УДК 517.9

А. К. Прикарпатський (Ун-т науки і технологій Гірничо-металургійної акад. м. Кракова, Польща; Держ. пед. ун-т ім. І. Франка, Дрогобич Львівської обл., Україна)

ПРО ЦІЛКОМ ІНТЕГРОВНІ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ТИПУ КАЛОДЖЕРО ІНТЕГРОВНИХ ЗА ЛАКСОМ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ І ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ КОПРИЄДНАНІ ОРБІТИ ТИПУ МАРКОВА*

The Calogero-type matrix discretization scheme is applied to THE construction of Lax-type integrable discretizations of one sufficiently wide class of nonlinear integrable dynamical systems on functional manifolds. Their Lie-algebraic structure and complete integrability related to the coadjoint orbits on the Markov coalgebras is discussed. It is shown that the set of conservation laws and the associated Poisson structure can be obtained as a byproduct of the proposed approach. Based on the quasirepresentation property of Lie algebras, the limiting procedure of finding nonlinear dynamical systems on the corresponding functional spaces is demonstrated.

Схема матричной дискретизации типа Калоджеро применяется для построения интегрируемые по Лаксу дискретизаций одного достаточно широкого класса нелинейных интегрируемых динамических систем на функциональных многообразиях. Исследуются их Ли-алгебраическая структура и полная интегрируемость, связанная с кописоединениными орбитами на коалгебрах Маркова. Показано, что в пределах данного подхода можно получить связанные множество законов сохранения и пуассоновскую структуру. На основании квазипредставлений алгебры Ли продемонстрирована процедура нахождения нелинейных динамических систем на соответствующих функциональных пространствах.

1. Вступ: дискретизація і пов'язаний розклад алгебри Маркова. Розпочнемо з означення. Одновимірною дійснозначною дискретною нелінійною динамічною системою на многовиді $M \subset l_2(\mathbb{Z};\mathbb{R}^m)$ для деякого скінченного $m \in \mathbb{Z}_+$ є довільне еволюційне рівняння, яке можна записати у вигляді

$$\frac{du}{dt} = K[u], \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр, $u \in M$ і $K\colon M \to T(M)$ — достатньо гладке відображення [2, 4] на многовиді M. Дуже часто рівняння (1) можна отримати як стандартну дискретизацію [1, 9, 11, 16, 20] заданої гладкої нелінійної диференціальної системи

$$\frac{d\mathrm{u}}{d}t = \mathcal{K}[\mathrm{u}] \tag{2}$$

на функціональному підмноговиді $\mathcal{M} \subset L_2(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$, породженому векторним полем $\mathcal{K}\colon \mathcal{M} \to T(\mathcal{M})$. А саме, існують такі попарно відмінні точки сітки $x_j \in \mathbb{R}$ для $j \in \mathbb{Z}$, що відповідні вектор $\{\mathrm{u}(x_j) \in \mathbb{R}^m : j \in \mathbb{Z}\} = u \in M$ і дискретизація для (2) збігаються з виразом (1).

Інший підхід до дискретизації системи (2) ґрунтується на схемі Калоджеро [8, 9] конструювання скінченновимірних квазізображень для нескінченновимірної алгебри Гейзенберга – Вейля операторів $\mathfrak{h} := \{\hat{x}, D_x, \hat{1} : x \in \mathbb{R}\}$, де $D_x := \dfrac{\partial}{\partial x}$ у деякому функціональному підмноговиді $\mathcal{M}_0 \subset C^\infty([a,b];\mathbb{R}) \cap L_2([a,b];\mathbb{R})$ диференційовних функцій, оскільки за відомою теоремою фон Неймана [21, 31] не існує точних зображень $\mathfrak{h}$ у скінченновимірному функціональному підпросторі $\mathcal{M}_0^N \subset \mathcal{M}_0$ для будь-якого $N \in \mathbb{Z}_+$. Наприклад, будь-яку скалярну функцію $f \in \mathcal{M}_0$ на інтервалі $[a,b] \subset \mathbb{R}$ можна інтерполювати [8, 31] у поліноміальному вигляді

* Частково підтримано Університетом науки і технологій Гірничо-металургійної академії м. Кракова.

$$f(x) \to f_N(x) := \sum_{j=1}^{N} (f(x_j)\rho_j^{-1}) e_j(x),$$

$$e_j(x) := \prod_{i=\overline{1,N}, i\neq j} (x - x_i), \rho_j := \prod_{i=\overline{1,N}, i\neq j} (x_j - x_i),$$

а також її похідну

$$D_x f(x) \to D_x f_N(x) = \sum_{i,j=\overline{1,N}} Z_{ij}(f(x_j)\rho_j^{-1}) e_i(x)),$$

де $f_N(x) \in \mathcal{M}_0^N$ розглядається відносно поліноміальної бази $\{e_j(x) \in \mathcal{M}_0^N : j = \overline{1,N}\}$. Тоді відоме квазізображення Калоджеро [8, 12, 13, 18, 22] алгебри Гейзенберга – Вейля $\mathfrak{h}$ отримується наступним чином:

$$\begin{gathered} \mathrm{End}\,(\mathcal{M}_0) \ni \hat{x} \to X := \mathrm{diag}\,\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \in \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R}), \\ \mathrm{End}\,(\mathcal{M}_0) \ni \hat{1} \to I := \mathrm{diag}\,\{1, 1, \ldots, 1\} \in \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R}), \\ \mathrm{End}\,(\mathcal{M}_0) \ni D_x \to Z := \Big\{ Z_{ij} := (x_i - x_j)^{-1}, i \neq j = \overline{1,N}; \\ Z_{ii} := \sum_{j=1, j\neq i}^{N} (x_i - x_j)^{-1} : i = \overline{1,N} \Big\} \in \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R}), \end{gathered} \tag{3}$$

де точки сітки інтерполяції $x_i \neq x_j \in \mathbb{R}$, $i \neq j = \overline{1,N}$, є різними і задовольняють у спеціально визначеному скінченновимірному гільбертовому просторі $l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R})$ у сильній границі канонічне Лі-алгебраїчне співвідношення

$$\lim_{N\to\infty} ([Z, X] - I) = 0. \tag{4}$$

Матричні квазізображення (3) дозволяють побудувати примітивну матричну дискретизацію нелінійної динамічної системи

$$fracdU^{(m)}dt = \mathcal{K}\left(U^{(m)}, [Z^{(m)}, U^{(m)}], [Z^{(m)}, [Z^{(m)}, U^{(m)}]], \ldots [Z^{(m)}, \underbrace{\ldots, [Z^{(m)}, U^{(m)}]]}_{(p\text{-разів})} \right), \tag{5}$$

де матриці

$$\begin{gathered} U^{(m)} := u(X^{(m)}) = \mathrm{diag}\,(u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_N)) \in \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R})^{\otimes m}, \\ Z^{(m)} := \underbrace{Z \otimes Z \otimes \ldots}_{(m\text{-разів})} \otimes Z \in \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R})^{\otimes m} \end{gathered}$$

належать до тензорного добутку матричних просторів

$$\mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R})^{\otimes m} := \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R}) \otimes \mathrm{End}\ l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R}) \underbrace{\otimes \ldots}_{(m-\mathrm{i})} \otimes \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R}).$$

При виведенні матричного рівняння (5), ми врахували, що $\mathcal{K}[\mathrm{u}] := \mathcal{K}(\mathrm{u}, D_x\mathrm{u}, D_x^2\mathrm{u}, \ldots D_x^p\mathrm{u})$ для деякого фіксованого $p \in \mathbb{Z}_+$ і для довільного операторного відображення $\varphi_N(\hat{x}) : \mathcal{M}_0^N \to \mathcal{M}_0^N$ використали властивість квазізображень Калоджеро

$$\mathrm{End}\,(\mathcal{M}_0) \ni (D_x^n \varphi_N)(\hat{x}) \to \underbrace{[Z, [Z, [Z, \ldots, [Z}_{(n\text{-разів})}, \varphi(X)]]] \ldots] \in \mathrm{End}\, l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R}),$$

яка має місце для довільних операторних похідних $(D_x^n \varphi_N)(\hat{x}) \colon \mathcal{M}_0^N \to \mathcal{M}_0^N$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Нижче ми врахуємо той факт [19], що квазізображення (3) належать відповідно до марковського розкладу загальної алгебри Лі у пряму суму $\mathrm{gl}\,(N;\mathbb{R}) := \mathfrak{g} = \mathrm{M}\,(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{E}\,(\mathfrak{g})$:

$$I, X \in \mathrm{E}(\mathfrak{g}), Z \in \mathrm{M}(\mathfrak{g}),$$

де, за означенням, лінійні підпростори

$$\begin{gathered}\mathrm{M}(\mathfrak{g}) := \{\mathrm{M}(A) \in \mathfrak{g} \colon \mathrm{M}(A) = A - \mathrm{diag}\,(eA)\},\\ \mathrm{E}(\mathfrak{g}) := \{\mathrm{E}(A) \in \mathfrak{g} \colon \mathrm{E}(A) = \mathrm{diag}\,(eA)\}, \quad e := (1, 1, \ldots, 1) \in l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R})^*,\end{gathered} \tag{6}$$

є підалгебрами Лі алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Введемо, за означенням, проекції $\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})} \colon \mathfrak{g} = \mathrm{M}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, $\mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})} : \mathfrak{g} = \mathrm{E}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$. Тоді згідно зі стандартним R-матричним підходом [5, 6, 14, 27, 29] вираз

$$[X, Y]_{\mathrm{R}} := [\mathrm{R}X, Y] + [X, \mathrm{R}Y], \quad \mathrm{R} := \frac{1}{2}\,(\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})} - \mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})}),$$

для довільних $X, Y \in \mathfrak{g}$ задає на $\mathfrak{g}$ новий комутатор Лі, який породжує на просторі $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ деформовану дужку Лі – Пуассона

$$\{\gamma, \eta\}_{\mathrm{R}}(\alpha) := \langle \alpha, [\nabla\gamma(\alpha), \nabla\eta(\alpha)]_{\mathrm{R}} \rangle = \big\langle \alpha, [\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}\nabla\gamma(\alpha), \mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}\nabla\eta(\alpha)] \big\rangle \tag{7}$$

для $\gamma, \eta \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ і будь-якого $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, що узагальнює класичну дужку Лі – Пуассона

$$\{\gamma, \eta\}(\alpha) := \langle \alpha, [\nabla\gamma(\alpha), \nabla\eta(\alpha)] \rangle = \langle \alpha, [\nabla\gamma(\alpha), \nabla\eta(\alpha)] \rangle \tag{8}$$

на $\mathfrak{g}$. Тут білінійний tr-функціонал на $\mathfrak{g}$

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}\,(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{9}$$

є невиродженим та Ad-інваріантним. Оскільки відносно цього tr-функціонала (9) $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$, дужка Пуассона (7) породжує для будь-якої гамільтонової функції $H \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ таку динамічну систему на довільному $\alpha \in \mathfrak{g}$:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})^\perp}[\mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})}\nabla H(\alpha), \alpha],$$

де $\mathrm{P}^*_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})} \simeq \mathrm{P}_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})^\perp}$ та $\mathrm{P}^*_{\mathrm{E}(\mathfrak{g})} \simeq \mathrm{P}_{\mathrm{M}(\mathfrak{g})^\perp}$. Ця конструкція спрощується у випадку, коли гамільтонова функція $H \in \mathrm{I}(\mathfrak{g})$ є функцією Казимира відносно класичної дужки Лі – Пуассона (8), яка задовольняє умову

$$[\alpha, \nabla H(\alpha)] = 0$$

для будь-якого $\alpha \in \mathfrak{g}$.

Серед нелінійних диференціальних динамічних систем (2) існує широкий клас нелінінйних еволюційних рівнянь, які є інтегровними за Лаксом [5, 9, 14, 20, 23, 27] і дискретизації яких є часто дуже важливими для їх числового аналізу та різних застосувань. Однак у загальному випадку безпосередньо дискретизована матрична динамічна система (5) не успадковує *a priori* інтегровність за Лаксом для (2). Тому природно виникає питання: *як побудувати a priori інтегровну за Лаксом матричну дискретизацію заданої інтегровної за Лаксом нелінійної динамічної системи* (2)?

Оскільки зображення Лакса імовірно інтегровних динамічних систем (2) залежать від довільного спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, то варто вивчити їхні відповідні матричні квазізображення, що також залежать від спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, як і базові оператори матричних зображень, які належать відповідно до розкладу у пряму суму Маркова загальної алгебри Лі $gl(N;\mathbb{R}) := \mathfrak{g} = \mathrm{M}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{E}(\mathfrak{g})$. Це можна зробити ефективно за допомогою метризованої алгебри петель [5, 6, 14, 27] $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\lambda, \lambda^{-1}]]$ і відповідних пов'язаних інтегровних за Лаксом пуассонових потоків на ній.

Нижче ми відповімо на поставлене питання у випадку спеціального класу інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах з використанням схеми дискретизації типу Калоджеро і проаналізуємо копри\-єднані орбіти типу Маркова за допомогою пов'язаних Лі-алгебраїчних підходів.

2. Лі-алгебраїчні основи та лінійні матричні спектральні задачі типу Калоджеро. Введемо метризовану алгебру петель $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\lambda, \lambda^{-1}]]$, породжену алгеброю Лі $\mathfrak{g} : = gl(N;\mathbb{R})$ і рядами Лорана

$$\tilde{\mathfrak{g}} : = \left\{ X(\lambda) = \sum_{j \ll \infty} X_j \lambda^j : X_j \in \mathfrak{g},\ \mathbb{Z} \ni j \ll \infty, \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

де $j \ll \infty$ означає зміну індексу від $-\infty$ до будь-якого скінченного цілого числа. Її наділено стандартною матричною дужкою Лі

$$[X(\lambda), Y(\lambda)] := \sum_{s \ll \infty} \lambda^s \left(\sum_{j+k=s} [X_j, Y_k] \right), \tag{10}$$

визначеною для будь-якого $X(\lambda), Y(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$, і найпростіший Ad-інваріантний скалярний добуток

$$\langle X(\lambda), Y(\lambda) \rangle_{-1} = \mathrm{Tr}\,(X(\lambda)Y(\lambda)) := \mathrm{res}\,\mathrm{tr}\,(X(\lambda)Y(\lambda))$$

задовольняє для всіх $X(\lambda), Y(\lambda)$ і $Z(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$ умову

$$\langle X(\lambda), [Y(\lambda), Z(\lambda)] \rangle_{-1} = \langle [X(\lambda), Y(\lambda)], Z(\lambda) \rangle_{-1}.$$

Розглянемо введений вище розклад Маркова (6) алгебри Лі $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} := \mathrm{M}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{E}(\mathfrak{g}), \tag{11}$$

де для будь-якого $X \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{M}(X) := X - \mathrm{diag}\,(eX), \quad \mathrm{E}(X) := \mathrm{diag}\,(eX), \quad e := (1, 1, \ldots, 1) \in l_2(\mathbb{Z}_N)^*,$$

і складові $\mathrm{M}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ і $\mathrm{E}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ є такими матричними підалгебрами Лі, що $[\mathrm{M}(\mathfrak{g}), \mathrm{M}(\mathfrak{g})] \subset \mathrm{M}(\mathfrak{g})$ і $[\mathrm{E}(\mathfrak{g}), \mathrm{E}(\mathfrak{g})] = 0 \in \mathrm{E}(\mathfrak{g})$.

Наступне спостереження є ключовим для нашого аналізу: алгебра петель $\tilde{\mathfrak{g}}$ успадковує розклад Маркова (11) у дві підалгебри Лі:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_-, \tag{12}$$

де проекція $P_+ \tilde{\mathfrak{g}} := \tilde{\mathfrak{g}}_+$,

$$\tilde{\mathfrak{g}}_+ := \left\{ X(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} X_j \lambda^j : X_0 \in \mathrm{M}(\mathfrak{g}), X_j \in \mathfrak{g}, \mathbb{N} \ni j \ll \infty, \lambda \in \mathbb{C} \right\}, \tag{13}$$

та проекція $\mathrm{P}_- \tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_-$,

$$\tilde{\mathfrak{g}}_- := \left\{ X(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_-} Y_j \lambda^j : Y_0 \in \mathrm{E}\,(\mathfrak{g}), Y_j \in \mathfrak{g}, j \in \mathbb{Z}_- \backslash \{0\}\ , \lambda \in \mathbb{C} \right\}, \tag{14}$$

задовольняють комутаторні співвідношення $[\tilde{\mathfrak{g}}_+, \tilde{\mathfrak{g}}_+] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_+$ і $[\tilde{\mathfrak{g}}_-, \tilde{\mathfrak{g}}_-] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_-$. Неважко встановити, що спряжені простори $\tilde{\mathfrak{g}}_+^*$ і $\tilde{\mathfrak{g}}_-^*$ до підалгебр Лі (13) і (14) мають вигляд

$$\tilde{\mathfrak{g}}_+^* \simeq \tilde{\mathfrak{g}}_-^\intercal = \left\{ Y(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_-} Y_j \lambda^j : Y_0 \in \mathrm{E}(\mathfrak{g})^\perp,\ Y_j \in \mathfrak{g},\ j \in \mathbb{Z}_- \backslash \{0\},\ \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_-^* \simeq \tilde{\mathfrak{g}}_+^\intercal = \left\{ X(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} X_j \lambda^j : X_0 \in \mathrm{M}(\mathfrak{g})^\perp,\ X_j \in \mathfrak{g},\ \mathbb{N} \ni j \ll \infty,\ \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

де враховано, що

$$\mathrm{M}(\mathfrak{g})^* \simeq \mathrm{E}\,(\mathfrak{g})^\perp = \{Y \in \mathfrak{g} \colon \mathrm{diag}\,(Y) = 0\},$$

$$\mathrm{E}\,(\mathfrak{g})^* \simeq \mathrm{M}(\mathfrak{g})^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \colon X = q \otimes e,\ e := (1, 1, \ldots, 1) \in l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R})^*, q \in l_2(\mathbb{Z}_N; \mathbb{R})\}\,.$$

Розклад (12) дозволяє ввести класичну R-структуру на алгебрі петель $\tilde{\mathfrak{g}}$: для будь-якого $X(\lambda), Y(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$ комутатор

$$[X(\lambda), Y(\lambda)]_{\mathrm{R}} := ([\mathrm{R}X(\lambda), Y(\lambda)] + [X(\lambda), \mathrm{R}Y(\lambda)])$$

задовольняє властивість комутатора на алгебрі Лі, де лінійно-просторовий гомоморфізм $\mathrm{R}\colon \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ визначено для довільного $X(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}}$ таким чином:

$$\mathrm{R}X(\lambda) := \frac{1}{2}\,(\mathrm{P}_+ X(\lambda) - \mathrm{P}_- X(\lambda)).$$

Має місце така класична теорема (див., наприклад, [3, 5, 6, 15, 27, 30]).

Теорема (Адлера – Костанта – Саймза). *Нехай гладкі функціонали $\gamma, \eta \colon \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \mathbb{R}$ є функціоналами Казимира відносно дужки Пуассона* (10), *тобто*

$$[\nabla\gamma(l(\lambda)), l(\lambda)] = 0 = [\nabla\eta(l(\lambda)), l(\lambda)]$$

для будь-якого $l(\lambda) \in \mathfrak{g}^*$. Тоді для модифікованої дужки Лі – Пуассона

$$\{\gamma, \eta\} := \langle l(\lambda), [\nabla\gamma(l(\lambda)), \nabla\eta(l(\lambda))]_{\mathrm{R}} \rangle_{-1} \tag{15}$$

маємо

$$\{\gamma, \eta\} = 0$$

на усьому просторі $\tilde{\mathfrak{g}}^*$.

На основі розкладу (12) неважко знайти дії приєднаних операторів $\mathrm{P}_+^*: \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_-^{\intercal} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_-$ і $\mathrm{P}_-^*: \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_+^{\intercal} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_+$. Зокрема, в силу ототожнень $\tilde{\mathfrak{g}} \simeq \tilde{\mathfrak{g}}^*$ отримуємо рівності

$$\mathrm{P}_+^* = \mathrm{P}_{\tilde{\mathfrak{g}}_-^{\intercal}} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_-^{\intercal} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_- \tag{16}$$

та

$$\mathrm{P}_-^* = \mathrm{P}_{\tilde{\mathfrak{g}}_+^{\intercal}} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}_+^{\intercal} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_+. \tag{17}$$

Теорема 1 та рівності (16), (17) дозволяють побудувати широкий клас інтегровних за Ліувіллем динамічних систем [6, 27] на матричному підпросторі Маркова $\mathrm{E}(\mathfrak{g})$, якщо редукувати гамільтонове векторне поле

$$\frac{d}{dt}\,\alpha(\lambda) := \{H, \alpha(\lambda\} = [\mathrm{P}_+\nabla H(\alpha(\lambda)), \alpha(\lambda)] \tag{18}$$

на елементі $\alpha(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}} \simeq \tilde{\mathfrak{g}}^*$, породжене спеціально вибраним функціоналом Казимира $H: \tilde{\mathfrak{g}} \to$ $\to \mathbb{R}$. Останній розглядається відносно стандартної дужки Лі – Пуассона

$$\{\gamma, \eta\}_{\mathrm{Lie}} := \langle l(\lambda), [\nabla\gamma(l(\lambda)), \nabla\eta(l(\lambda))]\rangle_{-1} \tag{19}$$

для будь-яких гладких функціоналів γ, $\eta \in \mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

3. Дискретна апроксимація інтегровних за Лаксом еволюційних рівнянь. Розглянемо гладкі функціонали $\gamma_n^{(k)}: \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{Z}_+$, де

$$\gamma_n^{(k)} := \frac{1}{(n+1)}\left\langle \left(\alpha(\lambda)\lambda^{-|\alpha(\lambda)|}\right)^{n+1}, \lambda^{k+|\alpha(\lambda)|}\right\rangle_{-1} =$$
$$= \frac{1}{(n+1)}\,\mathrm{Tr}\left(\lambda^{k+|\alpha(\lambda)|}\left(\alpha(\lambda)\lambda^{-|\alpha(\lambda)|}\right)^{n}\right)$$

і $\alpha(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{g}} \simeq \tilde{\mathfrak{g}}^*$, до того ж $|\alpha(\lambda)|$ означає λ-порядок полінома $\alpha(\lambda)$. Очевидно, що вони є функціоналами Казимира відносно дужки Пуассона (19). Відповідні градієнти мають вигляд

$$\nabla\gamma_n^{(k)}(\alpha(\lambda)) = (\alpha(\lambda)\lambda^{-|\alpha(\lambda)|})^n\lambda^k.$$

Таким чином, можна побудувати нескінченну ієрархію нелінійних матричних динамічних систем

$$\frac{d\alpha(\lambda)}{dt_n^{(k)}} := \left[\mathrm{P}_+((\alpha(\lambda)\lambda^{-|\alpha(\lambda)|})^n\lambda^k), \alpha(\lambda)\right],$$

які, внаслідок їх алгебраїчної структури, слід розглядати як дискретні апроксимації відповідних еволюційних диференціальних рівнянь на функціональному многовиді M.

Приклад. Нехай $n = 2$ і $k = 4$. Наступне значення елемента $\mathrm{P}_+\nabla\gamma_2^{(4)}(\alpha(\lambda)) \in \tilde{\mathfrak{g}}_+$ на елементі $\alpha(\lambda) = \lambda^3 I + \lambda^2 U + \lambda V + Z$ дорівнює

$$\mathrm{P}_+\nabla\gamma_2^{(4)}(\lambda^3 I + \lambda^2 U\ + \lambda V + Z) = \lambda^4 I + 2\lambda^3 U +$$
$$+\lambda^2(2V + U^2) + \lambda(2Z + UV + VU) + \mathrm{M}(ZU + UZ).$$

З комутаторного співвідношення (18) отримуємо, що для будь-якого параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ має місце матричне рівняння

$$\frac{d}{dt}(\lambda^2 U + \lambda V + Z) = [2\lambda^3 U + \lambda^2(2V + U^2) +$$
$$+\lambda(2Z + UV + VU) + \mathrm{M}\,(ZU + UZ), \lambda^2 U + \lambda V + Z]. \tag{20}$$

Функціонали $H_m := \mathrm{Tr}\,(\lambda^3 I + \lambda^2 U + \lambda V + Z)^{m/3}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, є нетривіальними та інволютивними відносно дужки Пуассона (15) законами збереження дискретних матричних динамічних систем типу Рімана

$$\frac{dU}{dt} = -[Z, U^2], \quad \frac{dZ}{dt} = 0, \tag{21}$$
$$\frac{dV}{dt} = -[Z, VU + UV] + [UZ + ZU, V],$$

що випливає з (20). Дискретна матрична динамічна система (21), як наслідок з (4), є цілком інтегровною дискретною апроксимацією в граничному переході при $N \to \infty$ гідродинамічних рівнянь типу Рімана в частинних похідних

$$\frac{du}{d}t = -2uu_x, \quad \frac{dv}{dt} = -2u_x\, v. \tag{22}$$

Таким чином, щодо динамічної системи (22) можна сформулювати наступне твердження.

Твердження. *Динамічна система (22) допускає для будь-якого $N \in \mathbb{Z}_+$ цілком інтегровну матричну дискретизацію (21) із зображенням Лакса (20).*

Як простий наслідок з твердження, отримана вище динамічна система (22) є також інтегровною за Лаксом. Згідно із зображенням (20) гідродинамічна система рівнянь типу Бюргерса має скалярне зображення Лакса, спектральна частина якого задається лінійною „спектральною” задачею

$$\frac{df}{dx} + (\lambda^3 + \lambda^2 u + \lambda v)f = 0, \tag{23}$$

де можна вважати, що для $(u, v)^\intercal \in M$ і всіх $t \in \mathbb{R}$ $f(\cdot, \lambda) \in L_\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ для $\lambda \in \mathbb{C}$.

Враховуючи лінійну „спектральну” задачу (23) і нещодавній аналіз в [7], ми отримали, що гідродинамічна система рівнянь (22) належить до класу так званих інтегровних за Лаксом „темних” рівнянь, які вивчались раніше Б. Купершмідтом у [17] і мають у загальному випадку скінченну кількість законів збереження, але нескінченну ієрархію комутуючих симетрій. У наступних публікаціях будуть вивчатись їхні властивості та застосування розробленого вище підходу на основі дискретних апроксимацій типу Калоджеро до різних інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем.

4. Висновки. Спостереження, що дискретизація типу Калоджеро алгебри Гейзенберга–Вейля пов’язана з розкладом Маркова загальної алгебри Лі $\mathrm{gl}\,(N; \mathbb{R}), N \in \mathbb{Z}_+$, є цікавим і корисним для аналітичного конструювання цілком інтегровних дискретизацій інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. Показано, що в межах розвиненого підходу можна отримати пов’язані множину законів збереження та пуассонову структуру. ґрунтуючись на квазізображеннях алгебри Лі, продемонстровано процедуру знаходження нелінійних динамічних систем на відповідних функціональних просторах.

Автор висловлює подяку проф. Я. Цєсьліньскєму (Університет Бялостока, Польща) за співпрацю та обговорення, а також проф. Ф. Калоджеро (Університет Рима "La Sapienza”, Італія) за увагу до статті та корисні коментарі.

Література

1. *Ablowitz M., Ladik J.* Nonlinear differential-difference equations // J. Math. Phys. – 1975. – **16**, № 3. – P. 598 – 603
2. *Abraham R., Marsden J.* Foundation of mechanics. – Masachusets: The Benjamin/Cummings Publ. Co., 1978.
3. *Adler M.* On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structures of a Korteweg – de Vries Equation // Invent. Math. – 1979. – **50**. – P. 219 – 248.
4. *Arnold V. I.* Mathematical methods of classical mechanics. – New York: Springer, 1978.
5. *Blaszak M.* Multi-hamiltonian theory of dynamical systems. – Springer, 1998.
6. *Blackmore D., Prykarpatsky A. K., Samoylenko V. Hr.* Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and differential-geometrical integrability analysis. – New York: World Sci. Publ., 2012.
7. *Blackmore D., Prykarpatsky A. K.* Dark equations and their light integrability // J. Nonlinear Math. Phys. – 2014. – **21**, № 3. – P. 407 – 428.
8. *Calogero F., Franco E.* Numerical tests of a novel technique to compute the eigenvalues of differential operators // Nuovo cim. B. – 1985. – **89**. – P. 161 – 208.
9. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral transform and solitons. – Amsterdam: North-Holland, 1982. – 378 p.
10. *Cavalcante J., Mc. Kean H. P.* The classical shallow water equations // Physica D. – 1982. – **4**, № 2. – P.253 – 260.
11. *Cieslinski J. L., Prykarpatski A. K.* Discrete approximations on functional classes for the integrable nonlinear Schredinger dynamical system: A symplectic finite-dimensional reduction approach // J. Math. Anal. and Appl. – 2015. – **430**, № 1. – P. 279 – 295.
12. *Contesou E.* La $\mathbb{C}^*$-algebra d'une quasi-representation. C. r. Acad. sci. A. – 1997. – **324**. – P. 293 – 295.
13. *Connes A., Gromov M., Moscovici H.* Conjecture de Novikov et fibres presque plats // C. r. Acad. sci. A. – 1990. – **310**. – P. 273 – 277.
14. *Faddeev L. D., Takhtajan L. A.* Hamiltonian method in the theory of solitons. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
15. *Kostant B.* The solutions to a generalized Toda lattice and representation theory // Adv. Math. – 1979. – **34**. – P. 195 – 338.
16. *Kupershmidt B. A.* Discrete Lax equations and differential-difference calculus // Asterisque. – 1985. – **123**. – P. 5 – 212.
17. *Kupershmidt B. A.* Dark equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 2001. – **8** – P. 363 – 445.
18. *Lebedev A. V.* Quasi-crossed products and an isomorphism theorem for C^*-algebras, associated with discrete group representations // Doklady AN SSSR. – 1996. – **10**, № 5. – P. 40 – 43 (in Russian).
19. *Menon G.* Complete integrability of Shock Clustering and Burgers turbulence // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 2012. – **203**. – P. 853 – 882.
20. *Newell A.* Solitons in mathematics and physics. – Philadelphia: SIAM, 1986. – 250 p.
21. *von Neumann J.* Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik. – Berlin: Springer, 1932.
22. *Lustyk M., Janus J., Pytel-Kudela M., Prykarpatsky A. K.* The solution existence and convergence analysis for linear and nonlinear differential-operator equations in Banach spaces within the Calogero type projection-algebraic scheme of discrete approximations // Cent. Eur. J. Math. – 2009. – **7**, № 3. – P. 775 – 786.
23. *Novikov S. P.* (Editor). Theory of solitons. – Springer, 1984.
24. *Olver P.* Applicatons of Lie groups in Differential equations – Springer, 1986.
25. *Prykarpatsky A., Blackmore D., Bogolubov N.* Hamiltonian structure of Benney type hydrodynamic and Boltzmann – Vlasov equations on an axis and applications to manufacturing science // Open Syst. and Inform. dynamics – 1999. – **6**, № 2. – P. 335 – 373.
26. *Prykarpatsky Ya. A.* Finite dimensional local and nonlocal reductions of one type hydrodynamic systems // Rept. Math. Phys. – 2002. – **50**. – P. 349 – 360.
27. *Prykarpatsky A. K., Mykytyuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. – Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1998.
28. *Pugh M. C., Shelley M. J.* Singularity formation in thin jets with surface tension // Communs Pure and Appl. Math. – 1998. – **51**. – 733 p.
29. *Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky.* Integrable systems (in Russian). – Moscow; Izhevsk: R&C-Dynamics, 2003.
30. *Symes W.* Systems of Toda type, inverse-spectral problems and representation theory // Invent. Math. – 1980. – **59**. – P. 13 – 51.
31. *Zeidler E.* Applied functional analysis. – Springer, 1995.

Одержано 13.06.15