УДК 517.5

Т. І. Гіщак (Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. І. Франка)

ПРО ОДНУ ТЕОРЕМУ ЄДИНОСТІ ДЛЯ ВАГОВОГО ПРОСТОРУ ГАРДІ

We prove the uniqueness theorem for the space of functions analytic in the right half plane and satisfying the condition

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}dr\right\}<+\infty.$$

Доказана теорема единственности для пространства функций, аналитических в правой полуплоскости, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}dr\right\}<+\infty.$$

1. Вступ. Допоміжні твердження. Нехай $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1\le p<+\infty$, — простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_+=\{z\colon \mathrm{Re}z>0\}$, тобто простір функцій G, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|G\|^p_{H^p(\mathbb{C}_+)}:=\sup\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big|G(x+iy)\big|^p dy\colon x\in(0;+\infty)\right\}<+\infty.$$

Функції $G\in H^p(\mathbb{C}_+)$ мають [1–4] майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $G_0(iy) = G(iy)$, $G\in L^p(\partial\mathbb{C}_+)$ і $\|G\|^p_{H^p(\mathbb{C}_+)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\big|G(iy)\big|^p dy$. Кожній функції $G\in H^p(\mathbb{C}_+)$ відповідає [5, 6] сингулярна гранична функція h, яка в точках неперервності визначається рівністю

$$h(t_2)-h(t_1)=\lim_{x\to0+}\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln\big|G(x+iy)\big|dy-\int\limits_{t_1}^{t_2}\ln\big|G(iy)\big|dy,\quad t_1<t_2. \tag{1}$$

Сингулярна гранична функція h є незростаючою, і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь на $\mathbb{R}$.

У статті [7] розглянуто простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $0\le\sigma<+\infty$, функцій G, аналітичних у $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\big\|G\big\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)}:=\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\big|G(re^{i\varphi})\big|^p e^{-\sigma pr|\sin\varphi|}dr\colon \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right\}<+\infty.$$

Сингулярна гранична функція h функції $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ також визначається рівністю (1), вона є незростаючою і її похідна дорівнює нулеві майже скрізь. Окрім цього, кожна функція $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $G_0(iy)=G(iy)$ і $G(iy)e^{-\sigma|y|}\in L^p(\mathbb{R})$. Функція G належить до $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли функції $G^+(z)=G(z)e^{i\sigma z}$ і $G^-(z)=G(z)e^{-i\sigma z}$ задовольняють відповідно умови

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\big|G^+(re^{i\varphi})\big|^p\,dr\colon \varphi\in\left(0;\frac{\varphi}{2}\right)\right\}<+\infty$$

і

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|G^-(re^{i\varphi})\right|^p dr : \varphi\in\left(-\frac{\varphi}{2};0\right)\right\}<+\infty.$$

При цьому [8] $H^p_0(\mathbb{C}_+)=H^p(\mathbb{C}_+)$, норми $\|G\|_{H^p_0(\mathbb{C}_+)}$ та $\|G\|_{H^p(\mathbb{C}_+)}$ є еквівалентними на $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Відомим є наступне твердження з [1 – 4].

Теорема A. *Якщо $G\in H^p(\mathbb{C}_+)$, $1\le p<+\infty$ і $\lim_{x\to+\infty}|G(x)|^{1/x}=0$, то $G\equiv 0$.*

Метою статті є пошук аналога теореми A для простору $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Основними результатами статті є теореми 1 та 2. При цьому ми отримаємо наступне доповнення до теореми A.

Наслідок. *Якщо функція $G\in H^p(\mathbb{C}_+), 1\le p<+\infty$, не має нулів у $\mathbb{C}_+$ і*

$$\varliminf_{x\to+\infty}|G(x)|^{1/x}=0,$$

то $G\equiv 0$.

Цей наслідок можна також отримати з оцінок, наведених у [9].

Через c_j позначимо додатні сталі. Нехай $z=x+iy=re^{i\varphi}$,

$$Q_1(t;z)=\frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)}$$

і

$$K_0(r):=2\sum_{1<|\lambda_k|\le r}\left(\frac{1}{|\lambda_k|^2}-\frac{1}{r^2}\right)\mathrm{Re}\lambda_k-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)dh(t)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{1\le|t|\le r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\log\left|G(it)\right|dt.$$

Для подальшого нам знадобиться наступне факторизаційне твердження, яке випливає з результатів [10] та формули Карлемана [7] (у потрібній формі її наведено в [5, 11]).

Лема 1. *Якщо $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і $G\not\equiv 0$, то*

$$G(z)=e^{ia_0+a_1z}\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q_1(t;z)\left(\ln|G(it)|dt+dh(t)\right)\right\}\times$$

$$\times\prod_{|\lambda_n|\le 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}W_n(z), \tag{2}$$

де $a_0\in\mathbb{R}$ і $a_1\in\mathbb{R}$ — сталі, λ_n — нулі функції G і $W_n(z)=\dfrac{1-z/\lambda_n}{1+z/\overline{\lambda}_n}\exp\left(\dfrac{z}{\lambda_n}+\dfrac{z}{\overline{\lambda}_n}\right)$. При цьому добутки і інтеграли у (2) *збігаються рівномірно і абсолютно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$, $\ln\left|G(it)\right|\in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ і*

$$\varlimsup_{x\to+\infty}K_0(r)<+\infty.$$

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $0 \le \sigma < +\infty$, $1 \le p < +\infty$, *функція* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *не має нулів в* $\mathbb{C}_+$ *і*

$$\varliminf_{x\to+\infty}\left(\left|G(x)\right|^{1/x}x^{2\sigma/\pi}\right)=0. \tag{3}$$

Тоді $G\equiv 0$.

Доведення. Припустимо, що $G\not\equiv 0$. Покажемо, що

$$\varliminf_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x\right)>-\infty. \tag{4}$$

Оскільки

$$\mathrm{Re}\frac{Q_1(t;x)}{i}=x\frac{1+2t^2-x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}$$

і

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|\mathrm{Re}\frac{Q_1(t;x)}{i}dt=\frac{x}{\pi}-\frac{2x}{\pi}\ln x,\quad x>0,$$

то згідно з лемою 1

$$\frac{\ln|G(x)|}{x}+\frac{2\sigma}{\pi}\ln x-\frac{\sigma}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2-x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\left(\ln\left(e^{-\sigma|t|}|G(it)|\right)dt+dh(t)\right)=$$

$$=-\Xi_1(x)-\Xi_2(x)+\Xi_3(x)+\Xi_4(x),$$

де

$$\Xi_1(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\left(\ln e^{-\sigma|t|}|G(it)|dt+dh(t)\right),$$

$$\Xi_2(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\sigma|t|dt,$$

$$\Xi_3(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\ln^+\left(|G(it)|\right)dt,$$

$$\Xi_4(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt+dh(t)\right).$$

Оскільки $\dfrac{x^2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2}\le 1$, якщо $x\in\mathbb{R}$ і $t\in\mathbb{R}$, то

$$\Xi_1(x) \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} \ln\left(e^{-\sigma|t|}|G(it)|\right) dt \leq \frac{1}{p\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(e^{-p\sigma|t|}|G(it)|^p\right) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{p\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma p|t|} \, |G(it)|^p \, dt \leq c_1, \quad x \in (0; +\infty).$$

Окрім цього, $\Xi_3(x) \geq 0$, якщо $x \in (0; +\infty)$, і

$$\Xi_2(x) \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{(t^2+1)(1+t^2)^2} \sigma|t| dt \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} \sigma|t| dt = c_2 < +\infty,$$

якщо $x \in (1; +\infty)$. Далі,

$$\Xi_4(x) \geq c_3 + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1+2t^2}{(t^2+x^2)(1+t^2)^2} \left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right) dt + dh(t)\right) \geq$$

$$\geq c_3 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{(1+t^2)^2} \left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right) dt + dh(t)\right) \geq$$

$$\geq c_4 + \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geq 1} \frac{1}{t^4} \left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right) dt + dh(t)\right),$$

якщо $x \in (1; +\infty)$. До того ж, згідно з лемою 1,

$$\int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \left(\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right) dt - dh(t)\right) \leq c_5 + \int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ |G(it)| \, dt$$

і

$$\int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln^+ |G(it)| \, dt \leq \int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \left(\ln^+ |G(it)| \, e^{-\sigma|t|} dt\right) + \int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \sigma \, |t| \, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{p} \int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \left(\ln^+ \left(|G(it)| \, e^{-\sigma|t|}\right)^p dt\right) + c_6 + \sigma \ln r \leq$$

$$\leq \frac{1}{p} \int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) |G(it)|^p \, e^{-p\sigma|t|} dt + c_6 + \sigma \ln r \leq$$

$$\leq \frac{1}{p} \int\limits_{1}^{r} |G(it)|^p \, e^{-p\sigma|t|} dt + c_6 + \sigma \ln r \leq c_7 + \sigma \ln r, \quad r \in (1; +\infty).$$

Далі, $\dfrac{1}{t^2} \le \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{4r^2}\right)$, якщо $|t| \le |r|$. Тому

$$\int\limits_1^r \frac{1}{t^2}\left(\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt - dh(t)\right) \le \int\limits_1^r \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2}\right)\left(\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt - dh(t)\right) \le$$

$$\le \int\limits_1^{2r} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(2r)^2}\right)\left(\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt - dh(t)\right) \le c_7 + \sigma \ln r.$$

Аналогічно,

$$\int\limits_{-r}^{-1} \frac{1}{t^2}\left(\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt - dh(t)\right) \le c_7 + \sigma \ln r, \quad r \in [1; +\infty).$$

Отже,

$$\int\limits_{1\le|t|\le r} \frac{1}{t^2}\left(\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt - dh(t)\right) \le c_7 + \sigma \ln r, \quad r \in [1; +\infty).$$

Тому

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt + dh(t)\right) = \frac{1}{t^2}\int\limits_1^{t} \frac{1}{\tau^2}\left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(i\tau)|}d\tau\right) + dh(\tau)\right)\Bigg|_1^{+\infty} -$$

$$-2\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\left(\int\limits_1^{t} \frac{1}{\tau^2}\left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(i\tau)|}\right)d\tau + dh(\tau)\right)\right) \ge -c_8.$$

Аналогічно,

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^4}\left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt + dh(t)\right) \ge -c_8.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{|t|\ge 1} \frac{1}{t^4}\left(-\ln^+\left(\frac{1}{|G(it)|}\right)dt + dh(t)\right) \ge -c_9.$$

Тому $\Xi_4(x) \ge -c_9$, якщо $x \in [1; +\infty)$. Отже, виконується (4), що суперечить умові (3).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *і*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left|G(x)\right|^{1/x} x^{2\sigma/\pi}\right) = 0, \tag{5}$$

то $G \equiv 0$.

Для доведення теореми 2 нам буде потрібне наступне твердження з [12].

Лема 2. *Нехай* G — *функція, голоморфна в куті* $\Lambda(\pi/2) = \{z\colon 0 < \arg < \pi/2\}$, *і для деякого* $p \in (0;+\infty)$ *виконуються такі умови*:

а) *існує гранична функція* $\tilde{G}\colon \partial\Lambda(\pi/2) \to \mathbb{C}$ *така, що* $\tilde{G} \in L^p(\partial\Lambda(\pi/2))$, *і для кожного проміжку* $(\delta;R)$, $0<\delta<R<+\infty$, $\tilde{G}(re^{i\pi/2}) = \lim^{(p)}_{\varphi\to\pi/2-} G(re^{i\varphi})$ *і* $\tilde{G}(r) = \lim^{(p)}_{\varphi\to 0+} G(re^{i\varphi})$;

б) $\sup\left\{\int_0^{+\infty} \left|G(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\varepsilon r^2} dt\colon \varphi\in(0;\pi/2)\right\} = A_f(\varepsilon) < +\infty$ *для кожного* $\varepsilon > 0$. *Тоді* $\sup\left\{\int_0^{+\infty} \left|G(re^{i\varphi})\right|^p dt\colon \varphi\in(0;\pi/2)\right\} \le \max\left\{\int_0^{+\infty} \left|G(re^{i\varphi})\right|^p dt\colon \varphi\in\{0;\pi/2\}\right\}$.

Доведення теореми **2.** Справді, з умов теореми 2 випливає, що $\int_0^{+\infty}\left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}\right|^p dx < +\infty$ для кожного $B\in(0;+\infty)$. Нехай $\ln z$ — гілка логарифма в $\mathbb{C}_+$, для якої $\ln 1 = 0$ і $F_B(z) = G(z)e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{Bz}$. Тоді

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\varepsilon r^2}dr = \int\limits_0^{+\infty}\left|G(re^{i\varphi})\right|^p e^{\frac{2p\sigma}{\pi}(r\cos\varphi\ln r - r\varphi\sin\varphi)}e^{Bpr\cos\varphi}e^{-\varepsilon r^2}dr.$$

Тому $\sup\left\{\int_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p e^{-\varepsilon r^2}dr : \varphi\in(-\pi/2;\pi/2)\right\} < +\infty$ для кожного $\varepsilon>0$. Існує [13] гранична функція $G_0\colon\partial\Lambda(\pi/2)\to\mathbb{C}$ така, що $G_0(z)e^{i\sigma z}\in L^p(\partial\Lambda(\pi/2))$ і для кожного проміжку $(\delta;R)$, $0<\delta<R<+\infty$, $G(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r} = \lim^{(p)}_{\varphi\to\pi/2-} G(re^{i\varphi})e^{\sigma re^{i\varphi}}$ і $G(r)e^{i\sigma r} = \lim^{(p)}_{\varphi\to 0+} G(re^{i\varphi})e^{i\sigma re^{i\varphi}}$. Водночас

$$F_B(re^{i\pi/2}) - F_B(re^{i\varphi}) = G(re^{i\pi/2})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(ir)(\ln r + i\pi/2)}e^{Bir} -$$

$$-G(re^{i\varphi})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi)(\ln r + i\varphi)}e^{B(r\cos\varphi+ir\sin\varphi)} =$$

$$= G(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r}e^{\frac{2\sigma}{\pi}ir\ln r}e^{Bir} - G(re^{i\varphi})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(r\cos\varphi+ir\sin\varphi)(\ln r+i\varphi)}e^{B(r\cos\varphi+ir\sin\varphi)} =$$

$$= \left(G(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r} - G(re^{i\varphi})e^{i\sigma re^{i\varphi}}\right)e^{\frac{2\sigma}{\pi}ir\ln r}e^{Bir} + G(re^{i\varphi})e^{i\sigma re^{i\varphi}}e^{\frac{2\sigma}{\pi}ir\ln r}e^{Bir} -$$

$$-G(re^{i\varphi})e^{\frac{2\sigma}{\pi}(r\cos\varphi+ir\sin\varphi)(\ln r+i\varphi)}e^{B(r\cos\varphi+ir\sin\varphi)}.$$

Тому $F_B(re^{i\pi/2}) - F_B(re^{i\varphi}) = \lim^{(p)}_{\varphi\to\pi/2-} F_B(re^{i\varphi})$ і $F_B(r) = \lim^{(p)}_{\varphi\to 0+} F_B(re^{i\varphi})$ для кожного проміжку $(\delta;R)$, $0<\delta<R<+\infty$. Отже, за лемою 2

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p dr : \varphi\in(0;\pi/2)\right\} \le \max\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p dr : \varphi\in\{0;\pi/2\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left|G(re^{i\pi/2})e^{-\sigma r}\right|^p dr; \int\limits_0^{+\infty}\left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}\right|^p dx\right\} < +\infty.$$

Аналогічні міркування застосовні і до кута $\Lambda(-\pi/2) = \{z\colon\ -\pi/2 < \arg < 0\}$. Тому

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|F_B(re^{i\varphi})\right|^p dr\colon \varphi\in(-\pi/2;0)\right\} =$$

$$= \max\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|G(re^{-i\pi/2})e^{-\sigma r}\right|^p dr;\ \int\limits_0^{+\infty} \left|G(x)e^{\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x}e^{Bx}\right|^p dx\right\} < +\infty.$$

Отже [14], $F_B \in H^p(\mathbb{C}_+)$ і $\|F_B\|^p = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_B(iy)|^p dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|G(iy)e^{-\sigma|y|}\right|^p dy \le \|G\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)}$. Тому [1–4] $|F_B(z)| \le \|G\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)}/x^{1/p}$, якщо $z = x+iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$. Таким чином, $\left|G(x)\right| \le$ $\le \|G\|_{H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)} e^{-\frac{2\sigma}{\pi}x\ln x} e^{-Bx}/x^{1/p}$ для кожного $x > 0$. Спрямувавши B до $+\infty$, отримаємо $G \equiv 0$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Функція $G(z) = (1+z)^{-2/p}\exp\left(-\dfrac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right)$ належить до $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і вказує на точність теорем 1 та 2 в тому сенсі, що замінити сталу σ на меншу в рівностях (3) і (5) не можна. Інші приклади дає теорема з [15].

1. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 306 с.
2. *Duren O.* Theory of H^p space. – New York, 1970. – 251 p.
3. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.
5. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Мат. студ. – 2001. – **16**, № 1. – С. 61 – 70.
6. *Fedorov M. A., Grishin A. F.* Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane // Math. Phys., Anal. and Geom. – 1998. – **1**, № 3. – P. 223 – 271.
7. *Винницький Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484 – 500.
8. *Седлецкий А. М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 75 – 82.
9. *Гурарий В. П.* Гармонический анализ в пространствах с весом // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1976. – **35**. – С. 21 – 76.
10. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
11. *Vynnytskyi B., Sharan V.* On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane // Mat. Stud. – 2000. – **14**, № 1. – P. 41 – 48.
12. *Martirosian V. M.* On a theorem of Djrbasian of the Phraugmen – Lindelof type // Math. Nachr. – 1997. – **144**. – P. 21 – 27.
13. *Мартиросян В. М.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1978. – **12**, № 5-6.
14. *Любарский Ю. И.* Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов // Изв. АН СССР. – 1988. – **52**, № 3. – С. 559 – 580.
15. *Дільний В. М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1257 – 1263.

Одержано 12.03.14,
після доопрацювання — 22.07.14