УДК 517.95

Г. А. Снітко (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КОЕФІЦІЄНТНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

We establish the conditions of unique solvability of the inverse problem of finding the minor coefficient in a two-dimensional parabolic equation in the domain for which the location of a part of its boundary is described by a function in the form of a product of an unknown function of time and a given function of the space variable.

Установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения младшего коэффициента в двумерном параболическом уравнении в области, размещение части границы которой определяется функцией, являющейся произведением неизвестной функции времени и заданной функции пространственной переменной.

Коефіцієнтні обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з відомими межами вивчено достатньо повно. Зокрема, задачі визначення залежних від часу молодших коефіцієнтів параболічних рівнянь досліджено в роботах [1 – 5]. Поєднавши в задачі визначення невідомої межі та коефіцієнта рівняння, можна розглядати її як обернену з двома невідомими параметрами. У роботах [6 – 9] розглянуто задачі визначення старшого та молодших коефіцієнтів одновимірних параболічних рівнянь в областях з вільними межами. Результати досліджень задач визначення старших коефіцієнтів рівнянь було перенесено на двовимірний випадок, в якому область є криволінійним прямокутником, розташування якого визначається невідомою функцією часу [10, 11].

У даній роботі досліджується обернена задача визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта двовимірного параболічного рівняння в області, розташування частини межі якої визначається функцією, що є добутком невідомої функції часу та заданої функції просторової змінної.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x_1, x_2, t)\colon 0 < x_1 < l,\ 0 < x_2 < h(t)g(x_1), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ — невідома функція, будемо розглядати обернену задачу визначення невідомих $\big(h(t), c(t), u(x_1, x_2, t)\big)$, які задовольняють рівняння

$$u_t = \Delta u + c(t)u + f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in [0, l] \times [0, h(0)g(x_1)], \tag{2}$$

крайові умови

$$\begin{gathered} u(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t), \quad (x_2, t) \in [0, h(t)g(0)] \times [0, T], \\ u(l, x_2, t) = \mu_2(x_2, t), \quad (x_2, t) \in [0, h(t)g(l)] \times [0, T], \\ u(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t), \quad (x_1, t) \in [0, l] \times [0, T], \\ u(x_1, h(t)g(x_1), t) = \mu_4(x_1, t), \quad (x_1, t) \in [0, l] \times [0, T], \end{gathered} \tag{3}$$

та умови перевизначення

© Г. А. СНІТКО, 2016

$$h'(t) = -\int\limits_0^l u_{x_2}(x_1, h(t)g(x_1), t)dx_1 + \mu_5(t), \quad t \in [0,T],$$
$$\int\limits_0^l dx_1 \int\limits_0^{h(t)g(x_1)} u(x_1, x_2, t)dx_2 = \mu_6(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Заміною змінних $y_1 = x_1,\ y_2 = \dfrac{x_2}{h(t)}$ задачу (1)–(4) зведемо до оберненої задачі з невідомими $(h(t), c(t), v(y_1, y_2, t))$, де $v(y_1, y_2, t) = u(y_1, y_2 h(t), t)$, в області $Q_T = D \times [0,T]$, $D = \{(y_1, y_2)\colon 0 < y_1 < l, 0 < y_2 < g(y_1)\}$:

$$v_t = v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h^2(t)} v_{y_2 y_2} + \frac{y_2 h'(t)}{h(t)} v_{y_2} + c(t)v + f(y_1, y_2 h(t), t), \quad (y_1, y_2, t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y_1, y_2, 0) = \varphi(y_1, y_2 h(0)), \quad (y_1, y_2) \in \overline{D}, \tag{6}$$

$$v(0, y_2, t) = \mu_1(y_2 h(t), t), \quad (y_2, t) \in [0, g(0)] \times [0,T],$$
$$v(l, y_2, t) = \mu_2(y_2 h(t), t), \quad (y_2, t) \in [0, g(l)] \times [0,T],$$
$$v(y_1, 0, t) = \mu_3(y_1, t), \quad (y_1, t) \in [0, l] \times [0,T], \tag{7}$$
$$v(y_1, g(y_1), t) = \mu_4(y_1, t), \quad (y_1, t) \in [0, l] \times [0,T],$$

$$h'(t) = -\frac{1}{h(t)} \int\limits_0^l v_{y_2}(y_1, g(y_1), t)dy_1 + \mu_5(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h(t) \iint\limits_D v(y_1, y_2, t)dy_1 dy_2 = \mu_6(t), \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

2. Основні результати. Умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4) містяться в наступних теоремах.

Теорема 1. *Припустимо, що виконано умови*:

1) $f \in C^{1,0}\big([0,l] \times [0,\infty) \times [0,T]\big),\ \varphi \in C^2\big([0,l] \times [0,\infty)\big),\ \mu_i \in C^{2,1}\big([0,\infty) \times [0,T]\big),$ $i = 1,2,\ \mu_j \in C^{2,1}\big([0,l] \times [0,T]\big),\ j = 3,4,\ \mu_5 \in C[0,T],\ \mu_6 \in C^1[0,T],\ g \in C^2[0,l];$

2) $f(x_1, x_2, t) \geq 0,\ (x_1, x_2, t) \in [0,l] \times [0,\infty) \times [0,T],\ \varphi(x_1, x_2) \geq \varphi_0 > 0,\ (x_1, x_2) \in$ $\in [0,l] \times [0,\infty),\ \mu_6(t) > 0,\ t \in [0,T],\ g(x_1) > 0,\ x_1 \in [0,l];$

3) *узгодження нульового та першого порядків.*

Тоді можна вказати таке число $T_0, 0 < T_0 \leq T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h, c, u) \in C^1[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_{T_0}),\ h(t) > 0,\ t \in [0,T_0]$, *задачі* (1)–(4).

Теорема 2. *Нехай виконано умови*:

1) $f \in C^{1,0}\big([0,l] \times [0,\infty) \times [0,T]\big),\ \mu_i \in C^{3,1}\big([0,\infty) \times [0,T]\big),\ i = 1,2,\ g \in C^2[0,l];$

2) $\varphi(x_1, x_2) \geq \varphi_0 > 0,\ (x_1, x_2) \in [0,l] \times [0,\infty),\ \mu_6(t) > 0,\ t \in [0,T],\ g(x_1) > 0,\ x_1 \in [0,l].$

Тоді задача (1)–(4) *не може мати двох різних розв'язків* $(h, c, u) \in C^1[0,T] \times C[0,T] \times$ $\times\, C^{2,1}(\overline{\Omega}_T),\ h(t) > 0,\ t \in [0,T].$

3. Існування розв'язку задачі (1)–(4). Доведення існування розв'язку задачі (1)–(4) базується на зведенні еквівалентної задачі (5)–(9) до системи рівнянь відносно невідомих і застосуванні до неї теореми Шаудера про нерухому точку. Зведемо задачу (5)–(7) до задачі з нульовими початковою та крайовими умовами. Введемо позначення

$$\mu_0(y_1,y_2,t)=\mu_1(y_2h(t),t)-\mu_1(0,t)+\mu_3(y_1,t)+$$
$$+\frac{y_1}{l}(\mu_2(y_2h(t),t)-\mu_2(0,t)-\mu_1(y_2h(t),t)+\mu_1(0,t))+$$
$$+\frac{y_2}{g(y_1)}(\mu_4(y_1,t)-\mu_3(y_1,t)-\mu_1(g(y_1)h(t),t)+\mu_1(0,t))-$$
$$-\frac{y_1y_2}{lg(y_1)}(\mu_2(g(y_1)h(t),t)-\mu_2(0,t)-\mu_1(g(y_1)h(t),t)+\mu_1(0,t)),$$
$$v_0(y_1,y_2,t)=\varphi(y_1,y_2h(0))+\mu_0(y_1,y_2,t)-\mu_0(y_1,y_2,0),$$
$$\tilde{v}(y_1,y_2,t)=v(y_1,y_2,t)-v_0(y_1,y_2,t),$$
$$L=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{1}{h^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Тоді для функції $\tilde{v}(y_1,y_2,t)$ отримаємо задачу

$$L\tilde{v}=\frac{y_2h'(t)}{h(t)}v_{y_2}(y_1,y_2,t)+c(t)v(y_1,y_2,t)-$$
$$-Lv_0(y_1,y_2,t)+f(y_1,y_2h(t),t),\quad (y_1,y_2,t)\in Q_T, \tag{10}$$
$$\tilde{v}(y_1,y_2,0)=0,\quad (y_1,y_2)\in\overline{D},$$
$$\tilde{v}(0,y_2,t)=\tilde{v}(l,y_2,t)=0,\quad \tilde{v}(y_1,0,t)=\tilde{v}(y_1,g(y_1),t)=0,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T.$$

За допомогою функції Гріна $G=G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$L\tilde{v}=0$$

розв'язок задачі (10) подамо у вигляді

$$\tilde{v}(y_1,y_2,t)=\int\limits_0^t\iint\limits_D G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\frac{\eta_2h'(\tau)}{h(\tau)}v_{\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$
$$\left.+\,c(\tau)v(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1,\eta_2h(\tau),\tau)\right)d\eta_1d\eta_2d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T.$$

Позначивши $w_i(y_1,y_2,t)=v_{y_i}(y_1,y_2,t),\ i=1,2,\ p(t)=h'(t)$, повернемось до функції v:

$$v(y_1,y_2,t)=v_0(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\iint\limits_D G(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\frac{\eta_2p(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-\right.$$
$$\left.-\,Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+c(\tau)v(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1,\eta_2h(\tau),\tau)\right)d\eta_1d\eta_2d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{11}$$

Диференціюючи (11) за змінними $y_1,\ y_2$, одержуємо

$$w_1(y_1,y_2,t)=v_{0y_1}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\frac{\eta_2 p(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$

$$\left.+\,c(\tau)v(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1,\eta_2 h(\tau),\tau)\right)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \tag{12}$$

$$w_2(y_1,y_2,t)=v_{0y_2}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D G_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\frac{\eta_2 p(\tau)}{h(\tau)}w_2(\eta_1,\eta_2,\tau)-Lv_0(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$

$$\left.+\,c(\tau)v(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1,\eta_2 h(\tau),\tau)\right)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{13}$$

З умов (8), (9) знаходимо

$$p(t)=-\frac{1}{h(t)}\int\limits_0^l w_2(y_1,g(y_1),t)dy_1+\mu_5(t),\quad t\in[0,T], \tag{14}$$

$$h(t)=\frac{\mu_6(t)}{\iint_D v(y_1,y_2,t)dy_1 dy_2},\quad t\in[0,T]. \tag{15}$$

Диференціюючи умову (9) за змінною t і використовуючи (5), отримуємо

$$c(t)=\frac{1}{\mu_6(t)}\left(\mu_6'(t)-h(t)\int\limits_0^{g(l)}w_1(l,y_2,t)dy_2+h(t)\int\limits_0^{g(0)}w_1(0,y_2,t)dy_2+\right.$$

$$+h(t)\int\limits_0^l g'(y_1)\mu_{4y_1}(y_1,t)dy_1-\frac{1}{h(t)}\int\limits_0^l(w_2(y_1,g(y_1),t)-w_2(y_1,0,t))dy_1-$$

$$-\left(\mu_5(t)-\frac{1}{h(t)}\int\limits_0^l w_2(y_1,g(y_1),t)dy_1\right)\int\limits_0^l g(y_1)\mu_4(y_1,t)dy_1-$$

$$\left.-h(t)\iint\limits_D f(y_1,y_2h(t),t)dy_1dy_2\right),\quad t\in[0,T]. \tag{16}$$

Таким чином, задачу (5) – (9) зведено до системи інтегральних рівнянь (11) – (16) відносно невідомих $\big(v(y_1,y_2,t),w_1(y_1,y_2,t),w_2(y_1,y_2,t),p(t),h(t),c(t)\big)$. Якщо $(h,c,v)\in C^1[0,T]\times$ $\times\, C[0,T]\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5) – (9), то $(v,w_1,w_2,p,h,c)\in\big(C(\overline{Q}_T)\big)^3\times\big(C[0,T]\big)^3$ є розв'язком системи рівнянь (11) – (16). Правильним є і обернене твердження.

Нехай (v, w_1, w_2, p, h, c) — неперервний розв'язок системи рівнянь (11)–(16). Здиференціюємо (11) за змінними y_1, y_2. Праві частини отриманих рівностей та рівностей (12), (13) збігаються, тому можемо зробити висновок, що $w_1(y_1, y_2, t) = v_{y_1}(y_1, y_2, t), w_2(y_1, y_2, t) = v_{y_2}(y_1, y_2, t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h^2(t)} v_{y_2 y_2} + \frac{y_2 p(t)}{h(t)} v_{y_2} + c(t)v + f(y_1, y_2 h(t), t), \quad (y_1, y_2, t) \in Q_T, \tag{17}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0, T]$ функцій $c(t), h(t), p(t)$. З рівності (15) випливає умова (9). Припущення теореми дозволяють нам здиференціювати (15) по t. Оскільки функція $v(y_1, y_2, t)$ задовольняє рівняння (17), віднявши від отриманої рівності (16), одержимо

$$(h'(t) - p(t)) \frac{\mu_6(t)}{h(t)} = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $p(t) = h'(t)$, $h \in C^1[0, T]$, функція $v(y_1, y_2, t)$ задовольняє рівняння (5) та умову (8).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(9) та системи рівнянь (11)–(16) у вищезазначеному сенсі встановлено.

Визначимо оператор P і побудуємо множину N так, щоб оператор P переводив N в себе. Зазначимо, що з урахуванням припущень теореми з умови (9) однозначно визначається значення $h(0)$. Оскільки в (11) всі доданки, крім $\varphi(y_1, y_2 h(0))$, при $t \to 0$ прямують до нуля, можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0 < t_1 \le T$, що

$$v(y_1, y_2, t) \ge \frac{\varphi_0}{2} \equiv M_0 > 0, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{18}$$

Виконання умови (18) рівносильне виконанню нерівності

$$\Bigg| \mu_0(y_1, y_2, t) - \mu_0(y_1, y_2, 0) + \int_0^t \iint_D G(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times \\ \times \left(\frac{\eta_2 p(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + c(\tau) v(\eta_1, \eta_2, \tau) + \\ + f(\eta_1, \eta_2 h(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \Bigg| \le M_0, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{19}$$

Враховуючи (19), з (11) одержуємо

$$v(y_1, y_2, t) \le \max_D \varphi(y_1, y_2 h(0)) + M_0 \equiv M_1 < \infty, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_1}. \tag{20}$$

Тоді для розв'язків рівняння (15) виконуються нерівності

$$0 < H_0 \le h(t) \le H_1 < \infty, \quad t \in [0, t_1]. \tag{21}$$

Позначимо $W_i(t) = \max_{(y_1, y_2) \in \overline{D}} |w_i(y_1, y_2, t)|$, $i = 1, 2$. З (14), (16), враховуючи (21), одержуємо

$$|p(t)| \le C_1 + C_2 W_2(t), \quad |c(t)| \le C_3 + C_4 W_1(t) + C_5 W_2(t), \quad t \in [0, t_1]. \tag{22}$$

Використовуючи (20)–(22) та оцінки функції Гріна [12, с. 469], з (12), (13) отримуємо

$$W_1(t) \le C_6 + C_7 \int\limits_0^t \left(1 + W_1(\tau) + W_2(\tau) + W_2^2(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$W_2(t) \le C_8 + C_9 \int\limits_0^t \left(1 + W_1(\tau) + W_2(\tau) + W_2^2(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad t \in [0, t_1].$$

Звідси для функції $R(t) = R_1(t) + R_2(t),\ R_i(t) = 1 + W_i(t),\ i = 1, 2,$ одержуємо нерівність

$$R(t) \le C_{10} + C_{11} \int\limits_0^t \frac{R(\tau) + R^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad t \in [0, t_1].$$

Метод розв'язування останньої нерівності наведено у [13, с. 125]. Звідси отримуємо оцінку

$$R(t) \le M_2 < \infty, \quad t \in [0, t_2],$$

де M_2 і $t_2, 0 < t_2 \le t_1,$ визначаються відомими величинами. Тоді

$$|w_1(y_1, y_2, t)| \le M_2, \qquad |w_2(y_1, y_2, t)| \le M_2, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_2},$$

$$|p(t)| \le B_1 < \infty, \qquad |c(t)| \le B_2 < \infty, \quad t \in [0, t_2].$$

Візьмемо довільні (v, w_1, w_2, h, p, c), для яких справедливими є встановлені вище оцінки. Оцінимо праві частини рівнянь (12), (13):

$$\Bigg| v_{0y_1}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \iint\limits_D G_{y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times$$

$$\times \left(\frac{\eta_2 p(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - L v_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.$$

$$\left. + c(\tau) v(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1, \eta_2 h(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \Bigg| \le$$

$$\le C_6 + 2C_7 (1 + 2M_2 + M_2^2) \sqrt{t},$$

$$\Bigg| v_{0y_2}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \iint\limits_D G_{y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times$$

$$\times \left(\frac{\eta_2 p(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - L v_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.$$

$$\left. + c(\tau) v(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1, \eta_2 h(\tau), \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau \Bigg| \le$$

$$\leq C_8 + 2C_9(1 + 2M_2 + M_2^2)\sqrt{t}, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_2}.$$

Вибираючи число t_3, $0 < t_3 \leq t_2$, так, щоб виконувалась нерівність $C_6 + 2C_7\big(1 + 2M_2 + M_2^2\big)\sqrt{t_3} \leq M_2$, отримуємо

$$\Bigg|v_{0y_1}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \iint\limits_D G_{y_1}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times$$

$$\times \left(\frac{\eta_2 p(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + c(\tau)v(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.$$

$$\left. + f(\eta_1, \eta_2 h(\tau), \tau)\right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau\Bigg| \leq M_2, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_3}.$$

Аналогічно можемо вважати, що існує таке число t_4, $0 < t_4 \leq t_2$, що виконується нерівність $C_8 + 2C_9\big(1 + 2M_2 + M_2^2\big)\sqrt{t_4} \leq M_2$. Тоді

$$\Bigg|v_{0y_2}(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \iint\limits_D G_{y_2}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times$$

$$\times \left(\frac{\eta_2 p(\tau)}{h(\tau)} w_2(\eta_1, \eta_2, \tau) - Lv_0(\eta_1, \eta_2, \tau) + c(\tau)v(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.$$

$$\left. + f(\eta_1, \eta_2 h(\tau), \tau)\right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau\Bigg| \leq M_2, \ (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_4}.$$

Запишемо систему рівнянь (11) – (16) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = \big(v(y_1, y_2, t), w_1(y_1, y_2, t), w_2(y_1, y_2, t), h(t), p(t), c(t)\big)$, а оператор $P = (P_1, \ldots, P_6)$ визначається правими частинами рівнянь (11) – (16). Позначимо $N = \big\{(v, w_1, w_2, h, p, c) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 \times (C[0, T_0])^3 \colon M_0 \leq v(y_1, y_2, t) \leq M_1, |w_1(y_1, y_2, t)| \leq M_2, |w_2(y_1, y_2, t)| \leq M_2, H_0 \leq h(t) \leq H_1, |p(t)| \leq B_1, |c(t)| \leq B_2\big\}$, $T_0 = \min\{t_3, t_4\}$. Згідно з наведеним вище, оператор P переводить множину N в себе. Те, що оператор P є цілком неперервним на N, доводиться, як у [13, с. 27].

Отже, за теоремою Шаудера про нерухому точку існує розв'язок системи рівнянь (11) – (16). Оскільки система рівнянь (11) – (16) та задача (5) – (9) еквівалентні у вищезазначеному сенсі, то існує розв'язок задачі (5) – (9) при $(y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{T_0}$, а отже, і розв'язок задачі (1) – (4) при $(x_1, x_2, t) \in \overline{\Omega}_{T_0}$.

3. Єдиність розв'язку задачі (1) – (4). Оскільки задача (1) – (4) еквівалентна задачі (5) – (9), то припустимо, що $(h_i(t), c_i(t), v_i(y_1, y_2, t))$, $i = 1, 2,$ — два розв'язки задачі (5) – (9). Позначимо

$$\frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = p_i(t), \quad i = 1, 2, \qquad p(t) = p_1(t) - p_2(t),$$

$$c(t) = c_1(t) - c_2(t), \qquad v(y_1, y_2, t) = v_1(y_1, y_2, t) - v_2(y_1, y_2, t).$$

Функції $p(t), c(t), v(y_1, y_2, t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = v_{y_1y_1} + \frac{1}{h_1^2(t)} v_{y_2y_2} + y_2 p_1(t) v_{y_2} + c_1(t) v + \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) v_{2y_2y_2} +$$

$$+ y_2 p(t) v_{2y_2} + c(t) v_2 + f(y_1, y_2 h_1(t), t) - f(y_1, y_2 h_2(t), t), \; (y_1, y_2, t) \in Q_T, \tag{23}$$

$$v(y_1, y_2, 0) = 0, \quad (y_1, y_2) \in \overline{D}, \tag{24}$$

$$v(0, y_2, t) = \mu_1(y_2 h_1(t), t) - \mu_1(y_2 h_2(t), t), \quad (y_2, t) \in [0, g(0)] \times [0, T],$$

$$v(l, y_2, t) = \mu_2(y_2 h_1(t), t) - \mu_2(y_2 h_2(t), t), \quad (y_2, t) \in [0, g(l)] \times [0, T], \tag{25}$$

$$v(y_1, 0, t) = v(y_1, g(y_1), t) = 0, \quad (y_1, t) \in [0, l] \times [0, T],$$

$$p(t) = -\frac{1}{h_1^2(t)} \int\limits_0^l v_{y_2}(y_1, g(y_1), t) dy_1 + \mu_5(t) \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) \int\limits_0^l v_{2y_2}(y_1, g(y_1), t) dy_1, \quad t \in [0, T], \tag{26}$$

$$\iint\limits_D v(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 = \mu_6(t) \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right), \quad t \in [0, T]. \tag{27}$$

Зведемо задачу (23)–(25) до задачі з нульовими крайовими умовами. Введемо позначення

$$\psi(y_1, y_2, t) = \left(1 - \frac{y_1}{l}\right) \big(\mu_1(y_2 h_1(t), t) - \mu_1(y_2 h_2(t), t)\big) +$$

$$+ \frac{y_1}{l} \big(\mu_2(y_2 h_1(t), t) - \mu_2(y_2 h_2(t), t)\big) -$$

$$- \frac{y_2}{g(y_1)} \Big(\left(1 - \frac{y_1}{l}\right) \big(\mu_1(g(y_1) h_1(t), t) - \mu_1(g(y_1) h_2(t), t)\big) +$$

$$+ \frac{y_1}{l} \big(\mu_2(g(y_1) h_1(t), t) - -\mu_2(g(y_1) h_2(t), t)\big) \Big),$$

$$\tilde{v}(y_1, y_2, t) = v(y_1, y_2, t) - \psi(y_1, y_2, t),$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{1}{h_1^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - y_2 p_1(t) \frac{\partial}{\partial y_2} - c_1(t).$$

Тоді для функції $\tilde{v}(y_1, y_2, t)$ отримаємо задачу

$$L_1 \tilde{v} = -L_1 \psi(y_1, y_2, t) + \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)} \right) v_{2y_2y_2} + y_2 p(t) v_{2y_2} + c(t) v_2 +$$

$$+ f(y_1, y_2 h_1(t), t) - f(y_1, y_2 h_2(t), t), \quad (y_1, y_2, t) \in Q_T,$$

$$\tilde{v}(y_1, y_2, 0) = 0, \quad (y_1, y_2) \in \overline{D}, \tag{28}$$

$$\tilde{v}(0, y_2, t) = \tilde{v}(l, y_2, t) = 0, \qquad \tilde{v}(y_1, 0, t) = \tilde{v}(y_1, g(y_1), t) = 0, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T.$$

Зобразивши розв'язок задачі (28) за допомогою функції Гріна $\tilde{G} = \tilde{G}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$L_1 \tilde{v} = 0,$$

повернемось до функції $v(y_1, y_2, t)$:

$$v(y_1, y_2, t) = \psi(y_1, y_2, t) + \int\limits_0^t \iint\limits_D \tilde{G}(y_1, y_2, t, \eta_1, \eta_2, \tau) \times$$

$$\times \left(\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)} - \frac{1}{h_2^2(\tau)} \right) v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \eta_2 p(\tau) v_{2\eta_2}(\eta_1, \eta_2, \tau) + \right.$$

$$+ c(\tau) v_2(\eta_1, \eta_2, \tau) + f(\eta_1, \eta_2 h_1(\tau), \tau) - f(\eta_1, \eta_2 h_2(\tau), \tau) -$$

$$\left. - L_1 \psi(\eta_1, \eta_2, \tau) \right) d\eta_1 d\eta_2 d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T. \tag{29}$$

Оскільки для $c_i(t),\ i = 1, 2$, справджуються рівності, аналогічні (16), звідси отримуємо

$$c(t) = \frac{1}{\mu_6(t)} \left(h_1(t) \int\limits_0^{g(0)} v_{y_1}(0, y_2, t) dy_2 - h_1(t) \int\limits_0^{g(l)} v_{y_1}(l, y_2, t) dy_2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{h_1(t)} \int\limits_0^l (v_{y_2}(y_1, 0, t) - v_{y_2}(y_1, g(y_1), t)) dy_1 +$$

$$+ \frac{1}{h_1(t)} \int\limits_0^l g(y_1) \mu_4(y_1, t) dy_1 \int\limits_0^l v_{y_2}(y_1, g(y_1), t) dy_1 -$$

$$- h_1(t) \iint\limits_D \big(f(y_1, y_2 h_1(t), t) - f(y_1, y_2 h_2(t), t) \big) dy_1 dy_2 +$$

$$+ (h_1(t) - h_2(t)) \left(\int\limits_0^{g(0)} v_{2y_1}(0, y_2, t) dy_2 - \int\limits_0^{g(l)} v_{2y_1}(l, y_2, t) dy_2 - \right.$$

$$\left. - \iint\limits_D f(y_1, y_2 h_2(t), t) dy_1 dy_2 + \int\limits_0^l g'(y_1) \mu_{4y_1}(y_1, t) dy_1 \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} \right) \left(\int\limits_0^l (v_{2y_2}(y_1, 0, t) - v_{2y_2}(y_1, g(y_1), t)) dy_1 + \right.$$

$$\left. \left. + \int\limits_0^l g(y_1) \mu_4(y_1, t) dy_1 \int\limits_0^l v_{2y_2}(y_1, g(y_1), t) dy_1 \right) \right), \quad t \in [0, T]. \tag{30}$$

Диференціюючи (29) за змінними $y_1,\ y_2$, одержуємо

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t)=\psi_{y_1}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D \tilde{G}_{y_1}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$

$$+\eta_2 p(\tau)v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c(\tau)v_2(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1,\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$

$$\left.-f(\eta_1,\eta_2 h_2(\tau),\tau)-L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau)\right)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \tag{31}$$

$$v_{y_2}(y_1,y_2,t)=\psi_{y_2}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_D \tilde{G}_{y_2}(y_1,y_2,t,\eta_1,\eta_2,\tau)\left(\left(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta_2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+\right.$$

$$+\eta_2 p(\tau)v_{2\eta_2}(\eta_1,\eta_2,\tau)+c(\tau)v_2(\eta_1,\eta_2,\tau)+f(\eta_1,\eta_2 h_1(\tau),\tau)-$$

$$\left.-f(\eta_1,\eta_2 h_2(\tau),\tau)-L_1\psi(\eta_1,\eta_2,\tau)\right)d\eta_1 d\eta_2 d\tau,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \tag{32}$$

Виразимо $h_i(t)$ через $p_i(t)$:

$$h_i(t)=h_i(0)\exp\left(\int\limits_0^t p_i(\tau)d\tau\right),\quad i=1,2,$$

де $h_1(0)=h_2(0)=h_0$.

Припущення теореми забезпечують правильність рівностей

$$\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}=-\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t p(\tau)d\tau\int\limits_0^1\exp\left(-\int\limits_0^t\big(\sigma p(\tau)+p_2(\tau)\big)d\tau\right)d\sigma,$$

$$\mu_i\big(y_2h_1(t),t\big)-\mu_i\big(y_2h_2(t),\,t\big)=$$

$$=y_2\big(h_1(t)-h_2(t)\big)\int\limits_0^1\mu_{ix_2}\left(y_2\Big(h_2(t)+\sigma\big(h_1(t)-h_2(t)\big)\Big),\,t\right)d\sigma,\quad i=1,2, \tag{33}$$

$$f\big(y_1,y_2h_1(t),t\big)-f\big(y_1,y_2h_2(t),\,t\big)=$$

$$=y_2\big(h_1(t)-h_2(t)\big)\int\limits_0^1 f_{x_2}\big(y_1,y_2\Big(h_2(t)+\sigma\big(h_1(t)-h_2(t)\big)\Big),\,t\big)\,d\sigma.$$

Аналогічно, (33) можемо використати для зображення різниць

$$h_1(t)-h_2(t),\qquad \frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)},\qquad \mu_{ix_1}(y_2h_1(t),t)-\mu_{ix_1}(y_2h_2(t),t),$$

$$\mu_{ix_1x_1}(y_2h_1(t),t)-\mu_{ix_1x_1}(y_2h_2(t),t), \qquad \mu_{it}(y_2h_1(t),t)-\mu_{it}(y_2h_2(t),t), \quad i=1,2.$$

Використовуючи (33) і підставляючи (31), (32) в (26), (30), одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $p(t),\ c(t)$, яка має лише тривіальний розв'язок $p(t)=0,\ c(t)=0,\ t\in[0,T]$. Звідси отримуємо $p_1(t)=p_2(t)$, $c_1(t)=c_2(t)$, а отже, $h_1(t)=h_2(t),\ t\in[0,T]$. Враховуючи це в задачі (23)–(25), знаходимо $v_1(y_1,y_2,t)=v_2(y_1,y_2,t),\ (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T$. Отже, задача (1)–(4) не може мати двох різних розв'язків при $(x_1,x_2,t)\in\overline{\Omega}_T$.

Література

1. *Мамаюсупов О. Ш.* Об определении коэффициента параболического уравнения // Исслед. по интегро-дифференциальным уравннениям. – 1989. – Вып. 22. – С. 157–160.
2. *Cannon J., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**. – P. 149–163.
3. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності в багатошаровому середовищі // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1987. – **40**, № 2. – С. 153–159.
4. *Пабирівська Н. В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 51–58.
5. *Саватеев Е. Г.* Сведение обратной задачи для уравнения параболического типа // Докл. РАН. – 1994. – **334**, № 5. – С. 562–563.
6. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
7. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
8. *Снітко Г. А.* Обернена задача визначення молодшого коефіцієнта в параболічному рівнянні в області з вільною межею // Вісн. нац. ун-ту „Львів. політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 643. – С. 45–52.
9. *Снітко Г. А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 37–47.
10. *Баранська І. Є.* Обернена задача в області з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 17–28.
11. *Баранська І. Є., Іванчов М. І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457–484.
12. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
13. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Stud.: Monogr. Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – **10**. – 238 p.

Одержано 11.10.15,
після доопрацювання — 07.12.15