{R}$ по отношению к $\{\|\lambda(x,t)\| < \mu\}$.

Из (12) и строгой марковости процесса $x(t)$ для любого сколь угодно малого $\mu > 0$ получаем

$$0 < q = P_{x_0^*,t_0^*}\{\lim_{t\to\infty} \|\lambda(x(t),t)\| > \varepsilon_1\} =$$

$$= \int\limits_{\{x:\|\lambda(x,t)\|=\mu\}} \int\limits_0^\infty P_{x_0,t_0}\{\lim_{t\to\infty}\|\lambda(x(t),t)\| > \varepsilon_1\} P_{x_0^*,t_0^*}\{\tau^\mu \in dt, > x(\tau^\mu) \in dx\} \le$$

$$\le \sup_{\{x:\|\lambda(x,t)\|\le\mu, >t_0>0\}} P_{x_0,t_0}\{\lim_{t\to\infty}\|\lambda(x(t),t)\| > \varepsilon_1\},$$

что противоречит определению 3 $\lambda$-устойчивости по вероятности интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Таким образом, для почти всех выборочных траекторий множества $\mathcal{R}$ с вероятностью 1 $\lim\|\lambda(x(t),t)\| = 0$ при $t\to\infty$ для всех $x\in U_\varepsilon(0)$. Отсюда с учетом оценки $V(\lambda; x,t) \ge a(\|\lambda\|)$ для почти всех траекторий из $\mathcal{R}$ имеем $\lim_{t\to\infty}\|\lambda(x(t),t)\| = 0$, откуда с учетом (12) и оценки (8) следует утверждение теоремы.

***Замечание* 2.** Теоремы 1, 2 распространяют теоремы Р. З. Хасьминского [16, с. 207, 211] о стохастической устойчивости невозмущенного движения на класс аналитически заданных интегральных многообразий.

**2. Задача о стохастической устойчивости интегрального многообразия по первому приближению.** Уравнение возмущенного движения относительно $\Lambda(t)$ (4) запишем в виде

$$d\lambda = A(x,t)dt + B(x,t)d\omega + \int\limits_{R^n} G(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du), \tag{13}$$

где

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_r)^T,$$

$$A_l(x,t) = \frac{\partial\lambda_l}{\partial t} + \left(\frac{\partial\lambda_l}{\partial x_i}\right)^T X_i + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\partial^2\lambda_l}{\partial x_i\partial x_j}\sigma_{ik}\,\sigma_{jk}^T\right] +$$

$$+ \int\limits_{R_n}\left[\lambda_l(x+f(x,t,u),t) - \lambda_l(x,t) - \left(\frac{\partial\lambda_l}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u)\right]\Pi(du),$$

$$B = (B_{lk},) \quad B_{lk}(x,t) = \left(\frac{\partial\lambda_l}{\partial x_i}\right)^T\sigma_{ik},$$

$$G = (G_1, G_2, \ldots, G_r)^T, \quad G_l(x,t,u) = \lambda_l(x+f(x,t,u),t) - \lambda_l(x,t),$$

$$l = \overline{1,r}, \quad k = \overline{1,m}, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

При этом в формуле (13) предполагаем сходимость интеграла $\int_{R^n} G(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du) < \infty$.

Предположим далее, что вектор-функции $X(x,t)$, $\lambda(x,t)$ и матрица $\sigma(x,t)$ такие, что уравнение возмущенного движения (13) относительно $\Lambda(t)$ (2) принимает вид

$$d\lambda_l = \left[A_{ls}^{(1)}(x,t)\lambda_s + A_l^{(2)}(\lambda,x,t)\right]dt + \left[B_{lps}^{(1)}(x,t)\lambda_s + B_{lp}^{(2)}(\lambda,x,t)\right]d\omega^p +$$

$$+\int\limits_{R^n} G_l(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du), \tag{14}$$

где $A_1=(A_{ls}^{(1)})$, $A_2=A_l^{(2)}$, $B_{1p}=(b_{lps}^{(1)})$, $B_2=b_{lp}^{(2)}$, причем

$$\sup_{\{t\geq 0, x\in\Lambda_h\setminus\Lambda\}}\{\|A_2\|,\|B_2\|\}=o(\|\lambda\|). \tag{15}$$

Здесь, как и в предыдущих пунктах, по повторяющимся индексам предполагается суммирование $(l,s=\overline{1,r};\ p=\overline{1,m})$. Тогда уравнение линейного приближения относительно вектор-функции $\lambda(x,t)$ примет вид

$$d\lambda_l=A_{ls}^{(1)}(x,t)\lambda_s dt+B_{lps}^{(1)}(x,t)\lambda_s d\omega^j+\int\limits_{R^n} G_l(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du)$$

или в векторно-матричном обозначении

$$d\lambda=A_1(x,t)\lambda dt+B_{1p}(x,t)\lambda d\omega^p+\int\limits_{R^n} G(x(t),t,u)\tilde{\nu}(dt,du).$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть заданные вектор-функция $X(x,t)$, матрица-функция $\sigma(x,t)$ исходного уравнения* (1) *и вектор-функция $\lambda(x,t)$ таковы, что выполняются следующие условия*:

1) *уравнение возмущенного движения* (13) *относительно программного многообразия $\Lambda(t)$ допускает представление* (14);

2) *существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V(\lambda;x,t)$, удовлетворяющая условиям* (6), (10) *и*

$$\widetilde{L}_1 V(\lambda;x,t)\leq -c(\|\lambda\|),\quad c\in K,$$

*где*

$$\widetilde{L}_1 V(\lambda;x,t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^T X_i+\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_l}\right)^T A_l+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\,a_{ij}\right]+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda\,\partial\lambda_k}\,\widetilde{B}_{lk}^T\right]+$$

$$+\int\limits_{R^n}\left[V(\lambda(x+f(x,t,u),t);x+f(x,t,u),t)-V(\lambda(x,t),x,t)-\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u)\right]\Pi(du)+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial\lambda_\mu}\left(A_{1\mu}(x,t)\lambda_\mu dt+B_{1j\mu}(x,t)\lambda_\mu d\omega^j+\int\limits_{R^n} G_{1j\mu}(x,t)\lambda_\mu(x,t)dP(t,dx)\right),$$

$$[a_{ij}]=\sigma_{ik}\sigma_{jk}^T;$$

3) $a(r)\to\infty$ *при* $t\to\infty$;

4) *вектор-функция* $\lambda(x,t)$ *удовлетворяет неравенству* (8).
*Тогда интегральное многообразие* $\Lambda(t)$ (2) *уравнения* (1) *асимптотически* $\rho$*-устойчиво по вероятности при любых* $A_2(\lambda;x,t)$, $B_2(\lambda;x,t)$, *удовлетворяющих условию* (15).

***Доказательство.*** Составим производящий дифференциальный оператор функции $V$ в силу системы (1):

$$\widetilde{L}V(\lambda;x,t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^T X_i+\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_l}\right)^T\left(A_{ls}^{(1)}\lambda_s+A_l^{(2)}\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\,a_{ij}\right]^T+$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_l\,\partial \lambda_k}\left\{\left(B_{lps}^{(1)}\lambda_s\right)\left(\lambda_s^T B_{spl}^{(1)}\right)+\left(B_{lps}^{(1)}\lambda_s\right)B_{pl}^{(2)}+B_{lp}^{(2)}\left(\lambda_s^T B_{spl}^{(1)}+B_{lp}^{(2)}B_{pl}^{(2)}\right)\right\}\right]+$$

$$+\int\limits_{R^n}\Bigg[V(\lambda(x+f(x,t,u),t);x+f(x,t,u),t)-V(\lambda(x,t),x,t)-$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^T f_i(x,t,u)+\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_l}\right)^T G_l(x,t,u)\Bigg]\Pi(du)=$$

$$=\widetilde{L}_1 V+\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_l}\right)^T A_l^{(2)}+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_l \partial \lambda_q}\;\left\{\left(B_{lps}^{(1)}\lambda_s\right)B_{pl}^{(2)}+B_{pl}^{(2)}\left(\lambda_s^T B_{spl}^{(1)}\right)+B_{lp}^{(2)}B_{pl}^{(2)}\right\}\right].$$

Здесь малость по условию (15) $A_2(\lambda;x,t)$ и $B_2(\lambda;x,t)$ обеспечивают определенную отрицательность $LV$ и вдоль исходной системы (1), что из условия 4 согласно теореме 2 влечет асимптотическую $\rho$-устойчивость по вероятности программного движения $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1).

***Замечание*** **3.** Теорема 3 распространяет теорему Р. З. Хасьминского [16, с. 299] и теорему И. И. Гихмана, А. Я. Дороговцева [24] о стохастической устойчивости по первому приближению невозмущенного движения на стохастическую устойчивость аналитически заданного интегрального многообразия.

**3. Задача об устойчивости интегрального многообразия при постоянно действующих случайных возмущениях.** Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=X(x,t),\quad x\in R^n, \tag{16}$$

с интегральным многообразием (2). Наряду с уравнением (16) рассмотрим уравнение

$$\dot{x}=X(x,t)+R(x,t,\omega), \tag{17}$$

в котором вектор-функция $R=R(x,t,\omega)$ характеризует постоянно действующие случайные возмущения.

Предположим что:

1) правая часть уравнения (16) $X(x,t)$ непрерывна по $t$, $t\geq 0$, и удовлетворяет условию Липшица по $x$, $x\in R^n$;

2) величина $\vartheta(t,\omega)=\sup_{\{x\in R^n\}}\|R(x,t,\omega)\|$ имеет конечное математическое ожидание.

**Определение 6.** *Интегральное многообразие $\Lambda(t)$ (2) уравнения (1) стохастически $\rho$-устойчиво при постоянно действующих случайных возмущениях, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что из неравенства*

$$\rho(x_0, \Lambda(t_0)) + \sup_{t \geq t_0} M\vartheta(t, \omega) < \gamma$$

*при $t \geq t_0$ следует неравенство*

$$\mathrm{P}\{\rho(x(t, \omega), \Lambda(t)) > \Delta\} < \varepsilon,$$

*где $\rho(x, \Lambda)$ — расстояние от точки $x \in R^n$ до множества $\Lambda$,*

$$\rho(x, \Lambda) = \inf_{z \in \Lambda} \|x - z\|,$$

*а выражение $M\vartheta(t, \omega)$ — математическое ожидание случайной величины $\vartheta(t, \omega)$.*

Составим уравнение возмущенного движения относительно множества $\Lambda(t)$ (2) уравнения (16):

$$\dot{\lambda} = F(\lambda, x, t), \quad F(0, x, t) \equiv 0,$$

где $F$ — функция Н. П. Еругина, имеющая вид

$$F = \frac{\partial \lambda}{\partial x} X + \frac{\partial \lambda}{\partial t}.$$

Вдоль системы (17) $\dot{\lambda}$ представляется в виде

$$\dot{\lambda} = F(\lambda, x, t) + F_1(\lambda, x, t), \quad F(0, x, t) \equiv F_1(0, x, t) \equiv 0,$$

где $F_1 = \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} R(x, t, \omega)$.

**Теорема 4.** *Пусть в $R^n$ существует функция $V(\lambda; x, t) \in C^{111}_{\lambda x t}$ со следующими свойствами:*

1) $V(\lambda; x, t) \geq a(\|\lambda\|)$, $a \in K$;

2) *для каждого $\delta > 0$ существует $c_\delta > 0$ такое, что в области $\{\|\lambda\| > \delta\} \times \{t > t_0\}$ выполнено неравенство $\dot{V}_{(16)} < -c_\delta V$;*

3) $a(r) \to \infty$ *при $t \to \infty$;*

4) *вектор-функция $\lambda(x, t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|\lambda(x, t)\| \geq \alpha(\rho), \quad \alpha \in K.$$

*Тогда интегральное многообразие $\Lambda(t) \colon \lambda(x, t) = 0$ уравнения (16) $\rho$-устойчиво по вероятности при постоянно действующих случайных возмущениях при $t \geq t_0$.*

***Доказательство.*** Условия 1, 2 и 3 теоремы влекут $\lambda$-устойчивость по вероятности $\Lambda(t)$ при постоянно действующих случайных возмущениях. Действительно, из соотношения

$$\dot{V}_{(17)} \leq -c_\delta V + c\vartheta(t, \omega) + c_\delta V^{(\delta)},$$

где $V^{(\delta)} = \sup_{\{t > t_0, \|\lambda(x,t)\| < \delta\}} V(\lambda; x, t)$, согласно лемме 2.1 из [16, с. 23] следует оценка

$$V(\lambda(x(t,\omega),t);x(t,\omega),t) \leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0)e^{-c_\delta(t-t_0)} + \frac{c}{c_\delta}\sup_{t>t_0}\vartheta(t,\omega) + V^{(\delta)},$$

или после применения операции математического ожидания

$$EV \leq V(\lambda(x_0,t_0);x_0,t_0)e^{-c_\delta(t-t_0)} + \frac{c}{c_\delta}E\vartheta(t,\omega) + V^{(\delta)}.$$

Выберем $\delta$, $\|\lambda(x_0,t_0)\|$ и $E\vartheta(t,\omega)$ достаточно малыми настолько, что

$$EV \leq \varepsilon \inf_{\{t>t_0,\|\lambda(x,t)\|>\delta\}} V(\lambda(x,t);x,t). \tag{18}$$

Далее, согласно лемме 4.1 из [16, с. 32]

$$\mathrm{P}\left\{|\vartheta(t,\omega)| > R\right\} \leq \frac{EV(\vartheta(t,\omega),x,t)}{\inf_{\overline{U}_R\times\{s>t_0\}} V(\lambda(x,s);x,s)},$$

где $\overline{U}_R = \{x : \|\lambda(x,t)\| \leq R\}$. Из малости в среднем $EV$ с учетом (18) имеем малость величины $\mathrm{P}\{\|\lambda(x(t;t_0,x_0)\| > \delta\}$, а из условия 3 следует малость величины

$$\mathrm{P}\{\rho(x(t,\omega),\Lambda(t)) > \Delta\},$$

что и требовалось доказать.

***Замечание* 4.** Условия теоремы 4 обеспечивают фактически $\rho$-устойчивость в среднем интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Действительно, если применить математическое ожидание к неравенству $a(\|\lambda\|) \leq \leq V(\lambda;x,t)$, то из условия 4 теоремы следует малость $E\rho$ и, следовательно, устойчивость в среднем интегрального многообразия $\Lambda(t)$.

Условия теоремы 4 можно ослабить, если рассматривать более узкий класс постоянно действующих случайных возмущений.

Постоянно действующие возмущения представим в виде

$$R(x,t,\omega) = \sigma(x,t)\cdot\xi(t,\omega). \tag{19}$$

Пусть $\sigma(x,t)$ — интенсивность случайных возмущений в точке $(x,t)$.

**Определение 7.** *Интегральное многообразие* $\Lambda(t)$ (2) *уравнения* (16) *$\rho$-устойчиво при постоянно действующих случайных возмущениях вида* (19), *если для любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ найдется $\kappa > 0$ такое, что из неравенства*

$$\rho(x_0,\Lambda(t_0)) + \sup_{x,t}\|\sigma(x,t)\| < \kappa$$

*при $t \geq t_0$ следует неравенство*

$$\mathrm{P}\{\rho(x(t,\omega),\Lambda(t)) > \Delta\} < \varepsilon.$$

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия теоремы* 4 *с заменой условия $\dot{V}_{(16)} < -c_\delta V$ на* (*более слабое*) *условие $\dot{V}_{(16)} < -c_\delta$. Кроме того, пусть $\xi(t,\omega)$ удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что при $t_0 \leq s \leq t$*

$$E\,\exp\left\{\gamma\int_s^t|\xi(u,\omega)|du\right\} \leq e^{\varepsilon(t-s)}. \tag{20}$$

*Тогда интегральное многообразие $\Lambda(t)$ уравнения* (16) *$\rho$-устойчиво по вероятности для $t \geq t_0$ при постоянно действующих случайных возмущениях вида* (19).

***Доказательство.*** Положим

$$W(\lambda;x,t)=e^{V(\lambda;x,t)}-1,\quad W^{(\delta)}=\sup_{\{t>t_0,\|\lambda(x,t)\|<\delta\}}W(\lambda;x,t).$$

При любых $\delta>0$ и $\gamma>0$ имеем

$$\frac{dW}{dt}=e^{V(\lambda;x,t)}\left[\dot V_{(16)}+\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\sigma\xi\right]=$$

$$=W\left[\dot V_{(16)}+\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\sigma\xi\right]+\left[\dot V_{(16)}+\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\sigma\xi\right].$$

Отсюда получаем

$$\frac{dW}{dt}\le W(-c_\delta+\gamma|\xi(t,\omega)|)+\gamma|\xi(t,\omega)|+c_\delta W^{(\delta)}.$$

Из последнего неравенства, используя лемму 2.1 из [16, с. 23], имеем

$$W(\lambda(x(t,\omega),t),x(t,\omega),t)\le W(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0)e^{\int_{t_0}^t(-c_\delta+\gamma|\xi(s,\omega)|)ds}+$$

$$+c_\delta W^{(\delta)}\int\limits_{t_0}^{t}e^{\int_s^t(-c_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du}ds+\gamma\int\limits_{t_0}^{t}e^{\int_s^t(-c_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du}|\xi(s,\omega)|ds. \qquad (21)$$

Пусть $\varepsilon$ — любое такое число, что $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$. Из (20) следует, что число $\gamma_0(\varepsilon)$ можно выбрать так, что при $\gamma<\gamma_0(\varepsilon)$

$$Ee^{\gamma\int_s^t|\xi(u,\omega)|)du}\le e^{\varepsilon c_\delta(t-s)}. \qquad (22)$$

Отсюда с учетом того, что $W^{(\delta)}\to 0$, следует, что можно выбрать сначала $\delta(\varepsilon)$, а затем $\kappa(\varepsilon)$ и $\gamma_0(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялись и неравенство (22), и неравенство

$$E\left[W(\lambda(x_0,t_0),x_0,t_0)e^{\int_{t_0}^t(-c_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du}+c_\delta W^{(\delta)}\int\limits_{t_0}^{t}e^{\int_s^t(-c_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du}ds\right]<\varepsilon.$$

Далее из равенств

$$J=\gamma\int\limits_{t_0}^{t}e^{\int_s^t(-c_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du}|\xi(s,\omega)|\,ds=$$

$$=e^{\int_{t_0}^t(-c_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du}-1+c_\delta\int\limits_{t_0}^{t}e^{\int_s^t(-c_\delta+\gamma|\xi(u,\omega)|)du}\,ds$$

и неравенства (22) получаем

$$EJ \leq e^{-c_\delta(1-\varepsilon)(t-t_0)} - 1 + c_\delta \int\limits_{t_0}^{t} e^{-c_\delta(1-\varepsilon)(t-s)} ds \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 4\varepsilon. \tag{23}$$

Из (21) – (23) следует, что при любом $t \geq t_0$

$$EW(\lambda(x(t,\omega),t), x(t,\omega), t) < 5\varepsilon,$$

если $\rho(x_0, \Lambda(t_0)) + \sup_{t \geq t_0} E\nu(t,\omega) < \kappa(\varepsilon)$. Далее, согласно лемме 4.1 из [16], из малости в среднем $EW$ имеем малость

$$\mathrm{P}\{\|\lambda(x(t,t_0,x_0),t)\| > \delta\}.$$

Используя условие 4 теоремы, получаем малость

$$\mathrm{P}\{\rho(x(t,\omega),\Lambda(t)) > \Delta\}.$$

***Замечание* 5.** Теоремы 4, 5 распространяют теорему Р. З. Хасьминского [16, с. 52] о стохастической устойчивости при постоянно действующих случайных возмущениях невозмущенного движения на стохастическую устойчивость аналитически заданного интегрального многообразия.

## Литература


1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – М., 1950. – 472 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 208 с.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М., 1966. – 530 с.
4. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, вып. 5. – С. 885 – 895.
5. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М., 1973. – 272 с.
6. *Малышев Ю. В.* Об устойчивости некомпактных множеств для неавтономных систем // Теория устойчивости и ее приложения. – Новосибирск, 1979. – С. 66 – 70.
7. *Hajek O.* Ordinary and asymptotic stability of noncompact sets // J. Different. Equat. – 1972. – № 11. – P. 49 – 65.
8. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.* Построение систем программного движения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
9. *Мухарлямов Р. Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения к заданному многообразию // Дифференц. уравнения. – 1971. – **7**, № 10. – С. 688 – 699.
10. *Галиуллин А. С.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1973. – 104 с.
11. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 5. – С. 846 – 856.
12. *Тлеубергенов М. И.* Необходимые и достаточные условия устойчивости интегрального многообразия // Дифференц. уравнения и обратные задачи динамики. – М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1983. – С. 125 – 132.
13. *Тлеубергенов М. И.* Об устойчивости программного движения по первому приближению // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1984. – № 5. – С. 58 – 61.
14. *Bertram J. E., Sarachik P. E.* Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. Int. Circuit and Inform. Theory (Los-Angeles. Calif. IRE trans. CT-6). – 1959. – P. 260 – 270.
15. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1960. – **27**, вып. 5. – С. 809 – 823.
16. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М., 1969. – 368 с.
17. *Samoilenko A. M., Stanzhytskyi O. M.* Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations. – Singapore: World Sci. Publ., 2011. – 312 p.
18. *Станжицкий А. Н.* Об устойчивости по вероятности инвариантных множеств систем со случайными возмущениями // Нелінійні коливання. – 1998. – **1**, № 2. – С. 138 – 142.

19. *Станжицький О. М.* Дослідження інваріантних множин стохастичних систем Іто за допомогою функцій Ляпунова // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 282 – 285.
20. *Тлеубергенов М. И.* Метод функций Ляпунова в задаче стохастической устойчивости программного движения // Мат. журн. – 2001. – **1**, № 2. – С. 98 – 106.
21. *Тлеубергенов М. И.* Об устойчивости интегрального многообразия стохастического дифференциального уравнения Ито // Изв. МОН РК, НАН РК. – 2001. – № 3. – С. 55 – 62.
22. *Тлеубергенов М. И.* Об устойчивости по вероятности программного движения // Изв. МОН РК, НАН РК. – 2002. – № 3. – С. 47 – 53.
23. *Тлеубергенов М. И.* Об устойчивости по вероятности программного движения при постоянно действующих возмущениях // Изв. МОН РК, НАН РК. – 2004. – № 3. – С. 53 – 58.
24. *Гихман И. И., Дороговцев А. Я.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 3 – 21.
25. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 256 с.
26. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1968. – 860 с.
27. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 609 с.


Получено 30.01.15,
после доработки — 26.06.15