УДК 515.126.2; 51 – 74

С. І. Максименко, О. В. Марункевич (Ін-т математики НАН Україні, Київ)

ТОПОЛОГІЧНА СТАБІЛЬНІСТЬ УСЕРЕДНЕНЬ ФУНКЦІЙ

We present sufficient conditions for the topological stability of the averagings of piecewise smooth functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with finitely many extrema with respect to discrete measures with finite supports.

Получены достаточные условия для топологической устойчивости усреднений кусочно-дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным числом экстремумов относительно дискретных мер с конечными носителями.

1. Вступ. У прикладних задачах обробки сигналів, наприклад при відновленні і оцифровуванні зображень, видаленні шумів та ін., важливу роль відіграють так звані лінійні фільтри. Якщо $x(t)$ — деякий сигнал, то результатом дії на нього лінійного фільтра з імпульсною перехідною функцією $h(t)$ є сигнал, який визначається згорткою $x * h$ цих функцій, тобто сигнал визначено за формулою

$$x * h(t) = \int\limits_0^T x(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

У випадку, коли носій h є досить малим і $\int_0^T h(\tau)d\tau = 1$, функцію h можна розглядати як щільність деякої міри, а згортку — як *усереднення* функції x за цією мірою. Такі усереднення широко використовуються в застосуваннях (див., наприклад, [1 – 3]).

Зауважимо, що «форма» сигналу y може суттєво відрізнятися від «форми» сигналу x. Наприклад, якщо x має один максимум, то y може мати їх багато. Збереження форми сигналу є принциповою вимогою до фільтрів у проблемах видалення шумів, обчислень ентропії часових рядів (див., наприклад, [4, 5] та наведену там бібліографію).

З математичної точки зору «однаковість форм» сигналів означає їх *топологічну еквівалентність* як функцій від часу (див. означення 1, 2).

В даній роботі ми наводимо широкі достатні умови для топологічної стійкості усереднень кусково-диференційовних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі скінченним числом екстремумів відносно дискретних мір зі скінченими носіями (див. теореми 1, 2).

Ці умови гарантують, що усереднення сигналів за допомогою фільтрів із дискретною імпульсною перехідною функцією «зберігають форму».

2. Усереднення функцій. Нехай μ — довільна ймовірнісна міра на відрізку $[-1, 1]$, тобто невід'ємна σ-адитивна міра така, що $\mu[-1, 1] = 1$, визначена на борелівській алгебрі множин відрізка $[-1, 1]$. Тоді для кожної вимірної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та числа $\alpha > 0$ можна визначити нову вимірну функцію $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за формулою

$$f_\alpha(x) = \int\limits_{-1}^{1} f(x - t\alpha)d\mu. \tag{1}$$

Цю функцію називатимемо *α-усередненням* функції f відносно міри μ.

Зазначимо, що якщо f визначено лише на деякому інтервалі (a, b), до того ж $2\alpha < b - a$, то формула (1) визначає функцію f_α на інтервалі $(a + \alpha, b - \alpha)$. Більш того,

$$\inf_{y\in[x-\alpha,x+\alpha]} f(y) \quad \leq \quad f_\alpha(x) \quad \leq \quad \sup_{y\in[x-\alpha,x+\alpha]} f(y). \tag{2}$$

Розглянемо кілька простих випадків.

1. Нехай μ — дискретна міра зі скінченним носієм. Це означає, що знайдеться така скінченна зростаюча послідовність точок $t_k < t_{k-1} < \ldots < t_2 < t_1 \in [-1, 1]$, що для довільної борелівської підмножини $A \subset [-1, 1]$ її міра задається формулою

$$\mu(A) = \sum_{t_i\in A} \mu(t_i).$$

Тоді усереднення функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначатиметься так:

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x - t_i\alpha)\, \mu(t_i). \tag{3}$$

Зокрема, якщо $k = 2$, $t_1 = -1$, $t_2 = +1$ і $\mu(-1) = \mu(1) = \dfrac{1}{2}$, то

$$f_\alpha(x) = \frac{f(x + \alpha) + f(x - \alpha)}{2}. \tag{4}$$

2. Припустимо, що міра μ є абсолютно неперервною, тобто існує така вимірна функція $p\colon [-1, 1] \to [0, \infty)$, що $\mu(A) = \displaystyle\int_A p(t)dt$. Тоді усереднення функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ визначатиметься за формулою

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^{1} f(x - t\alpha)p(t)dt.$$

Лема 1. *Відповідність $f \mapsto f_\alpha$ є лінійним оператором на просторі неперервних функцій $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Припустимо, що $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ має одну з наступних властивостей: є строго додатною, невід'ємною, (строго) зростає, (строго) спадає, є (строго) опуклою вгору або вниз. Тоді таку ж саму властивість має функція f_α для кожного $\alpha > 0$.*

Доведення. Ми розглянемо лише випадки (строго) зростаючих та опуклих вгору функцій. Всі інші твердження або є очевидними, або доводяться аналогічно.

1. Припустимо, що f зростає. Тоді для довільних $x < y \in \mathbb{R}$, $t \in [-1, 1]$ та $\alpha > 0$ маємо, що $f(x - t\alpha) \leq f(y - t\alpha)$, а тому

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^{1} f(x - t\alpha)d\mu \leq \int_{-1}^{1} f(y - t\alpha)d\mu = f_\alpha(y),$$

тобто f_α також зростає.

2. Якщо ж f строго зростає, то $q(t) = f(y - t\alpha) - f(x - t\alpha) > 0$ для всіх $t \in [-1, 1]$, а отже,

$$f_\alpha(y) - f_\alpha(x) = \int\limits_{-1}^{1} q(t)d\mu > 0,$$

тому що міра μ є невід'ємною. Звідси випливає, що f_α також строго зростає.

3. Припустимо, що f — опукла функція, тобто для довільних $x,\ y \in \mathbb{R}$ та $s \in [0,1]$ маємо

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y).$$

Тоді

$$f_\alpha(sx + (1-s)y) = \int\limits_{-1}^{1} f(sx + (1-s)y - t\alpha)d\mu \leq$$

$$\leq s\int\limits_{-1}^{1} f(x - t\alpha)d\mu + (1-s)\int\limits_{-1}^{1} f(y - t\alpha)d\mu =$$

$$= sf_\alpha(x) + (1-s)f_\alpha(y).$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ — неперервна строго монотонна функція. Тоді для довільного $\alpha > 0$ маємо $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.*

Доведення. Для визначеності вважатимемо, що f строго монотонно зростає. Тоді з формули (2) випливає, що для $x > \alpha$ виконуються такі нерівності:

$$f(x-\alpha) \;=\; \inf_{y\in[x-\alpha,x+\alpha]} f(y) \;\leq\; f_\alpha(x) \;\leq\; \sup_{y\in[x-\alpha,x+\alpha]} f(y) \;=\; f(x+\alpha),$$

а тому $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Топологічна еквівалентність функцій. Для подальшого викладу зручно використовувати поняття *паростка* неперервної функції в точці.

Нехай $a \in \mathbb{R}$, U — окіл точки a і $f,\ g\colon U \to \mathbb{R}$ — дві неперервні функції. Скажемо, що f та g визначають один і той же паросток у точці a, якщо $f = g$ в деякому околі $V \subset U$ точки a. Це є відношенням еквівалентності, а відповідний клас еквівалентності функції f називається *паростком у точці* a і позначається $f\colon (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$, або $f\colon (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, f(a))$, якщо потрібно підкреслити якого значення набуває f у точці a.

Нагадаємо також, що гомеоморфізм $\phi\colon (a,b) \to (c,d)$ — це те ж саме, що неперервна сюр'єктивна строго монотонна функція. При цьому якщо ϕ зростає (спадає), то кажуть, що він *зберігає* (*змінює*) *орієнтацію*.

Означення 1. *Нехай $a, b \in \mathbb{R}$ і $f\colon (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$ та $g\colon (\mathbb{R}, b) \to \mathbb{R}$ — два паростки неперервних функцій у точках a та b відповідно. Тоді f та g називаються топологічно еквівалентними, якщо існують такі паростки зберігаючих орієнтацію гомеоморфізмів $h\colon (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, b)$ та $\phi\colon (\mathbb{R}, f(a)) \to (\mathbb{R}, g(b))$, що $\phi \circ f = g \circ h$.*

***Зауваження* 1.** В означенні топологічної еквівалентності не обов'язково вимагати, щоб ϕ та h зберігали орієнтацію, але в даній роботі ми завжди накладаємо таку умову.

Наступна лема легко доводиться.

Лема 3. *Нехай $f\colon (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$ та $g\colon (\mathbb{R}, b) \to \mathbb{R}$ — два паростки неперервних функцій. Припустимо також, що виконується одна з таких умов*:

1) *f та g строго монотонні в околах точок a та b відповідно*;

2) *точки a та b є ізольованими локальними максимумами* (*мінімумами*) *функцій f та g відповідно.*

Тоді f та g топологічно еквівалентні.

Означення 2. *Дві неперервні функції $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ та $g\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують такі зберігаючі орієнтацію гомеоморфізми*

$$h\colon (a, b) \to (c, d), \qquad \phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

що $\phi \circ f = g \circ h$, тобто діаграма

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ (c,d) & \xrightarrow{\ g\ } & \mathbb{R} \end{array}$$

є комутативною.

Нагадаємо результати про класифікацію функцій на числовій прямій із точністю до топологічної еквівалентності.

Означення 3 [6]**.** *Узагальненою змійкою довжини k, або просто k-змійкою називатимемо довільну послідовність з k чисел $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Дві k-змійки $\{A_1, \ldots, A_k\}$ та $\{B_1, \ldots, B_k\}$ назвемо еквівалентними, якщо виконано таку умову*: $A_i < A_j$ *тоді і тільки тоді, коли* $B_i < B_j$.

Очевидно, що з цієї умови випливає, що $A_i = A_j$ тоді і тільки тоді, коли $B_i = B_j$.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що має лише скінченну кількість локальних екстремумів $x_1, \ldots, x_n$ і є строго монотонною на доповнювальних інтервалах. Зокрема, існують скінченні або нескінченні границі $A_0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ і $A_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Позначимо $A_i = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді послідовність чисел $\xi(f) = \{A_0, \ldots, A_{n+1}\}$ називатимемо *змійкою, асоційованою з f.*

Наступне твердження є відомим і легко доводиться. Воно неявно сформульване у [6, 7].

Лема 4. *Нехай $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервні функції, кожна з яких має рівно k локальних екстремумів для деякого $k \geq 0$, і є строго монотонними на доповнювальних інтервалах. Функції f та g будуть топологічно еквівалентними тоді і лише тоді, коли відповідні змійки $\xi(f)$ та $\xi(g)$ є еквівалентними.*

Означення 4. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і μ — ймовірнісна міра на $[-1, 1]$. Скажемо, що f є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ, якщо існує $\varepsilon > 0$, таке що для всіх $\alpha \in (0, \varepsilon)$ функції f та f_α є топологічно еквівалентними.*

Аналогічно можна дати означення локальної топологічної стійкості усереднень відносно міри μ. Нехай $f : (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$ — паросток неперервної функції в точці $a \in \mathbb{R}$. Це означає, що f — неперервна функція, визначена на інтервалі $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ для деякого ε. Тоді якщо $\alpha < \varepsilon/2$, то з формули (1) випливає, що усереднення f_α коректно визначене на інтервалі $(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$. Більш того, його паросток у точці a, очевидно, залежить тільки від паростка f у цій точці.

Зауваження 2. Паростки f та f_α в точці a, взагалі кажучи, не є топологічно еквівалентними. Наприклад, якщо a — ізольована точка мінімуму для f, то f_α також може мати ізольовану точку мінімуму b, близьку до a, але відмінну від a. Тоді паростки f та f_α в точці a не є топологічно еквівалентними, але, згідно з лемою 3, обмеження f на деякий окіл (c_1, c_2) точки a

буде топологічно еквівалентним обмеженню f_α на деякий окіл (d_1, d_2) точки b. Ці міркування приводять до такого означення.

Означення 5. *Скажемо, що паросток $f\colon (\mathbb{R}, a) \to \mathbb{R}$ є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожного $\alpha \in (0, \varepsilon)$ виконується наступна умова*:

існують $c_1, c_2, d_1, d_2 \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, залежні від α і такі, що $c_1 < a < c_2$, $d_1 < d_2$, а обмеження

$$f|_{(c_1,c_2)}\colon (c_1, c_2) \to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha|_{(d_1,d_2)}\colon (d_1, d_2) \to \mathbb{R}$$

є топологічно еквівалентними.

У даній роботі отримано достатні умови для топологічної стійкості усереднень кусково-диференційовних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зі скінченним числом екстремумів відносно дискретних мір зі скінченними носіями.

Наступна теорема показує, що для функцій «загального положення» зі скінченним числом локальних екстремумів із локальної стійкості в околах екстремумів випливає глобальна стійкість.

Теорема 1. *Нехай μ — ймовірнісна міра на $[-1, 1]$ і $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що має лише скінченну кількість локальних екстремумів $x_1, \ldots, x_n$. Як і вище, позначимо*

$$A_0 = \lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad A_i = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad A_{n+1} = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) *числа $A_1, \ldots, A_n$ попарно різні і також відрізняються від A_0 та A_{n+1};*

2) *для кожного $i = 1, \ldots, n$ паросток $f\colon (\mathbb{R}, x_i) \to \mathbb{R}$ у точці x_i є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ.*

Тоді функція f також є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ.

Доведення. Достатньо знайти таке $\varepsilon > 0$, щоб змійки $\xi(f)$ та $\xi(f_\alpha)$ були еквівалентними для всіх $\alpha \in (0, \varepsilon)$. Тоді з леми 3 випливатиме, що f та f_α є топологічно еквівалентними, а тому f буде топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ.

Оскільки f має лише скінченне число локальних екстремумів, то з умови 2 та леми 1 випливає існування такого $\varepsilon > 0$, що для всіх $\alpha \in (0, \varepsilon)$ усереднення f_α також має рівно n локальних екстремумів. Нехай $\xi(f_\alpha) = \{B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}\}$ — змійка для f_α.

Згідно з лемою 2, $A_0 = B_0$ і $A_{n+1} = B_{n+1}$. Більш того, з нерівностей (2) випливає, що можна зменшити ε так, щоб з умови $A_i < A_j$ випливало $B_i < B_j$ для всіх $i \neq j$.

Але за умовою 1 числа $A_1, \ldots, A_n$ попарно різні і також відрізняються від A_0 та A_{n+1}. Тому з $A_i < A_j$ (відповідно, $A_i = A_j$) випливає $B_i < B_j$ (відповідно, $B_i = B_j$) для всіх $i = 0, \ldots, n+1$. Таким чином, змійки $\xi(f)$ та $\xi(f_\alpha)$ еквівалентні, що і потрібно було довести.

4. Топологічна стійкість паростків відносно усереднень. Нехай $\varepsilon > 0$ і $f\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ — така неперервна функція, що 0 є ізольованим локальним мінімумом, до того ж f строго спадає на $(-\varepsilon, 0]$ та строго зростає на $[0, \varepsilon)$. Позначимо

$$f_L = f|_{(-\varepsilon,0]}\colon (-\varepsilon, 0] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_R = f|_{[0,\varepsilon)}\colon [0, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Лема 5. *Нехай μ — ймовірнісна міра на $[-1, 1]$. Тоді кожна з наступних умов гарантує, що паросток f у точці 0 є локально стійким відносно усереднень за мірою μ:*

1) *f є строго опуклою*;

2) *f належить класу C^1 на $(-\varepsilon, 0) \cup (0, +\varepsilon)$ і f' строго зростає на $(-\varepsilon, 0) \cup (0, +\varepsilon)$*;

3) *f належить класу C^2 в околі 0 і $f''(0) > 0$.*

Доведення. Очевидно, що мають місце імплікації 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1), тому достатньо довести умову 1.

Нехай $\alpha < 2\varepsilon$. Згідно з лемою 1, усереднення f_α також є строго опуклою функцією, а тому має єдину точку мінімуму, як і f. Тоді, згідно з лемою 3, f та f_α є топологічно еквівалентними, а отже, паросток f у точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ.

***Зауваження* 3.** За умови 3 леми 5 гомеоморфізми h та ϕ такі, що $\phi \circ f = f_\alpha \circ h$ можна вважати дифеоморфізмами. Дійсно, нехай f належить класу C^2 в околі 0 і $f''(0) > 0$. Тоді для досить малих $\alpha > 0$ функція f_α також належить класу C^2, має єдину точку мінімуму і $f''_\alpha > 0$. Це означає, що f та f_α є функціями Морса, а тому, згідно з лемою Морса, h та ϕ можна вибрати дифеоморфізмами (див. [8], теорема II.6.9, твердження III.2.2).

5. Основний результат. Нехай μ — дискретна ймовірнісна міра зі скінченним носієм $t_k < t_{k-1} < \ldots < t_1$ на $[-1, 1]$. Покладемо $p_i = \mu(t_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Тоді $p_i > 0$ і $p_k + \ldots + p_1 = 1$.

Далі вважатимемо, що функція $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ належить класу C^1 на $(-\varepsilon, 0) \cup (0, +\varepsilon)$, до того ж існують скінченні або нескінченні границі

$$L = \lim_{x \to 0-0} f'_L(x), \qquad R = \lim_{x \to 0+0} f'_R(x). \tag{5}$$

Якщо L та R є скінченними, то для кожного $j = 1, \ldots, k-1$ покладемо

$$X_j = L(p_1 + \ldots + p_j) + R(p_{j+1} + \ldots + p_k),$$

Тоді

$$L \; < \; X_{k-1} \; < \; X_{k-2} \; < \; \ldots \; < \; X_1 \; < \; R.$$

Теорема 2. *Припустимо, що виконується одна з таких умов*:

(a) *обидві границі L та R є скінченними, і $X_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, k-1$;*

(b) *одна з границь L або R є нескінченною, а друга — скінченною.*

Тоді паросток f у точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ.

Щоб зробити доведення теореми 2 більш прозорим, ми спочатку сформулюємо і доведемо частинний випадок.

Лема 6. *Нехай μ — така дискретна міра на $[-1, 1]$, що $\mu(-1) = \mu(1) = \dfrac{1}{2}$, а отже*

$$f_\alpha(x) = \frac{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} f_L(x+\alpha) + f_L(x-\alpha), & x \in (-\varepsilon+\alpha, -\alpha), \\ f_L(x+\alpha) + f_R(x-\alpha), & x \in [-\alpha, \alpha], \\ f_R(x+\alpha) + f_R(x-\alpha), & x \in (\alpha, \varepsilon-\alpha), \end{cases}$$

див. (4). *Припустимо, що обидві границі L та R є скінченними, до того ж L, R та $L + R$ не дорівнюють 0. Тоді паросток f у точці 0 є топологічно стійким відносно усереднень за мірою μ.*

Зауважимо, що за умов на міру μ в лемі 6 маємо $k = 2$, $p_2 = p_1 = \dfrac{1}{2}$, а отже,

$$X_1 = \frac{1}{2}(L + R) \neq 0. \tag{6}$$

Тому лема 6 дійсно є частинним випадком теореми 2.

***Доведення леми* 6.** Досить знайти таке $\delta > 0$, що для всіх $\alpha \in (0, \delta/2)$ функція f_α матиме єдину точку мінімуму, як і f. Тоді за лемою 3 f та f_α будуть топологічно еквівалентними.

Оскільки границі (5) є скінченними, то похідні f'_L та f'_R неперервно продовжуються на відрізки $[-\varepsilon, 0]$ та $[0, \varepsilon]$ відповідно, так що $f'_L(0) = L$ та $f'_R(0) = R$. Тоді з (6) і неперервності f'_L та f'_R випливає існування такого $\delta \in (0, \varepsilon)$, що для довільних x, $y \in (0, \delta)$ виконується нерівність

$$f'_L(-x) + f'_R(y) \neq 0.$$

За умовою f_L монотонно спадає на $(-\varepsilon, 0)$, а f_R монотонно зростає на $(0, \varepsilon)$. Тому, згідно з лемою 1, f_α монотонно спадає на $(-\varepsilon+\alpha, -\alpha)$ і монотонно зростає на $(\alpha, \varepsilon-\alpha)$. Ми покажемо, що f_α є строго монотонною на $(-\alpha, \alpha)$, а тому f_α матиме єдину точку мінімуму на одному з кінців $[-\alpha, \alpha]$ в залежності від знака виразу $L + R$.

Для визначеності вважатимемо, що $L + R > 0$, а отже, $f'_L(-x) + f'_R(y) > 0$ для всіх x, $y \in (0, \delta)$. Тоді якщо $\alpha \in (0, \delta/2)$ і $x \in (-\alpha, \alpha) \subset (-\delta/2, \delta/2)$, то

$$-\delta \ < \ x - \alpha \ < \ 0 \ < \ x + \alpha \ < \ \delta,$$

а тому

$$f'_\alpha(x) = f'_L(x + \alpha) + f'_R(x - \alpha) > 0.$$

Таким чином, f_α строго зростає на $[-\alpha, \alpha]$. З іншого боку, f_α строго спадає на $[-\varepsilon + \alpha, -\alpha]$ і строго зростає на $[\alpha, \varepsilon - \alpha]$, а отже, f_α має єдину точну мінімуму $x = -\alpha$.

Лему 6 доведено.

Покажемо, що умова (6) є суттєвою.

Контрприклад. Нехай $f(x) = |x|$. Тоді $f_L(x) = -x$, $f_R(x) = x$, $L = f'_L(0) = -1$ і $R = f'_R(0) = +1$, а отже,

$$L + R = -1 + 1 = 0,$$

тобто умова (6) не виконується. В цьому випадку для довільного $\alpha > 0$

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\big(|x + \alpha| + |x - \alpha|\big) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, -\alpha), \\ \alpha, & x \in [-\alpha, \alpha], \\ x, & x \in (\alpha, +\infty). \end{cases}$$

Таким чином, f_α є сталою на інтервалі $[-\alpha, \alpha]$, а отже, вона не є топологічно еквівалентною f.

6. Доведення теореми 2. Якщо $k = 1$, то $f_\alpha(x) = f(x - t_1\alpha)$, а тому f та f_α є топологічно еквівалентними.

Отже, вважатимемо, що $k \geq 2$. Досить показати, що існує таке $\delta > 0$, що при $\alpha \in (0, \delta/2)$ функція f_α має єдину точку мінімуму, як і f. Тоді за лемою 3 f та f_α будуть топологічно еквівалентними.

Очевидно, що f_α задається формулою

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} f_L(x - t_i\alpha)p_i, & x \in (-\varepsilon+\alpha, t_k\alpha), \\ \sum\limits_{i=1}^{j} f_L(x - t_i\alpha)p_i + \sum\limits_{i=j+1}^{k} f_R(x - t_i\alpha)p_i, & x \in [t_{j+1}\alpha, t_j\alpha), \\ & k-1 \geq j \geq 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} f_R(x - t_i\alpha)p_i, & x \in [t_1\alpha, \varepsilon - \alpha). \end{cases} \tag{7}$$

Дійсно, з умови $x \in (-\varepsilon + \alpha, t_k\alpha)$ випливає, що $x - t_k\alpha < 0$, а отже, $x - t_i\alpha < 0$ для всіх $i = 1, \ldots, k$. Тому значення $f_\alpha(x)$ визначається першим рядком формули (7).

Далі, умова $x \in [t_{j+1}\alpha, t_j\alpha)$ рівносильна тому, що $x - t_j\alpha < 0 \leq x - t_{j+1}\alpha$, а отже,

$$x - t_1\alpha \;<\; \ldots \;<\; x - t_j\alpha \;<\; 0 \;\leq\; x - t_{j+1}\alpha \;<\; \ldots \;<\; x - t_k\alpha.$$

Звідси випливає, що $f_\alpha(x)$ визначається другим рядком формули (7).

Аналогічно з умови $x \in [t_1\alpha, \varepsilon - \alpha)$ випливає, що $x - t_i\alpha \geq 0$ для всіх $i = 1, \ldots, k$, а тому значення $f_\alpha(x)$ визначається третім рядком формули (7).

За припущенням f_L монотонно спадає на $(-\varepsilon, 0)$, а f_R монотонно зростає на $(0, \varepsilon)$. Тому, згідно з лемою 1, f_α монотонно спадає на $(-\varepsilon + \alpha, t_k\alpha)$ і монотонно зростає на $(t_1\alpha, \varepsilon - \alpha)$. Ми покажемо, що для деякого $m \in \{1, \ldots, k\}$ функція f_α строго спадає на $(t_k\alpha, t_m\alpha)$ і строго зростає на $(t_m\alpha, t_1\alpha)$. Звідси випливатиме, що f_α має єдину точку мінімуму в $t_m\alpha$.

Для кожного $j = k-1, \ldots, 2, 1$ визначимо функцію $g_j : (0, \varepsilon)^k \to \mathbb{R}$ за формулою

$$g_j(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{j} f'_L(-x_i)\, p_i \;+\; \sum_{i=j+1}^{k} f'_R(x_i)\, p_i.$$

Лема 7. *Припустимо, що існують такі $\delta \in (0, \varepsilon)$ і $m \in \{1, \ldots, k\}$, що для всіх $(x_1, \ldots, x_k) \in$ $\in (0, \delta)^k$ виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} g_j(x_1, \ldots, x_k) &< 0, \qquad j \geq m, \\ g_j(x_1, \ldots, x_k) &> 0, \qquad j < m. \end{aligned} \tag{8}$$

Тоді для довільного $\alpha \in (0, \delta/2)$ функція f_α має єдину точку мінімуму $x = t_m\alpha$.

Доведення. Нехай $\alpha \in (0, \delta/2)$, $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ і $x \in (t_{j+1}\alpha, t_j\alpha)$. Тоді, згідно з формулою (7),

$$f'_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{j} f'_L(x + t_i\alpha)p_i + \sum_{i=j+1}^{k} f'_R(x + t_i\alpha)p_i =$$

$$= g_j\big(-x - t_1\alpha, \;\ldots,\; -x - t_j\alpha,\; x + t_{j+1}\alpha, \;\ldots,\; x + t_k\alpha\big).$$

Зауважимо, що $|x| < \alpha$, а отже,

$$|x - t_i\alpha| \leq |x| + \alpha < 2\alpha < \delta, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Тому з (8) випливає, що $f'_\alpha(x) < 0$ для $x < t_m\alpha$ і $f'_\alpha(x) > 0$ для $x > t_m\alpha$.

Таким чином, похідну f'_α визначено на $(t_k\alpha, t_1\alpha)$, за винятком, можливо, скінченного числа точок вигляду $t_i\alpha$, $i = 1, \ldots, k$; і подхідна набуває від'ємних значень на $(t_k\alpha, t_m\alpha)$ і додатних на $(t_m\alpha, t_1\alpha)$. Тому f_α має єдину точку мінімуму $x = t_m\alpha$, що і треба було довести.

Залишилося перевірити, що кожна з умов a) та b) теореми 2 гарантує виконання нерівностей (8).

a) Припустимо, що границі L та R є скінченними і

$$X_j = L(p_1 + \ldots + p_j) + R(p_{j+1} + \ldots + p_k) \neq 0 \tag{9}$$

для всіх $j = 1, \ldots, k-1$. Із скінченності L та R випливає, що похідні f'_L та f'_R неперервно продовжуються на відрізки $[-\varepsilon, 0]$ та $[0, \varepsilon]$ відповідно, так що $f'_L(0) = L$ та $f'_R(0) = R$. Тоді знайдеться таке $m \in \{1, \ldots, k-1\}$, що

$$L < X_k < \ldots < X_{m+1} < 0 < X_m < \ldots < X_1 < R. \tag{10}$$

Очевидно, що

$$X_j = g_j(0, \ldots, 0),$$

а тому нерівності (8) випливають з (9), (10) та неперервності f'_L та f'_R.

b) Припустимо, що $|L| < \infty$, а $R = +\infty$. Тоді можна знайти таке $\delta > 0$, що $g_j(x_1, \ldots, x_k) >$ > 0 для всіх $(x_1, \ldots, x_k) \in (0, \delta)^k$ і $j = 1, \ldots, k-1$. Це означає, що виконуються умови леми 7 для $m = k$, а отже, f_α матиме єдину точку мінімуму $x = t_k\alpha$.

Аналогічно у випадку $L = -\infty$ і $|R| < \infty$ функція f_α матиме єдину точку мінімуму $x = t_1\alpha$.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: – Наука, 1981. – 640 с.
2. *Crounse Kenneth R.* Methods for image processing and pattern formation in celluar neurai networks: a tutorial // Trans. Circ. and Systems-1: Fundam. Theory and Appl. – 1995. – **42**, № 10. – P. 583 – 601.
3. *Milanfar P.* A tour of modern image filtering: new insights and methods, both practical and theoretical // Signal Proc. Mag. – 2013. – **30**(1). – P. 106 – 128.
4. *Bandt C., Pompe B.* Permutation entropy: A natural complexity measure for time series // Phys. Rev. Lett. – 2002. – **88**. –№ 17.
5. *Antoniouk A., Keller K., Maksymenko S.* Kolmogorov – Sinai entropy via separation properties of order-generated σ-algebras // Discrete Contin. Dynam. Syst. – 2014. – **34**, № 5. – P. 1793 – 1809.
6. *Арнольд В. И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, № 1(283). – С. 3 – 45.
7. *Thom R.* L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome // Topology. – 1965. – **3**, № 2 (suppl). – P. 297 – 307.
8. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. – М.: Мир, 1977. – 292 с.

Одержано 31.08.15