УДК 517.983

В. А. Мозель (Гос. учреждение „Отд-ние гидроакустики Ин-та геофизики
им. С. И. Субботина НАН Украины”, Одесса)

О C^*-АЛГЕБРЕ, ПОРОЖДЕННОЙ ОПЕРАТОРОМ БЕРГМАНА, КАРЛЕМАНОВСКИМ СДВИГОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА И КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

We study the C^*-algebra generated by the Bergman operator with piecewise continuous coefficients in the Hilbert space L_2 and extended by the Carleman rotation by an angle π. As a result, we obtain an efficient criterion for the operators from the indicated C^*-algebra to be Fredholm operators.

Вивчається C^*-алгебра, породжена діючими у гільбертовому просторі L_2 оператором Бергмана, операторами множення на кусочно-неперервні функції та карлемановським зсувом другого порядку (поворотом на кут π). Як результат одержано ефективний критерій фредгольмовості операторів розглянутої C^*-алгебри.

Введение. Пусть D — единичный круг комплексной плоскости. В гильбертовом пространстве $L_2(D)$ введем следующие операторы:

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^2}dD_\zeta$$

— известный оператор Бергмана;

$$(Wf)(z) = (W_g f)(z) = f(-z)$$

— унитарный оператор, порожденный поворотом $g(z) = -z$ второго порядка единичного круга, $g \in G$, G — конечная группа второго порядка, порожденная поворотом единичного круга на угол π.

Изучается C^*-алгебра $\mathfrak{R} = C^*(\mathfrak{A}, W_G)$, являющаяся расширением C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ операторов вида

$$A = a(z)I + b(z)B + L,$$

где L — компактный оператор; $a(z)$, $b(z)$ — кусочно-непрерывные в круге D функции, имеющие на линии ℓ разрывы первого рода, с помощью операторов сдвига $W_G = \{W_g : g \in G\}$.

Линия разрывов ℓ разбивает круг D на четыре части и строится следующим образом. Пусть ℓ_1 — дуга окружности, соединяющая точки -1 и $+1$, лежащая внутри круга, образующая с единичной окружностью в точке $\{-1\}$ угол $\pi/3$. Пусть, далее, $\ell_2 = g(\ell_1)$. Тогда

$$\ell = \ell_1 \cup \ell_2 \cup [-1; +1].$$

Алгебра операторов без сдвига $\mathfrak{A}$ описывается с помощью результатов работы [1]. Применяя локально-траекторный метод [2] (полное изложение см. в [3]), строим алгебру символов и устанавливаем эффективный критерий фредгольмовости операторов из описываемой C^*-алгебры со сдвигами.

1. Алгебра без сдвига. Для описания алгебры $\hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I}$ — идеал всех компактных операторов) воспользуемся локальным принципом [4–6] и результатом работы [1]. Через $A \overset{t}{\sim} B$ обозначаются локально эквивалентные в точке t операторы A и B [4]. Центральной коммутативной подалгеброй алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ является алгебра $\hat{\mathcal{Z}} = \left\{ aI + \mathfrak{I} : a \in C(\bar{D}) \right\}$, изоморфная алгебре $C(\bar{D})$. Обозначим через $J(z_0)$ максимальный идеал алгебры $\hat{\mathcal{Z}} \cong C(\bar{D})$, соответствующий точке $z_0 \in \bar{D}$, а через $\hat{J}(z_0) = J(z_0)\hat{\mathfrak{A}}$ двусторонний замкнутый идеал алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, порожденный идеалом $J(z_0) \in \hat{\mathcal{Z}}$. Далее, $\hat{\mathfrak{A}}(z_0) = \hat{\mathfrak{A}} / \hat{J}(z_0)$ и, наконец, π_{z_0}: $\hat{\mathfrak{A}} \to \hat{\mathfrak{A}}(z_0)$ — естественная проекция. Описание алгебр $\hat{\mathfrak{A}}(z_0)$ состоит из четырех случаев.

Случай 1: $z_0 \in \bar{D} \setminus (\ell \bigcup \partial D)$. Здесь оператор B локально эквивалентен компактному. Поэтому

$$A \overset{z_0}{\sim} a(z_0)I, \quad \hat{\mathfrak{A}}(z_0) \cong \mathbb{C}.$$

Гомоморфизм

$$\Phi\colon \mathfrak{A} \to \hat{\mathfrak{A}} \to \hat{\mathfrak{A}}(z_0) \cong \mathbb{C}$$

имеет вид

$$\Phi\colon A \to a(z_0).$$

Случай 2: $z_0 \in \partial D \setminus \ell$. Здесь $A \overset{z_0}{\sim} a(z_0)I + b(z_0)B = a(z_0)(I - B) + c(z_0)B$, $c(z) = a(z) + b(z)$, поэтому

$$\hat{\mathfrak{A}}(z_0) \cong \mathbb{C}^2$$

и

$$\Phi\colon A \to (a(z_0); c(z_0)).$$

Случай 3: $z_0 \in \ell \setminus \{-1; 1\}$. Пусть $a^{\pm}(z_0)$ — односторонние пределы в точке z_0. Тогда оператор B локально эквивалентен компактному в точке z_0; $A \overset{z_0}{\sim} a^+(z_0)\chi_+ I + a^-(z_0)\chi_- I$, где χ_+ и χ_- — характеристические функции правой и левой полуокрестностей точки $z_0 \in \ell$; $\hat{\mathfrak{A}} \cong \mathbb{C}^2$ и при гомоморфизме

$$\Phi\colon A \to \left(a^+(z_0);\ a^-(z_0) \right).$$

Случай 4: $z_0 \in \{-1; +1\}$. Введем обозначение $z_0^{\pm} = \pm 1$. Луночку с границами $\partial D^-; \ell_1$, где ∂D^- — часть границы единичного круга, находящаяся в нижней полуплоскости, обозначим через D_1; луночку с границами $\ell_1; [-1; 1]$ — через D_2; луночку с границами $[-1; 1]; \ell_2$ — через D_3; наконец, луночку с границами $\ell_2; \partial D^+$ (здесь ∂D^+ — часть границы единичного круга, лежащая в верхней полуплоскости) — через D_4.

Введем обозначения

$$a_k(z_{0j}) := \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D_j}} a_k(z), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$b_k(z_{0j}) := \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D_j}} b_k(z), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Теперь символ в точке $z_0 \in \{-1; +1\}$ записывается следующим образом:

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} d_1 & b(z_{01})\sqrt{t_1 t_2} & b(z_{01})\sqrt{t_1 t_3} & b(z_{01})\sqrt{t_1 t_4} \\ b(z_{02})\sqrt{t_2 t_1} & d_2 & b(z_{02})\sqrt{t_2 t_3} & b(z_{02})\sqrt{t_2 t_4} \\ b(z_{03})\sqrt{t_3 t_1} & b(z_{03})\sqrt{t_3 t_2} & d_3 & b(z_{03})\sqrt{t_3 t_4} \\ b(z_{04})\sqrt{t_4 t_1} & b(z_{04})\sqrt{t_4 t_2} & b(z_{04})\sqrt{t_4 t_3} & d_4 \end{pmatrix},$$

$$d_i = c(z_{0i})t_i + a(z_{0i})(1 - t_i), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$t_i = \frac{e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-2\lambda\theta_{i-1}}}{e^{-2\lambda\pi} - 1}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_3 = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_4 = \pi$$

(ср. с [1], теорема 4.1, четвертая формула).

Соберем, следуя [1] (§ 4), локальные описания вместе. Напомним, что $z_0^{\pm} = \pm 1$. Обозначим через $\tilde{D}$ круг $\bar{D}$, разрезанный по кривой ℓ. Пусть $\gamma = \partial D$, $\tilde{\gamma}$ обозначает границу ∂D, разрезанную по точкам $z_0^{\pm}$. Каждая из точек $z_0^{\pm}$ порождает четыре точки $z_{01}^{\pm}$, $z_{02}^{\pm}$, $z_{03}^{\pm}$, $z_{04}^{\pm}$ в $\tilde{D}$ и две точки $z_{05}^{\pm}$, $z_{06}^{\pm}$ на $\tilde{\gamma}$. Рассмотрим множества $Y = \tilde{D} \bigcup \tilde{\gamma}$ и $\bar{X}_{\pm} = [0, 1]$. Рассмотрим функцию ζ, соединяющую точки Y с точками $\partial X := \{0, 1\}$ по правилу

$$\zeta(0_{\pm}) = \left(z_{01}^{\pm}, z_{02}^{\pm}, z_{03}^{\pm}, z_{06}^{\pm}\right), \qquad \zeta(1_{\pm}) = \left(z_{02}^{\pm}, z_{03}^{\pm}, z_{04}^{\pm}, z_{05}^{\pm}\right).$$

Введем множества $X_+ = (0, 1)$, $X_- = (0, 1)$, $\mathcal{M} = (\bar{X}_+ \bigcup \bar{X}_-) \bigcup_{\zeta} Y$, $F_1 = Y \times \mathbb{C}$, $F_{\pm} = X_{\pm} \times M_4(\mathbb{C})$. Здесь $M_4(\mathbb{C})$ обозначает множество всех комплексных (4×4)-матриц, $\bigcup_{\zeta}$

— склеивание по отображению ζ. Рассмотрим пучок C^*-алгебр, имеющий $\mathcal{M}$ базовым пространством и порожденный C^*-алгебрами, которые определены множествами F_1 и $F_\pm$. Пусть $\mathcal{S}$ — алгебра всех непрерывных сечений такого пучка. Сечение $\sigma \in \mathcal{S}$ образовано тремя функциями $\sigma_1 \in C(Y)$, $\sigma_\pm \in C\left(\bar{X}_\pm, M_4(\mathbb{C})\right)$, имеющими следующие условия согласования: если $\zeta(x_0) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $x_0 \in \partial\bar{X}_\pm$, $y_1 \in \tilde{D}$, $y_2 \in \tilde{D}$, $y_3 \in \tilde{D}$, $y_4 \in \tilde{\gamma}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \sigma_\pm(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1(y_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(y_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1(y_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1(y_4) \end{pmatrix}.$$

Норма в $\mathcal{S}$ дается формулой

$$||\sigma|| = \max\left\{ \sup_{y \in Y} ||\sigma_1(y)||,\ \sup_{x \in \bar{X}_+} ||\sigma_+(x)||,\ \sup_{x \in \bar{X}_-} ||\sigma_-(x)|| \right\},$$

где $||\sigma_\alpha||^2$, $\alpha \in \{1, +, -\}$, — наибольшее собственное значение матрицы $\sigma_\alpha(x)(\sigma_\alpha(x))^*$.

Получена следующая теорема [1] (теоремы 4.1, 4.2).

Теорема 1. *Алгебра* $\hat{\mathfrak{A}}$ *изометрически изоморфна алгебре* $\mathcal{S}$. *Изоморфизм* Φ *задается следующим отображением образующих алгебры* $\mathfrak{A}$: *если* $A = a(z)I + b(z)B + L$, *где* L — *компактный оператор, то*

$$\Phi(A) = a(t), \quad t \in \tilde{D},$$

$$\Phi(A) = c(t), \quad t \in \tilde{\gamma},$$

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} d_1 & b(z_{01})\sqrt{t_1 t_2} & b(z_{01})\sqrt{t_1 t_3} & b(z_{01})\sqrt{t_1 t_4} \\ b(z_{02})\sqrt{t_2 t_1} & d_2 & b(z_{02})\sqrt{t_2 t_3} & b(z_{02})\sqrt{t_2 t_4} \\ b(z_{03})\sqrt{t_3 t_1} & b(z_{03})\sqrt{t_3 t_2} & d_3 & b(z_{03})\sqrt{t_3 t_4} \\ b(z_{04})\sqrt{t_4 t_1} & b(z_{04})\sqrt{t_4 t_2} & b(z_{04})\sqrt{t_4 t_3} & d_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$c(z) = a(z) + b(z), \qquad t_i = \frac{e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-2\lambda\theta_{i-1}}}{e^{-2\lambda\pi} - 1}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$d_i = c(z_{0i}^{\pm})\, t_i + a(z_{0i}^{\pm})(1 - t_i), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Оператор $A \in \mathfrak{A}$ *фредгольмов, если и только если его символ* $\Phi(A)$ *обратим.*

2. Алгебра со сдвигом. Перейдем к описанию C^*-алгебры $\mathfrak{R}$. При этом используем локально-траекторный метод [2]. Введем необходимые обозначения. Пусть $\hat{\mathcal{Z}}$ — некоторая центральная C^*-подалгебра $\hat{\mathfrak{A}}$ с единицей алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, M — компакт максимальных идеалов алгебры $\hat{\mathcal{Z}}$, $\mathcal{J}_t$ — двусторонний замкнутый идеал алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, порожденный идеалом $t \in M$, $P_{\hat{\mathfrak{A}}}$ — множество чистых состояний алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, $\mathsf{P}_t = P_{\hat{\mathfrak{A}}} \bigcap \mathcal{J}_t^{\perp}$ (через $\mathcal{J}_t^{\perp}$ обозначен аннулятор идеала $\mathcal{J}_t$). Ясно, что $P_{\hat{\mathfrak{A}}} = \bigcup\limits_{t \in M} \mathsf{P}_t$. Проверим выполнение условий (Π_1) – (Π_3).

Условие (Π_1) состоит в следующем:

для всех $g \in G$ отображения $\hat{\alpha}_g : \hat{A} \mapsto \hat{W}_g \hat{A} \hat{W}_g^*$, $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{A}}$, являются *-автоморфизмами алгебр $\hat{\mathfrak{A}}$ и $\hat{\mathcal{Z}}$, где $\hat{\mathcal{Z}}$ — центральная коммутативная подалгебра (с единицей) алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$.

В данном случае $W_g^* = W_g$;

$$\hat{\mathcal{Z}} = \left\{ a(z)I + \mathfrak{I} : \ a \in C(\bar{D}) \right\},$$

поэтому

$$\hat{\alpha}_g(A) = \hat{\alpha}_g(a(z)I) = a(g(z))I = a(-z)I \in Z, \quad \text{если} \quad a \in C(\bar{D}).$$

Итак,

$$\hat{\alpha}_g(\hat{\mathcal{Z}}) \cong \hat{\mathcal{Z}}.$$

Далее, очевидно, что $\alpha_g(B) \equiv W_g B W_g^* \equiv B$, поэтому

$$\hat{\alpha}_g(\hat{\mathfrak{A}}) \cong \hat{\mathfrak{A}},$$

т. е. условие (Π_1) выполнено.

Отметим, что условие (Π_1) обеспечивает плотность в алгебре $\hat{\mathfrak{R}}$ совокупности элементов вида $A_0 I + A_1 W$, где A_0, A_1 — элементы из алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ без сдвига, которая описана в пункте 1.

Условие (Π_2) состоит в аменабельности группы G; поскольку G — конечная циклическая группа, то она аменабельна, и поэтому условие (Π_2) также выполнено.

Приведем условие (Π_3): для любого $\varepsilon > 0$, любых конечных множеств $\hat{\mathfrak{A}}_0 \subset \hat{\mathfrak{A}}$, $G_0 \subset G$ и любого чистого состояния $\mu \in P_{\hat{\mathfrak{A}}}$ существуют $\tau \in M$ и $\nu \in \mathsf{P}_t$ такие, что выполнены следующие условия:

а) $|\nu(a) - \mu(a)| < \varepsilon$ для каждого $a \in \hat{\mathfrak{A}}_0$,

б) $g(\tau) \neq \tau$ для каждого $g \in G_0 \setminus \{e\}$.

Обозначим через $\zeta_1 = \{0\}$ единственную неподвижную точку сдвига g и введем следующее предположение:

в любой окрестности $U(\zeta_1)$ точки ζ_1 найдется такая точка $\tau \in U(\zeta_1)$, что для всех $g \in G \setminus \{e\}$ выполнено $g(\tau) \neq \tau$.

Справедливость этого условия очевидна, так как множество $\zeta_1 = \{0\}$ состоит только из одной точки. Более того, на границе $\gamma = \partial D$ вообще нет неподвижных точек.

Поскольку имеет место локальная эквивалентность [4] $B \overset{\zeta_1}{\sim} L$, где L — компактный оператор, из введенного предположения следует условие (Π_3). В самом деле, вблизи неподвижной точки $\zeta_1 = \{0\}$ есть сколько угодно точек τ таких, что $g(\tau) \neq \tau$. В точке $\tau \in [-1; +1]$ положим: если $\mu(A) = (a(\zeta_1)\xi, \xi)$, то $\nu(A) = (a(\tau)\xi, \xi)$ $\Big($здесь $a(\zeta_1) = \operatorname{diag}\left\{a(\zeta_{1,2}), a(\zeta_{1,3})\right\}$, $a(\tau) = \operatorname{diag}\{a(\tau_2), a(\tau_3)\}$ — диагональные матрицы, $\xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ — циклический вектор единичной длины $\left(\text{т. е. } |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = |(\xi,\xi)| = 1\right)$ гильбертова пространства представления π_ζ: $A \mapsto \left(a(\zeta_2), a(\zeta_3)\right)$, т. е. пространства C^2, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $C^2\Big)$. Тогда

$$|\mu(A) - \nu(A)| =$$

$$= \left|\left(\begin{pmatrix} a(\zeta_{1,2}) & 0\\ 0 & a(\zeta_{1,3})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix} a(\tau_2) & 0\\ 0 & a(\tau_3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right)\right| =$$

$$= \left|\left(\begin{pmatrix} a(\zeta_{1,2})\xi_1\\ a(\zeta_{1,3})\xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix} a(\tau_2)\xi_1\\ a(\tau_3)\xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right)\right| =$$

$$= \left|a(\zeta_{1,2})\,\xi_1\overline{\xi}_1 + a(\zeta_{1,3})\,\xi_2\overline{\xi}_2 - a(\tau_2)\,\xi_1\overline{\xi}_1 - a(\tau_3)\,\xi_2\overline{\xi}_2\right| =$$

$$= \left|\left(a(\zeta_{1,2}) - a(\tau_2)\right)\xi_1\overline{\xi}_1 + \left(a(\zeta_{1,3}) - a(\tau_3)\right)\xi_2\overline{\xi}_2\right| \le$$

$$\le \left|a(\zeta_{1,2}) - a(\tau_2)\right|\left|\xi_1\overline{\xi}_1\right| + \left|a(\zeta_{1,3}) - a(\tau_3)\right|\left|\xi_2\overline{\xi}_2\right| \le$$

$$\le \left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)\max\left\{\left|a(\zeta_{1,2}) - a(\tau_2)\right|;\ \left|a(\zeta_{1,3}) - a(\tau_3)\right|\right\} < \varepsilon,$$

если точка τ достаточно близка к $\zeta_1 = \{0\}$. Тот факт, что на границе $\gamma = \partial D$ вообще нет неподвижных точек, завершает доказательство данного утверждения. Итак, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *При приведенных выше условиях справедливо условие* (Π_3) [2].

Образующий оператор R C^2-алгебры $\mathfrak{R}$ имеет вид

$$R = A_0 I + A_1 W + L = (a_0 I + b_0 B)I + (a_1 I + b_1 B)W + L \in \mathfrak{R}. \qquad (1)$$

Пусть $\Omega(X)$ — множество G-орбит точек $t \in X$, t_ω — произвольная фиксированная точка орбиты $\omega \in \Omega(M)$, H_ω — пространство изометрического представления $\tilde{\pi}_\omega$ факторалгебры $\mathfrak{A}/J_{t_\omega}$, ρ_ω — естественный гомоморфизм $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/J_{t_\omega}$, $\pi'_\omega = \tilde{\pi}_\omega \circ \rho_\omega$. Рассмотрим представление $\pi_\omega\colon \mathfrak{R} \to \mathfrak{L}(l_2(G, H_\omega))$, определяемое формулами

$$(\pi_\omega(A)f)(g) \;=\; \pi'_\omega(\alpha_g(A))f(g),$$

$$(\pi_\omega(U_h)f)(g) \;=\; f(gh), \qquad A \in \mathfrak{A}, \quad g, h \in G.$$

Справедлива следующая локальная теорема.

Теорема 2 ([2], теорема 3). *Если выполняются предположения* $(\Pi_1)-(\Pi_3)$, *то оператор* $R \in \mathfrak{R}$ *обратим в пространстве* H *тогда и только тогда, когда для каждой орбиты* $\omega \in \Omega = \Omega(M)$ *оператор* $\pi_\omega(R)$ *обратим в* $l_2(G, H_\omega)$ *и* $\sup\left\{\left\|(\pi_\omega(R))^{-1}\right\| : \omega \in \Omega\right\} < \infty$.

Локальное описание алгебры $\hat{\mathfrak{R}}$ состоит из пяти случаев.

Случай 1: $z_0 \in \bar{D} \setminus (\ell \cup \gamma)$. Здесь $H_\omega \cong \mathbb{C}$; $l_2(G, H_\omega) = l_2(G) \cong \mathbb{C}^2$; для оператора R вида (1) символ имеет вид

$$\pi_\omega(\hat{R}) \;=\; \mathbb{A}(z_0) \;=\; \begin{pmatrix} a_0(z_0) & a_1(z_0) \\ a_1(-z_0) & a_0(-z_0) \end{pmatrix}.$$

Случай 2: $z_0 \in \gamma \setminus \ell$. Здесь $H_\omega \cong \mathbb{C}^2$. Легко видеть, что символ имеет вид пары (2×2)-матриц

$$\pi_\omega(\hat{R}) \;=\; \big(\mathbb{A}(z_0), \mathbb{A}(z_0) + \mathbb{B}(z_0)\big),$$

где матрицы $\mathbb{A}(z_0)$ и $\mathbb{B}(z_0)$ таковы:

$$\mathbb{A}(z_0) \;=\; \begin{pmatrix} a_0(z_0) & a_1(z_0) \\ a_1(-z_0) & a_0(-z_0) \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}(z_0) \;=\; \begin{pmatrix} b_0(z_0) & b_1(z_0) \\ b_1(-z_0) & b_0(-z_0) \end{pmatrix}.$$

Случай 3: $z_0 \in (\ell_1 \cup \ell_2) \setminus \gamma$. Здесь $H_\omega \cong \mathbb{C}^2$, а символ имеет вид пары (2×2)-матриц

$$\pi_\omega(\hat{R}) \;=\; \Big(\mathbb{A}^+(z_0), \mathbb{A}^-(z_0)\Big),$$

где

$$\mathbb{A}^+(z_0) \;=\; \begin{pmatrix} a_0^+(z_0) & a_1^+(z_0) \\ a_1^+(-z_0) & a_0^+(-z_0) \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{A}^-(z_0) \;=\; \begin{pmatrix} a_0^-(z_0) & a_1^-(z_0) \\ a_1^-(-z_0) & a_0^-(-z_0) \end{pmatrix}.$$

Здесь через $a_j^{\pm}(z_0)$, $j = 0, 1$, обозначены, соответственно, левое и правое предельные значения функций $a_j(z)$ в точке $z_0 \in \ell \setminus \gamma$.

Случай 4: $z_0 = (-1; 1)$. Поворот на угол π меняет ориентацию отрезка $[-1; 1]$, поэтому здесь

$$\pi_\omega(\hat{R}) = \tilde{\mathbb{A}}(z_0),$$

где

$$\tilde{\mathbb{A}}(z_0) = \begin{pmatrix} a_0^+(z_0) & a_1^+(z_0) \\ a_1^-(-z_0) & a_0^-(-z_0) \end{pmatrix}.$$

Случай 5: $z_0 \in \gamma \bigcap \ell$, т. е. $z_0 \in \{-1; 1\}$. Здесь $H_\omega \cong L_2^4([0; 1])$. Символ имеет вид блочной (2×2)-матрицы

$$\mathcal{A}(z_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} \\ \mathcal{A}_{10} & \mathcal{A}_{11} \end{pmatrix},$$

$\mathcal{A}_{ij}$, $i, j = 0, 1$, — (4×4)-матрицы-функции вида

$$\mathcal{A}_{ij} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_{j-i,1}(g^i(z_{01})) & b_{j-i}(g^i(z_{01}))\sqrt{t_1 t_2} & b_{j-i}(g^i(z_{01}))\sqrt{t_1 t_3} & b_{j-i}(g^i(z_{01}))\sqrt{t_1 t_4} \\ b_{j-i}(g^i(z_{02}))\sqrt{t_2 t_1} & d_{j-i,2}(g^i(z_{02})) & b_{j-i}(g^i(z_{02}))\sqrt{t_2 t_3} & b_{j-i}(g^i(z_{02}))\sqrt{t_2 t_4} \\ b_{j-i}(g^i(z_{03}))\sqrt{t_3 t_1} & b_{j-i}(g^i(z_{03}))\sqrt{t_3 t_2} & d_{j-i,3}(g^i(z_{03})) & b_{j-i}(g^i(z_{03}))\sqrt{t_3 t_4} \\ b_{j-i}(g^i(z_{04}))\sqrt{t_4 t_1} & b_{j-i}(g^i(z_{04}))\sqrt{t_4 t_2} & b_{j-i}(g^i(z_{04}))\sqrt{t_4 t_3} & d_{j-i,4}(g^i(z_{04})) \end{pmatrix},$$

где

$$d_{j-i,k}(g^i(z_{0k})) = c_{j-i}(g^i(z_{0k}))t_k + a_{j-i}(g^i(z_{0k}))(1-t_k) =$$

$$= c_{j-i}(\pm z_{0k})t_k + a_{j-i}(\pm z_{0k})(1-t_k), \quad i, j = 0, 1, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

(знак $+$ соответствует случаю $i = 0$, а знак $-$ — случаю $i = 1$),

$$g^i = \begin{cases} e, & \text{если} \quad i = 0, \\ g, & \text{если} \quad i = 1, \end{cases}$$

$$b_{-1} := b_1.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Условие*

$$\sup_{\omega \in \Omega} \left\| (\pi_\omega(\hat{R}))^{-1} \right\| < \infty$$

автоматически выполнено, если все символы обратимы на каждой орбите $\omega \in \Omega$.

Из доказательства теоремы 2 [2] (теорема 3) следует, что C^*-алгебра $\hat{\mathfrak{R}} = C^*(\hat{\mathfrak{A}};\, \hat{W}_G)$ изометрически изоморфна алгебре $\pi(\hat{\mathfrak{R}}) = \bigoplus_{\omega\in\Omega} \pi_\omega(\hat{\mathfrak{R}})$, в которой, как обычно, вводится норма

$$\left\|\pi(\hat{R})\right\| = \sup_{\omega\in\Omega} \left\|\pi_\omega(\hat{R})\right\|.$$

Получаем следующую основную теорему.

Теорема 3. *C^*-алгебры $\pi(\hat{\mathfrak{R}})$ и $\hat{\mathfrak{R}}$ изометрически изоморфны. Оператор R C^*-алгебры $\mathfrak{R} = C^*(\mathfrak{A};\, W_G)$ фредгольмов в гильбертовом пространстве $L_2(D)$ тогда и только тогда, когда его символ невырожден. На образующих операторах R вида* (1) *символ $\pi_\omega(\hat{R})$ дается формулами из пунктов* 1 – 5. *Условиями фредгольмовости образующих операторов R вида* (1) *являются следующие условия*:

1) *при* $z_0 \in \bar{D} \setminus (\ell \cup \gamma)$

$$\det \mathbb{A}(z_0) \neq 0;$$

2) *при* $z_0 \in \gamma \setminus \ell$

$$\det \mathbb{A}(z_0) \neq 0,$$

$$\det(\mathbb{A}(z_0) + \mathbb{A}(z_0)) \neq 0;$$

3) *при* $z_0 \in (\ell_1 \cup \ell_2) \setminus \gamma$

$$\det \mathbb{A}^+(z_0) \neq 0,$$

$$\det \mathbb{A}^-(z_0) \neq 0;$$

4) *при* $z_0 = (-1; 1)$

$$\det \tilde{\mathbb{A}}(z_0) \neq 0;$$

5) *при* $z_0 \in \{-1;\, 1\}$

$$\det \mathcal{A}(z_0) \neq 0.$$

1. *Loaiza M.* Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions // Integr. Equat. Oper. Theory. – 2003. – **46.** – P. 215 – 234.
2. *Карлович Ю. И.* Локально-траекторный метод изучения обратимости в C^*-алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов // Докл. АН СССР. – 1988. – **299**, № 3. – С. 546 – 550.
3. *Karlovich Yu. I.* A local-trajectory method and isomorphism theorems for nonlocal C^*-algebras // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2006. – **170**. – P. 137 – 166.
4. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 3. – С. 567 – 586.
5. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 4. – С. 757 – 782.
6. *Böttcher A., Silbermann B.* Analysis of Toeplitz operators. – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 524 p.

Получено 15.09.14