УДК 517.95

Н. М. Гузик (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З СИЛЬНИМ СТЕПЕНЕВИМ ВИРОДЖЕННЯМ

We establish conditions for the existence and uniqueness of the classical solution to the inverse problem of identification of the time-dependent coefficient at the first derivative in a one-dimensional degenerate parabolic equation. The Dirichlet boundary conditions and the integral condition of overdetermination are imposed. We study the case of strong power degeneration.

Установлены условия существования и единственности классического решения обратной задачи определения зависящего от времени младшего коэффициента в одномерном параболическом уравнении с вырождением. Заданы краевые условия Дирихле и интегральное условие переопределения. Исследован случай сильного степенного вырождения.

Вступ. Об'єктом дослідження цієї роботи є коефіцієнтна обернена задача для одновимірного параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням. Невідомим, крім розв'язку прямої задачі, є залежний від часу коефіцієнт при першій похідній невідомої функції за просторовою змінною.

Обернені задачі визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта в одновимірному параболічному рівнянні без виродження вивчалися в [1 – 4] в області з фіксованими межами і в [5 – 7] в областях з вільними межами. Встановлено умови однозначної розв'язності цих задач при різних наборах крайових умов (Діріхле, Неймана) та умов перевизначення.

Хоча прямі задачі для параболічних рівнянь з виродженням на сьогодні досліджено достатньо повно, обернені задачі для цих рівнянь практично не розглядалися. Лише роботи [8, 9] присвячено оберненим задачам для параболічних рівнянь, виродження яких спричиняє функція, що залежить від просторової змінної.

Обернені задачі визначення коефіцієнта $a = a(t),\ t \in [0, T]$, у параболічному рівнянні із степеневим виродженням

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

розглядались у роботах М. І. Іванчова, Н. В. Салдіної [10, 11]. Авторами встановлено, що на відміну від слабкого степеневого виродження $(0 < \beta < 1)$ для розв'язності задачі у випадку сильного степеневого виродження $(\beta \geq 1)$ на молодші коефіцієнти рівняння потрібно накладати певні умови при $t \to 0$.

Умови розв'язності обернених задач визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні зі слабким степеневим виродженням в області з фіксованими межами знайдено в [12, 13], а в області з вільними межами — в [14, 15]. Коректність оберненої задачі одночасного визначення двох залежних від часу коефіцієнтів у слабко виродженому параболічному рівнянні встановлено в [16].

Наша мета — встановити умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні у випадку сильного степеневого виродження.

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $Q_T = \{(x,t) \colon 0 < x < h, 0 < < t < T\}$ розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $b = b(t)$ у рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами Діріхле

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та інтегральною умовою перевизначення

$$\int\limits_0^h u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Досліджується випадок сильного виродження, коли $\beta \geq 1$.

Умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4) містяться у такій теоремі.

Теорема. *Нехай виконуються такі умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,h],\ a \in C[0,T],\ \mu_i \in C^1[0,T],\ i = 1,2,3,\ c, f \in C(\overline{Q}_T)$ *та задовольняють умову Гельдера за змінною* x *з показником* α, $0 < \alpha < 1$;

2) $a(t) > 0,\ \mu_2(t) - \mu_1(t) \neq 0,\ t \in [0,T],\ |f(x,t)| \leq A_1 t^{\gamma},\ |c(x,t)| \leq A_2 t^{\gamma},\ (x,t) \in \overline{Q}_T,$ $|\mu_3'(t)| \leq A_3 t^{\gamma},\ t \in [0,T]$, *де* $A_i,\ i = 1,2,3,$ — *додатні сталі,* $\gamma > \dfrac{\beta - 1}{2}$ — *довільне фіксоване число;*

3) $\mu_1(0) = \varphi(0),\ \mu_2(0) = \varphi(h),\ \displaystyle\int_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0).$

Тоді існує єдиний розв'язок $(b,u) \in C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C(\overline{Q}_{T_0}), |b(t)| \leq M_0 t^{\eta}$ *з* $\eta = = \min\left\{\gamma, \dfrac{\beta+1}{2}\right\}$ *задачі* (1)–(4)*, де числа* $M_0 > 0$ *та* $T_0,\ 0 < T_0 \leq T$*, визначаються вихідними даними цієї задачі.*

2. Зведення задачі (1)–(4) до еквівалентної системи рівнянь. Припустимо тимчасово, що функція $b = b(t)$ є відомою.

Щоб звести пряму задачу (1)–(3) до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $u = = u(x,t),\ v = v(x,t)$, де $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$, використаємо функції Гріна $G_k(x,t,\xi,\tau),\ k = 1,2,$ першої $(k = 1)$ та другої $(k = 2)$ крайових задач для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx}. \tag{5}$$

Відомо [17, с. 12], що ці функції визначаються формулами

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))} \right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))} \right) \right), \quad 0 \leq x, \quad \xi \leq h, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad k = 1,2, \tag{6}$$

де

$$\theta(t) = \int\limits_0^t a(\sigma)\sigma^\beta d\sigma.$$

В результаті отримаємо

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\tau^\beta \mu_1(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\tau^\beta \mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau = \sum_{i=1}^5 I_i, \tag{7}$$

$$v(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau = \sum_{i=1}^5 J_i. \tag{8}$$

Зауважимо, що рівняння (8) отримано з рівняння (7) шляхом диференціювання за просторовою змінною. При цьому використано співвідношення $G_{1x}(x,t,\xi,\tau) = -G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau)$, $G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau) = -a(\tau)\tau^\beta G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau)$, які легко перевірити з використанням формули (6).

Щоб отримати рівняння відносно функції $b = b(t)$, зінтегруємо рівняння (1). Враховуючи (2)–(4), знаходимо

$$b(t) = \left(\mu_3'(t) - a(t)t^\beta(v(h,t) - v(0,t)) - \int\limits_0^h (f(x,t) + c(x,t)u(x,t))dx\right)\times$$

$$\times(\mu_2(t) - \mu_1(t))^{-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Дослідимо поведінку інтегралів, що входять до правих частин формул (7), (8). Оскільки

$$\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\tau^\beta d\tau - \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\tau^\beta d\tau = 1,$$

то

$$\sum_{i=1}^{3} |I_i| \leq C_1, \tag{10}$$

де C_1 — додатна стала, що залежить від оцінок функцій $\varphi(x),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t)$. Враховуючи, що

$$G_1(x,t,\xi,\tau) \leq G_2(x,t,\xi,\tau), \quad \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi = 1, \tag{11}$$

одержуємо

$$|I_4| \leq C_2, \quad |J_1| \leq C_3, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{12}$$

де $C_2,\ C_3$ — додатні сталі, які визначаються вихідними даними задачі.

Щоб оцінити решту інтегралів, які входять до правих частин рівностей (7), (8), використаємо такі оцінки функцій Гріна [17, с. 12]:

$$G_2(x,t,\xi,\tau) \leq C_4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right), \quad \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)d\xi \leq \frac{C_5}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{13}$$

Врахувавши означення функції $\theta = \theta(t)$, з'ясуємо поведінку при $t \to 0$ виразу

$$I \equiv \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\int_\tau^t a(\sigma)\sigma^\beta d\sigma}} \leq \sqrt{\frac{1+\beta}{A_0}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{1+\beta}-\tau^{1+\beta}}},$$

де $A_0 \equiv \min_{[0,T]} a(t)$. В останньому інтегралі виконаємо заміну $z = \dfrac{\tau}{t}$. Тоді

$$I \leq \sqrt{\frac{1+\beta}{A_0}} t^{\frac{1-\beta}{2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{1+\beta}}} \leq \sqrt{\frac{1+\beta}{A_0}} t^{\frac{1-\beta}{2}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \leq C_6 t^{\frac{1-\beta}{2}}. \tag{14}$$

Це означає, що інтеграли $J_2,\ J_3,\ J_4$ поводять себе, як $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ при $t \to 0$.

Позначимо $U(t) = \max_{x\in[0,h]} |u(x,t)|,\ V(t) = \max_{(x,\tau)\in[0,h]\times[0,t]} |v(x,\tau)|,\ t \in [0,T]$. Враховуючи (11), (13) та умови теореми, з формул (7)–(9) знаходимо

$$U(t) \leq C_7 + C_8 \int\limits_0^t \left(|b(\tau)|V(\tau) + \tau^\gamma U(\tau)\right) d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

$$V(t) \leq \frac{C_9}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + C_{10} \int\limits_0^t \frac{|b(\tau)|V(\tau) + \tau^\gamma U(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} d\tau, \quad t \in (0,T], \tag{16}$$

$$|b(t)| \leq C_{11}t^\gamma + C_{12}t^\beta V(t) + C_{13}t^\gamma U(t), \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Із формул (15)–(17) випливає, що функція $u = u(x,t)$ неперервна в $\overline{Q}_T$, функція $v = v(x,t)$ поводить себе, як $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ при $t \to 0$, а $b(t)$ прямує до нуля при $t \to 0$, як степенева функція t^η.

Розв'яжемо систему нерівностей (15)–(17). Позначимо $\widetilde{b}(t) = \max_{0\leq\tau\leq t}|b(\tau)|$. Очевидно, що для цієї функції виконується нерівність (17). Оскільки функції $\widetilde{b} = \widetilde{b}(t)$, $V = V(t)$ неспадні, нерівність (15) запишемо у вигляді

$$U(t) \leq C_7 + C_8 T\widetilde{b}(t)V(t) + C_8 \int\limits_0^t \tau^\gamma U(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Застосовуючи лему 2.2.2 [17, с. 23] до останньої нерівності, отримуємо

$$U(t) \leq C_{14}\left(1 + \widetilde{b}(t)V(t)\right), \quad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Тоді нерівність (17) набирає вигляду

$$\widetilde{b}(t)(1 - C_{15}t^\gamma V(t)) \leq C_{16}t^\gamma + C_{12}t^\beta V(t), \quad t \in [0,T]. \tag{19}$$

Враховуючи поведінку функції $V = V(t)$ при $t \to 0$, можемо стверджувати, що існує таке число t_1, $0 < t_1 \leq T$, що виконується нерівність

$$1 - C_{15}t_1^\gamma V(t) \geq \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Це означає, що нерівності (18), (19) можна записати у вигляді

$$|b(t)| \leq \widetilde{b}(t) \leq C_{17}t^\gamma + C_{18}t^\beta V(t), \quad t \in [0,t_1], \tag{21}$$

$$U(t) \leq C_{19}\left(1 + t^\gamma V(t) + t^\beta V^2(t)\right), \quad t \in [0,t_1]. \tag{22}$$

Підставляючи (21), (22) в (16), приходимо до нерівності

$$V(t) \leq \frac{C_{20}}{t^{\frac{\beta-1}{2}}} + C_{21}\int\limits_0^t \frac{\tau^\gamma V(\tau) + \tau^\beta V^2(\tau)}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} d\tau. \tag{23}$$

Позначимо $V_1(t) = V(t)t^{\frac{\beta-1}{2}}$. Нерівність (23) домножимо на $t^{\frac{\beta-1}{2}}$. Оскільки $\beta \geq 1$, то

$$\frac{1}{\sqrt{t^{\beta+1} - \tau^{\beta+1}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{t - \left(\frac{\tau}{t}\right)^\beta \tau}} \leq \frac{1}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{t-\tau}}.$$

В результаті з (23) отримуємо

$$V_1(t) \leq C_{20} + \frac{C_{21}}{\sqrt{t}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}}V_1(\tau) + \tau V_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0,t_1]. \tag{24}$$

Нехай $\gamma \leq \dfrac{\beta+1}{2}$. Тоді

$$V_1(t) \leq C_{20} + \frac{C_{22}}{\sqrt{t}}\int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma-\frac{\beta-1}{2}}(V_1(\tau)+1)^2}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau,$$

або, позначаючи $V_2(t) = V_1(t) + 1$,

$$V_2(t) \leq C_{23} + \frac{C_{22}}{\sqrt{t}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}} V_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau, \quad t \in [0, t_1]. \tag{25}$$

Піднесемо обидві частини (25) до квадрата, використавши при цьому нерівності Коші та Коші – Буняковського [18, с. 49, 382]:

$$V_2^2(t) \leq 2C_{23}^2 + 4C_{22}^2 t^{\gamma - \frac{\beta-2}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\gamma - \frac{\beta+1}{2}} V_2^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau.$$

В останній нерівності замінимо t на σ і, домноживши на $\dfrac{\sigma^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt{t-\sigma}}$, зінтегруємо її по σ від 0 до t :

$$\int\limits_0^t \frac{\sigma^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}} V_2^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}\, d\sigma \leq C_{24} t^{\gamma - \frac{\beta-2}{2}} + C_{25} t^{2\gamma - \beta + \frac{3}{2}} \int\limits_0^t \tau^{\gamma - \frac{\beta+1}{2}} V_2^4(\tau) d\tau.$$

Враховуючи останню нерівність в (25), знаходимо

$$V_2(t) \leq C_{26} + C_{27} \int\limits_0^t \frac{V_2^4(\tau)}{\tau^{\frac{\beta+1}{2} - \gamma}}\, d\tau. \tag{26}$$

Позначимо

$$\chi(t) = C_{26} + C_{27} \int\limits_0^t \frac{V_2^4(\tau)}{\tau^{\frac{\beta+1}{2} - \gamma}}\, d\tau. \tag{27}$$

Тоді з (26) отримаємо $V_2(t) \leq \chi(t)$. Здиференціювавши (27) і використавши останню нерівність, одержимо

$$\chi'(t) \leq \frac{C_{27}}{t^{\frac{\beta+1}{2} - \gamma}}\, \chi^4(t),$$

звідки

$$\chi(t) \leq \frac{C_{26} \sqrt[3]{\gamma - \frac{\beta-1}{2}}}{\sqrt[3]{\gamma - \frac{\beta-1}{2} - 3C_{26}^3 C_{27} t^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}}}}.$$

Вибираючи число t_2, $0 < t_2 \leq T$ так, щоб

$$\gamma - \frac{\beta - 1}{2} - 3C_{26}^3 C_{27} t_2^{\gamma - \frac{\beta-1}{2}} > 0, \tag{28}$$

маємо $\chi(t) \leq C_{28}$, або

$$V_2(t) \leq C_{28}, \quad t \in [0, t_2].$$

У випадку $\gamma > \dfrac{\beta + 1}{2}$ нерівність (24) зводиться до вигляду

$$V_2(t) \le C_{29} + C_{30} \int\limits_0^t \frac{V_2^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau,$$

звідки, застосовуючи ті ж міркування, що й при розв'язанні (25), знаходимо

$$V_2(t) \le C_{31}, \quad t \in [0, t_3],$$

де число $t_3,\ 0 < t_3 \le T$, визначається сталими $C_{29},\ C_{30}$. Тоді

$$|v(x,t)| \le \frac{M_1}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}, \quad (x,t) \in [0,h] \times (0, t_4], \tag{29}$$

де $M_1 = \max\{C_{28}, C_{31}\},\ t_4 = \min\{t_1, t_2, t_3\}$. Зауважимо, що згідно з (17) і (22)

$$|u(x,t)| \le M_2, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0, t_4], \tag{30}$$

$$|b(t)| \le M_0 t^{\eta}, \quad t \in [0, t_4]. \tag{31}$$

Це означає, що встановлено апріорні оцінки (29) – (31) розв'язків системи рівнянь (7) – (9).

Таким чином, задачу (1) – (4) зведено до еквівалентної системи рівнянь (7) – (9). Еквівалентність розуміємо так: якщо пара функцій (b, u) є розв'язком задачі (1) – (4) при $(x,t) \in \in [0,h] \times [0,t_4]$, то трійка функцій $(u, v, b) \in C(\overline{Q}_{t_4}) \times C([0,h] \times (0, t_4]) \times C[0, t_4],\ |b(t)| \le M_0 t^{\eta}$, $t \in [0, t_4]$, задовольняє рівності (7) – (9), і, навпаки, якщо (u, v, b) є розв'язком системи (7) – (9), то (b, u) належить до класу $C[0, t_4] \times C^{2,1}(Q_{t_4}) \cap C(\overline{Q}_{t_4})$, задовольняє задачу (1) – (4) та оцінку $|b(t)| \le M_0 t^{\eta},\ t \in [0, t_4]$.

Справді, перша частина твердження випливає зі способу отримання системи рівнянь (7) – (9). Щоб довести зворотне твердження, здиференціюємо обидві частини рівності (7). У результаті отримаємо

$$u_x(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau.$$

Праві частини отриманої рівності та рівності (8) збігаються, тому $v(x,t) \equiv u_x(x,t),\ (x,t) \in \in [0,h] \times (0, t_4]$. Крім того, з отриманої поведінки функцій $b = b(t),\ v = v(x,t)$ випливає, що добуток $b(t)v(x,t)$ — неперервна функція в $\overline{Q}_{t_4}$. Використовуючи це в рівності (7), отримуємо інтегро-диференціальне рівняння щодо функції $u = u(x,t)$. Звідси робимо висновок, що функція u належить до класу $C^{2,1}(Q_{t_4}) \cap C(\overline{Q}_{t_4})$ та задовольняє задачу (1) – (3) [17, с. 49]. Після цього рівняння (9) можемо записати у вигляді

$$a(t)t^{\beta}(u_x(h,t)-u_x(0,t)+b(t)(u(h,t)-u(0,t)+\int\limits_0^h(f(x,t)+c(x,t)u(x,t))dx=\mu_3'(t),$$

або

$$\int\limits_0^h u_t(x,t)dx=\mu_3'(t),\quad t\in[0,t_4].$$

Враховуючи умову узгодження $\int_0^h\varphi(x)dx=\mu_3(0)$, приходимо до умови (4), що й завершує доведення еквівалентності задачі (1) – (4) та системи рівнянь (7) – (9).

3. Доведення існування розв'язку задачі (1) – (4). Застосувавши теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, доведемо існування розв'язку еквівалентної до задачі (1) – (4) системи рівнянь (7) – (9).

Введемо нові функції $p(t)=b(t)t^{-\eta}$, $w(x,t)=t^{\frac{\beta-1}{2}}v(x,t)$. Систему рівнянь (7) – (9) запишемо у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^4 I_i+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times\left(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p(\tau)w(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_{t_4},\tag{32}$$

$$w(x,t)=t^{\frac{\beta-1}{2}}\sum_{i=1}^4 J_i+t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times\left(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p(\tau)w(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_{t_4},\tag{33}$$

$$p(t)=\left(\mu_3'(t)-a(t)t^{\frac{\beta+1}{2}}(w(h,t)-w(0,t))-\int\limits_0^h(f(x,t)+c(x,t)u(x,t))dx\right)\times$$

$$\times t^{-\eta}(\mu_2(t)-\mu_1(t))^{-1},\quad t\in[0,t_4].\tag{34}$$

Візьмемо довільні (u,w,p), для яких справджуються оцінки (29) – (31). Оцінимо праві частини рівнянь (32) – (34), використавши при цьому (29) – (31):

$$|P_1(u,w,p)|\equiv\left|\sum_{i=1}^4 I_i+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\left(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p(\tau)w(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau\right|\le$$

$$\le C_7+C_{32}t^{\eta-\frac{\beta-3}{2}}+C_{33}t^{\gamma+1},$$

$$|P_2(u,w,p)|\equiv\left|t^{\frac{\beta-1}{2}}\sum_{i=1}^4 J_i+t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\left(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p(\tau)w(\xi,\tau)+\right.\right.$$

$$+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))\,d\xi d\tau \Bigg| \le C_9 + C_{34}t^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} + C_{35}t^{\gamma}.$$

Зауважимо, що в отриманих оцінках сталі $C_7,\ C_9$ менші за $M_2,\ M_1$ відповідно. Виберемо число $t_5,\ 0 < t_5 \le T$, так, щоб виконувалися нерівності

$$C_7 + C_{32}t_5^{\eta-\frac{\beta-3}{2}} + C_{33}t_5^{\gamma+1} \le M_2, \tag{35}$$

$$C_9 + C_{34}t_4^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} + C_{35}t_5^{\gamma} \le M_1. \tag{36}$$

В результаті отримаємо

$$|P_1(u,w,p)| \le M_2, \quad (x,t) \in [0,h]\times[0,t_5], \tag{37}$$

$$|P_2(u,w,p)| \le M_1, \quad (x,t) \in [0,h]\times[0,t_5]. \tag{38}$$

Крім того, враховуючи (37), (38), з (34) знаходимо

$$|P_3(u,w,p)| \equiv \Bigg| \Bigg(\mu_3'(t) - a(t)t^{\frac{\beta+1}{2}}(w(h,t)-w(0,t)) -$$

$$- \int\limits_0^h (f(x,t)+c(x,t)u(x,t))dx \Bigg) t^{-\eta}(\mu_2(t)-\mu_1(t))^{-1} \Bigg| \le M_0, \quad t \in [0,t_5]. \tag{39}$$

У банаховому просторі $\mathbb{B} = (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0,T_0])$ визначимо множину $N = \{(u,w,p) \in \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0,T_0])\colon |u(x,t)| \le M_2, |w(x,t)| \le M_1, |p(t)| \le M_0\}$, де $T_0 = \min\{t_4,t_5\}$. Очевидно, що множина N є замкненою й опуклою. Систему (32) – (34) запишемо у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (u,w,p)$, а оператор $P = (P_1,P_2,P_3)$ визначається правими частинами рівнянь (32) – (34). Згідно з наведеними вище міркуваннями, оператор P переводить множину N в себе. Те, що оператор P є цілком неперервним, доводиться, як в [11] і [17, c. 27]. Тоді, згідно з теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, існує неперервний розв'язок системи (32) – (34), а отже, і розв'язок задачі (1) – (4) при $x \in [0,h],\ t \in [0,T_0]$.

4. Доведення єдиності розв'язку задачі (1) – (4). Єдиність розв'язку задачі (1) – (4) будемо доводити методом від супротивного, виходячи з системи рівнянь (32) – (34). Припустимо, що існують два розв'язки $(u_i,w_i,p_i),\ i = 1,2$, системи рівнянь (32) – (34). Тоді для різниць $u = = u_1 - u_2,\ w = w_1 - w_2,\ p = p_1 - p_2$ отримуємо систему

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times \Big(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} p_1(\tau)w(\xi,\tau) + \tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} w_2(\xi,\tau)p(\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) \Big)\, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \tag{40}$$

$$w(x,t) = t^{\frac{\beta-1}{2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times\left(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p_1(\tau)w(\xi,\tau)+\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}w_2(\xi,\tau)p(\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\right)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_{T_0},\qquad(41)$$

$$p(t)=\left(a(t)t^{\frac{\beta+1}{2}}(w(h,t)-w(0,t))-\int_0^h c(x,t)u(x,t)dx\right)\times$$
$$\times t^{-\eta}(\mu_2(t)-\mu_1(t))^{-1},\quad t\in[0,T_0].\qquad(42)$$

Підставивши рівність (42) у (40), (41), одержимо

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Bigg(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p_1(\tau)w(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau)\Bigg(\tau a(\tau)(w(h,\tau)-w(0,\tau))-$$
$$-\tau^{-\frac{\beta-1}{2}}\int_0^h c(\zeta,\tau)u(\zeta,\tau)d\zeta\Bigg)(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau))^{-1}\Bigg)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_{T_0},\qquad(43)$$

$$w(x,t)=t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Bigg(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p_1(\tau)w(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau)\Bigg(\tau a(\tau)(w(h,\tau)-w(0,\tau))-$$
$$-\tau^{-\frac{\beta-1}{2}}\int_0^h c(\zeta,\tau)u(\zeta,\tau)d\zeta\Bigg)(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau))^{-1}\Bigg)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_{T_0}.\qquad(44)$$

До системи рівнянь (43), (44) приєднаємо ще два рівняння відносно функцій $w(h,t),\ w(0,t)$:

$$w(h,t)=t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\int_0^h G_{1x}(h,t,\xi,\tau)\Bigg(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p_1(\tau)w(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau)\Bigg(\tau a(\tau)(w(h,\tau)-w(0,\tau))-$$
$$-\tau^{-\frac{\beta-1}{2}}\int_0^h c(\zeta,\tau)u(\zeta,\tau)d\zeta\Bigg)(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau))^{-1}\Bigg)d\xi d\tau,\quad t\in[0,T_0],\qquad(45)$$

$$w(0,t)=t^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^t\int_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)\Bigg(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}p_1(\tau)w(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau)\Bigg(\tau a(\tau)(w(h,\tau)-w(0,\tau))-$$
$$-\tau^{-\frac{\beta-1}{2}}\int_0^h c(\zeta,\tau)u(\zeta,\tau)d\zeta\Bigg)(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau))^{-1}\Bigg)d\xi d\tau,\quad t\in[0,T_0].\qquad(46)$$

В результаті отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (43)–(46). Враховуючи (11), (13), можемо стверджувати, що ядра цієї системи мають інтегровні особливості. Це означає, що сама система має лише тривіальний розв'язок.

Теорему доведено.

Зауваження. З доведення теореми випливає, що поведінка функції $b=b(t)$ при $t\to 0$ зумовлена тим, щоб забезпечити збіжність інтеграла J_5 та встановити поведінку функції $v=v(x,t)$ як розв'язку інтегрального рівняння (8).

Література

1. *Cannon J. R., Peres-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1993. – **10**, № 3. – P. 521 – 531.
2. *Hong-Ming Yin.* Global solvability for some parabolic inverse problems // J. Math. Anal. and Appl. – 1991. – P. 392 – 403.
3. *Trong D. D., Ang D. D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – **10**, № 3. – P. 733 – 752.
4. *Пабирівська Н., Вареник О.* Визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 181 – 189.
5. *Гринців Н. М., Снітко Г. А.* Обернені задачі визначення коефіцієнта при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 181 – 189.
6. *Снітко Г. А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 7 – 18.
7. *Снітко Г. А.* Визначення невідомого множника в коефіцієнті при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 233 – 247.
8. *Deng Zui-Cha, Yang Liu.* An inverse problem of identifying the radiative coefficient in a degenerate parabolic equation // Chin. Ann. Math. – 2014. – 35B(3). – P. 355 – 382.
9. *Tort J.* An inverse diffusion problem in a degenerate parabolic equation // Monogr. Real Acad. Cie. Zaragoza. – 2012. – **38**. – P. 137 – 145.
10. *Салдіна Н. В.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 288. – С. 99 – 106.
11. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1487 – 1500.
12. *Гринців Н.* Визначення коефіцієнта перед першою похідною у параболічному рівнянні з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 78 – 87.
13. *Hryntsiv N. M.* Non-local inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation // Вісн. нац. ун-ту „Львів. політехніка”. Фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 696. – С. 32 – 39.
14. *Гринців Н.* Обернена задача з вільною межею для слабко виродженого параболічного рівняння // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 1. – С. 41 – 62.
15. *Huzyk N.* Inverse free boundary problems for a generally degenerate parabolic equation // J. Inverse and Ill-posed Problems. – 2015. – **23**, Issue 2. – P. 103 – 119.
16. *Huzyk N.* Inverse problem of determining the coefficients in a degenerate parabolic equation // Electron. J. Different. Equat. – 2014. – **2014**, № 172. – P. 1 – 11.
17. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p.
18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

Одержано 27.07.15,
після доопрацювання — 29.03.16