УДК 517.956.4

В. М. Лось (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ДОСТАТНІ УМОВИ КЛАСИЧНОСТІ РОЗВ’ЯЗКІВ ЗАГАЛЬНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

We establish new sufficient conditions under which the generalized solutions of initial-boundary-value problems for the linear parabolic differential equations of any order with complex-valued coefficients are classical. These conditions are formulated in the terms of belonging of the right-hand sides of this problem to certain anisotropic Hörmander spaces. In the definition of classical solution, its continuity on the line connecting the lateral surface with the base of the cylinder (in which the problem is considered) is not required.

Найдены новые достаточные условия того, что обобщенные решения начально-краевых задач для линейных параболических дифференциальных уравнений произвольного порядка с комплексными коэффициентами являются классическими. Эти условия формулируются в терминах принадлежности правых частей задачи некоторым анизотропным пространством Хермандера. В определении классического решения не требуется его непрерывность на линии соединения боковой поверхности и основания цилиндра, в котором рассматривается задача.

1. Вступ. Сучасна теорія загальних параболічних мішаних задач розроблена для шкал функціональних просторів Гельдера і Соболєва [1 – 8]. Актуальним є питання про те, за яких умов узагальнений розв’язок такої задачі є класичним, тобто коли він у термінах класичних похідних і слідів функцій задовольняє рівняння у відкритому циліндрі, а на його бічній поверхні і основі — крайові і початкові умови відповідно. У роботах [2, 3, 9 – 12] відповідь на це питання отримано у термінах належності правих частин задачі деяким просторам Гельдера або Соболєва. Зазначимо [13] (теорема 7.9.8), що неперервності у замкненому циліндрі правої частини параболічного рівняння недостатньо для класичності розв’язку мішаної задачі навіть у випадку однорідних крайових і початкових умов.

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва було запропоноване Л. Хермандером у [14]. Це простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Для них роль показника регулярності розподілів відіграє вагова функція μ, що залежить від кількох дуальних змінних. Такі простори знайшли різні застосування в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними [14 – 20].

В. А. Михайлець і О. О. Мурач [18 – 26] побудували теорію загальних еліптичних диференціальних операторів і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера.

У роботах [27 – 36] досліджено мішані параболічні задачі у гільбертових просторах Хермандера. У статті [35] отримано достатні умови класичності узагальнених розв’язків мішаних задач для лінійних параболічних диференціальних рівнянь другого порядку. Ці умови, зокрема, гарантують неперервність розв’язку у замкненому циліндрі.

У різних практичних задачах (див., наприклад, [37], гл. 3, §2, п. 3) корисно розглядати класичні розв’язки, які не є неперервними на лінії з’єднання бічної поверхні і основи циліндра, в якому досліджується задача. Мета цієї роботи — встановити достатні умови того, що узагальнені розв’язки є класичними у щойно зазначеному сенсі. В роботі розглядаються початково-крайові задачі для лінійних параболічних диференціальних рівнянь довільного порядку з комплексними коефіцієнтами. Ці достатні умови сформульовано у термінах належності правих частин задачі відповідним просторам Хермандера. Їх застосування дозволяє отримати більш тонкі достатні умови, ніж це можливо у межах класичних шкал функціональних просторів Гельдера і Соболєва.

2. Постановка задачі. Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо через $\Omega := G \times (0,\tau)$ відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$ є замиканням Ω і S відповідно.

Розглянемо у циліндрі Ω параболічну початково-крайову задачу

$$A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = f(x,t)$$
$$\text{для всіх} \quad x \in G \quad \text{і} \quad t \in (0,\tau), \tag{1}$$

$$B_j(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_S \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leq m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)\big|_S = g_j(x,t)$$
$$\text{для всіх} \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,\tau) \quad \text{і} \quad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{2}$$

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = h_k(x) \quad \text{для всіх} \quad x \in G \quad \text{і} \quad k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\}. \tag{3}$$

Тут b, m і всі m_j — довільно задані цілі числа, такі, що $m \geq b \geq 1$, $\varkappa := m/b \in \mathbb{Z}$ і $m_j \geq 0$. Число $2b$ називається параболічною вагою цієї задачі. Усі коефіцієнти лінійних диференціальних виразів $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ і $B_j := B_j(x,t,D_x,\partial_t)$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно, тобто

$$a^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega}) := \big\{ w \restriction \overline{\Omega} \colon w \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \big\}$$

і

$$b_j^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{S}) := \big\{ v \restriction \overline{S} \colon v \in C^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}) \big\}.$$

Будемо використовувати позначення $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ і $t \in \mathbb{R}$. Тут i — уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. У формулах (1) і (2) та їх аналогах підсумовування ведеться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ і β, які задовольняють умову, вказану під знаком суми. Як звичайно, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ для $\xi := (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

Нагадаємо [1] (§ 9, п. 1), що початково-крайова задача (1)–(3) називається параболічною у циліндрі Ω, якщо виконуються такі умови.

***Умова* 1.** Для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0,\tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, справджується

$$A^\circ(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^\alpha p^\beta \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Для формулювання умови 2 довільно виберемо точку $x \in \Gamma$, дійсне число $t \in [0,\tau]$, дотичний вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ до межі Γ у точці x та число $p \in \mathbb{C}$, де $\operatorname{Re} p \geq 0$, такі, що $|\xi| + |p| \neq 0$.

Нехай $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x.$ З умови 1 та нерівності $n \geq 2$ випливає, що многочлен $A^{\circ}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ має рівно m коренів $\zeta_j^{+}(x,t,\xi,p),$ $j=1,\ldots,m,$ із додатною і m коренів із від'ємною уявними частинами (з урахуванням їх кратності).

***Умова* 2.** При кожному такому виборі $x,$ $t,$ ξ та p многочлени

$$B_j^{\circ}\big(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p\big) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,\left(\xi+\zeta\nu(x)\right)^{\alpha} p^{\beta}, \quad j=1,\ldots,m,$$

змінної $\zeta \in \mathbb{C}$ лінійно незалежні по модулю многочлена

$$\prod_{j=1}^{m}\big(\zeta-\zeta_j^{+}(x,t,\xi,p)\big).$$

Зауважимо, що умова 1 є умовою $2b$-параболічності за І. Г. Петровським [38] диференціального рівняння $Au=f$ у замкненому циліндрі $\overline{\Omega}$, а умова 2 відображає той факт, що система крайових диференціальних операторів $\{B_1,\ldots,B_m\}$ накриває диференціальний оператор A на бічній поверхні $\overline{S}$ цього циліндра.

3. Простори Хермандера, пов'язані з задачею. Вони є окремим випадком гільбертових функціональних просторів $H^{\mu}:=\mathcal{B}_{2,\mu}$, введених і досліджених Л. Хермандером у [14] (п. 2.2), а згодом і Л. Р. Волевичем та Б. П. Панеяхом [15] (§ 2, 3). Для зручності наведемо коротко необхідні означення (більш детально див. [36], п. 2).

Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є вимірна за Борелем функція $\mu\colon \mathbb{R}^k \to (0,\infty)$, яка задовольняє таку умову: існують такі додатні числа c та l, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c\big(1+|\xi-\eta|\big)^{l} \quad \text{для довільних} \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^k.$$

За означенням комплексний лінійний простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|^2_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі всі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.) Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми $\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}$.

Нам знадобиться версія простору $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої непорожньої множини $V \subset \mathbb{R}^k$. Лінійний простір $H^{\mu}(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \restriction V$ всіх розподілів $w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на множину V. У цьому просторі норму задано формулою

$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf\big\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}\colon w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k), u = w\restriction V\big\}.$$

Простір $H^{\mu}(V)$ є гільбертовим відносно цієї норми.

Для зручності позначень приймемо $\gamma := 1/(2b)$. Далі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu_{s,\varphi}(\xi',\xi_k) := \mu(\xi',\xi_k) := \bigl(1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma}\bigr)^{s/2}\varphi\bigl((1+|\xi'|^2+|\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\bigr), \qquad (4)$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ — аргументи функції μ, числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ належить класу $\mathcal{M}$.

За означенням клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$, які задовольняють такі умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to \to 1$ при $r \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорію повільно змінних функцій (на нескінченності) викладено, наприклад, у монографії [39]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{q_1}\,(\log\log r)^{q_2}\ldots(\underbrace{\log\ldots\log}_{k\ \text{разів}} r\,)^{q_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $q_1, q_2, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розв'язки u початково-крайової задачі (1)–(3) та праві частини f рівняння (1) будемо розглядати в анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$, де показник μ визначено формулою (4), в якій $k := n+1$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ є анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s,s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x,t)$ за просторовою змінною $x \in \Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності за часовою змінною $t \in (0,\tau)$. В загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, мають місце неперервні і щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \qquad (5)$$

Нам знадобляться також анізотропні простори Хермандера, задані на бічній поверхні $S = = \Gamma \times (0,\tau)$ циліндра Ω. До них будуть належати праві частини g_j крайових умов (2). Означимо ці простори, використавши спеціальні локальні карти на S (див. [31], п. 1). Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi) := H^{\mu}(\Pi)$, де показник μ визначено формулою (4), в якій $k := n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворено локальними картами $\theta_j\colon \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1,\ldots,\lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Окрім цього, довільно виберемо такі функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1,\ldots,\lambda$, що $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda}\chi_j = 1$ на Γ.

За означенням лінійний простір $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j \in \{1,\ldots,\lambda\}$ функція

$$v_j(y,t) := \chi_j\bigl(\theta_j(y)\bigr)v\bigl(\theta_j(y),t\bigr)$$

аргументів $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$ належить до $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)$.

У просторі $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ норму задано формулою

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda}\|v_j\|^2_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Pi)}\right)^{1/2}.$$

Цей простір є гільбертовим відносно введеної норми і не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [31] (теорема 1).

Уведемо простори, до яких належать праві частини h_k початкових умов (3). Це ізотропні гільбертові простори Хермандера $H^{s;\varphi}(G) := H^{\mu}(G)$ з показником $\mu(\xi) := (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\big((1+|\xi|^2)^{1/2}\big)$ аргументу $\xi \in \mathbb{R}^n$. Їх виділили і систематично використовували В. А. Михайлець та О. О. Мурач у теорії еліптичних крайових задач [18, 19].

Далі, для формулювання основного результату введемо необхідні локальні аналоги просторів $H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$, $H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ і $H^{s;\varphi}(G)$.

Нехай U — така відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$, що $U \cap \Gamma = \varnothing$, $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$, $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_2 := U \cap S$ і $\pi_3 := U \cap G$.

Позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$ лінійний простір усіх розподілів u в області Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \omega\cup\pi_1$. Топологія в цьому просторі задається напівнормами

$$u \mapsto \|\chi u\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(\Omega)},$$

де χ — довільна згадана вище функція. Подібно до цього позначимо через $H^{s,s\gamma;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s\gamma;\varphi}(S)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{S})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_2$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$v \mapsto \|\chi v\|_{H^{s,s\gamma;\varphi}(S)},$$

де χ — довільна щойно згадана функція. Нарешті, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$ лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{G})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_3$. Топологія у цьому просторі задається напівнормами

$$w \mapsto \|\chi w\|_{H^{s;\varphi}(G)},$$

де χ — довільна щойно згадана функція.

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболєвськими просторами (анізотропними на Ω і S або ізотропними на G). У цьому випадку будемо пропускати індекс φ у позначеннях цих просторів.

4. Основний результат. Нехай σ_0 — таке найменше ціле число, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \ \text{ для всіх } \ j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Зауважимо, що якщо $m_j \leq 2m-1$ для всіх $j \in \{1,\ldots,m\}$, то $\sigma_0 = 2m$.

Попередньо позначимо через $\mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}$ підпростір гільбертового соболєвського простору

$$\mathcal{H}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} :=$$

$$:= H^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{\sigma_0-m_j-1/2,(\sigma_0-m_j-1/2)/(2b)}(S) \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{\sigma_0-2bk-b}(G),$$

вектор-функції $(f, g_1,\ldots,g_m,h_0,\ldots,h_{\varkappa-1})$ якого задовольняють природні умови узгодження правих частин задачі (1)–(3). Ці умови (див. [1], §11, або [2], §14, або [36], п. 3) полягають у тому, що похідні $\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}$, які можна обчислити з параболічного рівняння (1) та початкових умов (3), повинні задовольняти при $x \in \Gamma$ крайові умови (2) та співвідношення, що виникають в результаті диференціювання цих крайових умов за змінною t.

Із результату М. В. Житарашу [5] (теорема 9.1) випливає, що для кожної вектор-функції

$$(f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)} \tag{6}$$

задача (1) – (3) має єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$. Таку функцію u називаємо узагальненим розв'язком цієї задачі із правою частиною (6).

Наведемо означення класичного розв'язку цієї задачі. Позначимо $m_0 := \max\{m_1, \ldots, m_m\}$.

Означення 1. *Узагальнений розв'язок* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *задачі* (1) – (3) *назвемо класичним, якщо* $u \in C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$, *всі узагальнені частинні похідні* $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$, *для яких* $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le \le m_0$, *є неперервними на* $\Omega \cup S$, *а всі узагальнені частинні похідні* $\partial_t^k u$, *для яких* $0 \le k \le \varkappa - 1$, *є неперервними на* $\Omega \cup G$.

Тут, як звичайно, $C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$ — множина функцій, що є неперервно диференційовними на Ω разом з усіма своїми частинними похідними $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$, для яких $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le 2m$.

Зауважимо, що в означенні класичного розв'язку задачі (1) – (3) ми не вимагаємо його неперервності у замкненому циліндрі $\overline{\Omega}$.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1. *Покладемо* $\sigma_1 := 2m + b + n/2$, $\sigma_2 := m_0 + b + n/2$, $\sigma_3 := 2m - b + n/2$. *Припустимо, що* $\sigma_2 > \sigma_0$ *і* $\sigma_3 > \sigma_0$. *Нехай функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком задачі* (1) – (3), *праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b);\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{\sigma_2-2m,(\sigma_2-2m)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega, S) \cap$$

$$\cap H^{\sigma_3-2m,(\sigma_3-2m)/(2b);\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\Omega, G), \tag{7}$$

$$g_j \in H^{\sigma_2-m_j-1/2,(\sigma_2-m_j-1/2)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{8}$$

$$h_k \in H^{\sigma_3-2bk-b;\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(G) \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\} \tag{9}$$

з деякими функціональними параметрами φ_1, φ_2 *і* $\varphi_3 \in \mathcal{M}$ *такими, що*

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, 2, 3\}. \tag{10}$$

Тоді $u(x,t)$ *є класичним розв'язком задачі* (1) – (3).

***Зауваження* 1.** Якщо сформулювати аналог теореми 1 для соболєвської шкали (випадок $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv 1$), то доведеться замінити умови цієї теореми на більш сильні: для правих частин задачі виконуються включення (7) – (9) при деяких $\sigma_1 > 2m + b + n/2$, $\sigma_2 > m_0 + b + n/2$ і $\sigma_3 > 2m - b + n/2$.

5. Доведення основного результату. Доведення теореми 1 спирається на теорему про локальне підвищення регулярності розв'язку задачі (1) – (3) та деяку модифікацію теореми вкладення Хермандера [14] (теорема 2.2.7). Для зручності сформулюємо необхідні твердження.

Твердження 1 ([36], теорема 2). *Нехай* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3) *з правими частинами* (6). *Припустимо, що*

$$f \in H^{\sigma-2m,(\sigma-2m)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1), \tag{11}$$

$$g_j \in H^{\sigma-m_j-1/2,(\sigma-m_j-1/2)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\ldots,m\}, \tag{12}$$

$$h_k \in H^{\sigma-2bk-b;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3) \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\} \tag{13}$$

для деяких $\sigma > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H^{\sigma,\sigma/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$.

Твердження 2 ([34], лема 8.1). *Нехай* $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $s := p+b+n/2$ *та* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді справджуються такі твердження*:

(i) *Якщо* φ *задовольняє умову*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{14}$$

то кожна функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *має таку властивість*: *всі її узагальнені частинні похідні* $D^\alpha_x \partial^\beta_t w(x,t)$ *з* $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$ *є неперервними на* $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) *Нехай* V — *непорожня відкрита підмножина* $\mathbb{R}^{n+1}$ *і ціле* k *таке, що* $1 \leq k \leq n$. *Якщо кожна функція* $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *з* $\operatorname{supp} w \subset V$ *задовольняє умову* $\partial^j w/\partial x_k^j \in C(\mathbb{R}^{n+1})$ *для кожного* $j \in \mathbb{Z}$ *з* $0 \leq j \leq p$, *то* φ *задовольняє умову* (14).

Нам буде потрібний такий наслідок із твердження 2.

***Наслідок* 1.** *Твердження* 3(i) *залишається правильним, якщо у ньому замінити* $H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ *на* $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ *і* $\mathbb{R}^{n+1}$ *на* $\overline{\Omega}$.

Справді, з означення простору $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ випливає, що для кожної функції $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ існує така функція $w \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$, що $u = w$ в Ω. Тому з твердження 3(i) випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D^\alpha_x \partial^\beta_t u(x,t)$ з $0 \leq |\alpha| + 2b\beta \leq p$ є неперервними на $\overline{\Omega}$.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку покажемо, що $u \in C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$. З умов (7)–(9) маємо включення

$$f \in H^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b);\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing),$$

$$g_j \in \mathcal{D}'(S) = H^{\sigma_1-m_j-1/2,(\sigma_1-m_j-1/2)/(2b);\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\ldots,m\},$$

$$h_k \in \mathcal{D}'(G) = H^{\sigma_1-2bk-b;\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\varnothing) \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0,\ldots,\varkappa-1\}$$

з $\sigma_1 := 2m+b+n/2 > \sigma_3 > \sigma_0$. З цих включень і твердження 1, де $\sigma := 2m+b+n/2$, випливає, що

$$u \in H^{2m+b+n/2,\ (2m+b+n/2)/(2b);\ \varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing). \tag{15}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини Ω. Знайдеться такий окіл $O(x_0)$ цієї точки, що $O(x_0) \subset \subset \Omega$ і $\operatorname{dist}(O(x_0),\Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (15) випливає включення $\chi u \in H^{2m+b+n/2,\ (2m+b+n/2)/(2b);\ \varphi_1}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := 2m$, маємо включення

$$D_x^\alpha \partial_t^\beta (\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \le |\alpha| + 2b\beta \le 2m.$$

З останніх включень випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$ з $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le$ $\le 2m$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою Ω, то $u \in C_{x,t}^{2m,2m/(2b)}(\Omega)$.

Аналогічно покажемо, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$, для яких $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le$ $\le m_0$, є неперервними на $\Omega \cup S$. З умов (7)–(9) маємо включення

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_2 - 2m, (\sigma_2 - 2m)/(2b); \varphi_2}(\Omega, S),$$

$$g_j \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_2 - m_j - 1/2, (\sigma_2 - m_j - 1/2)/(2b); \varphi_2}(S) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$h_k \in \mathcal{D}'(G) = H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_2 - 2bk - b; \varphi_2}(\varnothing) \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\}$$

з $\sigma_2 := m_0 + b + n/2$. З цих включень і твердження 1, де $\sigma := m_0 + b + n/2$, випливає, що

$$u \in H_{\mathrm{loc}}^{m_0 + b + n/2,\ (m_0 + b + n/2)/(2b);\ \varphi_2}(\Omega, S). \tag{16}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup S$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться такий окіл $O(x_0)$ цієї точки, що $O(x_0) \subset \Omega \cup S$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\mathrm{supp}\, \chi \subset \Omega \cup S$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (16) випливає включення $\chi u \in$ $\in H^{m_0 + b + n/2,\ (m_0 + b + n/2)/(2b);\ \varphi_2}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := m_0$, маємо включення

$$D_x^\alpha \partial_t^\beta (\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \le |\alpha| + 2b\beta \le m_0.$$

З останніх включень випливає, що всі узагальнені частинні похідні $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$ з $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le m_0$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 є довільною точкою $\Omega \cup S$, то всі ці узагальнені частинні похідні неперервні на множині $\Omega \cup S$.

Насамкінець покажемо, що всі узагальнені частинні похідні $\partial_t^k u$, для яких $0 \le k \le \varkappa - 1$, є неперервними на $\Omega \cup G$. З умов (7)–(9) маємо включення

$$f \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_3 - 2m, (\sigma_3 - 2m)/(2b); \varphi_3}(\Omega, G),$$

$$g_j \in \mathcal{D}'(S) = H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_3 - m_j - 1/2, (\sigma_3 - m_j - 1/2)/(2b); \varphi_3}(\varnothing) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$h_k \in H_{\mathrm{loc}}^{\sigma_3 - 2bk - b; \varphi_3}(G) \quad \text{для всіх} \quad k \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\}$$

з $\sigma_3 := 2m - b + n/2$. З цих включень і твердження 1, де $\sigma := 2m - b + n/2$, випливає, що

$$u \in H_{\mathrm{loc}}^{2m - b + n/2,\ (2m - b + n/2)/(2b);\ \varphi_3}(\Omega, G). \tag{17}$$

Виберемо довільну точку x_0 з множини $\Omega \cup G$. У топології $\overline{\Omega}$ знайдеться такий окіл $O(x_0)$ цієї точки, що $O(x_0) \subset \Omega \cup G$ і $\mathrm{dist}(O(x_0), \Gamma) > 0$. Тоді існує функція $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\mathrm{supp}\, \chi \subset \Omega \cup G$ і $\chi = 1$ на множині $O(x_0)$. З (17) випливає включення $\chi u \in$ $\in H^{2m - b + n/2,\ (2m - b + n/2)/(2b);\ \varphi_3}(\Omega)$. На підставі цього включення і наслідку 1, де $p := 2m - 2b$, маємо включення

$$D_x^\alpha \partial_t^k (\chi u) \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \le |\alpha| + 2bk \le 2m - 2b.$$

З останніх включень при $|\alpha| = 0$ випливає, що всі узагальнені частинні похідні $\partial_t^k u$ з $0 \le k \le$ $\le \varkappa - 1$ є неперервними в деякому околі точки x_0. Оскільки x_0 — довільна точка $\Omega \cup G$, то всі ці узагальнені частинні похідні неперервні на множині $\Omega \cup G$.

Література

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53 – 161.
2. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. – Berlin: Springer, 1972. – Vol. II. – xi+242 p.
5. *Житарашу Н. В.* Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И. Г. Петровскому уравнения // Мат. сб. – 1985. – **128(170)**, № 4. – С. 451 – 473.
6. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
7. *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial Different. Equat., VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205 – 316.
8. *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.
9. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 2. – С. 97 – 154.
10. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 3. – С. 3 – 146.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
12. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О корректности задач Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка с коэффициентами из классов Дини // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 328 – 337.
13. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
14. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.)
15. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
16. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
17. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. mat. pura ed appl. – 2006. – **185**, № 1. – P. 1 – 62.
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hoӧrmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces // Results Math. – 2015. – **67**, № 1. – P. 135 – 152.
21. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. I // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 2. – P. 244 – 262.
22. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
23. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces, and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
24. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
25. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
26. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.

27. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 2. – P. 146 – 160.
28. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23 – 31.
29. *Лось В. М.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. – 2014. – № 10. – С. 24 – 32.
30. *Los V. M.* Mixed problems for the two-dimensional heat-conduction equation in anisotropic Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, № 5. – P. 735 – 747.
31. *Los V. M.* Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder // J. Math. Sci. – 2016. – **217**, № 4. – P. 456 – 467.
32. *Лось В. М., Мурач О. О.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера // arXiv:1510.06270.
33. *Лось В. М.* Теореми про ізоморфізми для деяких параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера: граничний випадок // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6. – С. 786 – 799.
34. *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications // Communs Pure and Appl. Anal. – 2017. – **16**, № 1 (to appear). arXiv:1511.04688.
35. *Лось В. М.* Класичні розв'язки параболічних початково-крайових задач і простори Хермандера // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 9. – С. 1229 – 1239.
36. *Los V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* General parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces // arXiv: 1610.06862.
37. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики: Учеб. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999. – 799 с.
38. *Petrovskii I. G.* On the Cauchy problem for systems of partial differential equations in the domain of non-analytic functions // Bull. Mosk. Univ. Mat., Mekh. – 1938. – **1**, № 7. – P. 1 – 72 (in Russian).
39. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.

Одержано 24.05.16