DOI: 10.37863/umzh.v72i4.2302

УДК 517.91

А. Р. Лятифова, А. Х. Ханмамедов (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку;
Бакин. гос. ун-т; Ун-т Азербайджан, Баку)

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШТАРКА НА ПОЛУОСИ

We consider the Stark operator $T = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x + q\,(x)$ on the half-axis $0 \le x < \infty$ with a Dirichlet boundary condition at zero. By using transformation operators, we study the direct and inverse spectral problems and obtain the main integral equation for the inverse problem. We prove that the main integral equation is uniquely solvable and suggest an effective algorithm of reconstruction for the perturbed potential.

Розглянуто оператор Штарка $T = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x + q(x)$ на півосі $0 \le x < \infty$ з граничною умовою Діріхле в нулі. Методом оператора перетворення вивчено пряму й обернену спектральні задачі. Отримано основне інтегральне рівняння оберненої задачі і доведено однозначну розв'язність цього рівняння. Наведено ефективний алгоритм відновлення потенціалу збурення.

1. Введение. В спектральной теории наблюдается повышенный интерес к изучению оператора Штарка. Прямые и обратные спектральные задачи для этого оператора в различных контекстах изучались в работах многих авторов (см. $[1-12]$ и приведенную в них библиографию). Настоящая работа продолжает работу [13], в которой исследована асимптотика спектра одномерного оператора Штарка на полуоси $[0,\infty)$ с краевым условием Дирихле в нуле.

Рассмотрим граничную задачу, порождаемую на полуоси $0 \le x < \infty$ дифференциальным уравнением

$$-y'' + xy + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda \in C, \tag{1.1}$$

и краевым условием

$$y\,(0) = 0, \tag{1.2}$$

в случае, когда функция $q(x)$ вещественна и удовлетворяет условиям

$$q(x) \in C^{(1)}\,[0,\infty)\,, \quad q(x) = o(x), \quad x \to \infty, \quad \int\limits_0^\infty \left|x^4 q(x)\right| dx < \infty. \tag{1.3}$$

В работе [13] доказано, что при условиях (1.3) задача (1.1), (1.2) имеет чисто дискретный спектр, состоящий из растущих простых собственных значений $\lambda_n, n = 1,2,\ldots,$ где $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. При этом собственные значения $\lambda_n, n = 1,2,\ldots,$ являются корнями функции $f\,(0,\lambda)\,,$ где $f\,(x,\lambda)$ — решение уравнения (1.1) с асимптотикой $f\,(x,\lambda) = Ai\,(x-\lambda)\,(1+o\,(1))\,,\ x \to \infty,\ Ai\,(z)$ — функция Эйри первого рода.

Совокупность величин $\{\lambda_n, \alpha_n > 0\}_{n=1}^\infty,$ где $\alpha_n = \sqrt{\int_0^\infty |f\,(x,\lambda_n)|^2\,dx},$ назовем спектральными данными задачи (1.1), (1.2). В настоящей работе изучается обратная спектральная задача для граничной задачи (1.1), (1.2), т. е. задача восстановления потенциала $q(x)$ из класса (1.3) по спектральным данным.

Отметим, что в работах [4, 5] методом оператора преобразования изучалась обратная задача рассеяния для уравнения (1.1), заданного на всей оси. Эта задача методом задачи Римана исследовалась в работе [9]. Много важных результатов о резонансах одномерных возмущенных операторов Штарка получены в работах [11, 12]. Обратные задачи для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом в различных постановках исследовались в работах [14 – 19].

В настоящей работе методом операторов преобразования изучена обратная спектральная задача для задачи (1.1), (1.2) в классе потенциалов (1.3). Получено интегральное уравнение типа Марченко и доказана его однозначная разрешимость. Приведен эффективный алгоритм для восстановления потенциала $q(x)$. Отметим, что отсутствие аддитивных свойств ядра интегрального уравнения типа Марченко существенно затрудняет применение традиционных подходов к решению обратной задачи.

2. Прямая спектральная задача. Рассмотрим невозмущенное уравнение

$$-y'' + xy = \lambda y, \quad 0 \le x < \infty, \quad \lambda \in C. \tag{2.1}$$

Известно, что уравнение (2.1) имеет [20] решение $f_0(x,\lambda)$ в виде

$$f_0(x,\lambda) = Ai(x-\lambda), \tag{2.2}$$

где $Ai(z)$ — функция Эйри первого рода. Функция $Ai(z)$ является (см. [9, 20]) целой функцией порядка 3/2 и типа 2/3. Имеют место [20] следующие асимптотические равенства при $|z| \to \infty$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}i(z) &\sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], \quad |\arg z| < \pi, \\ Ai'(z) &\sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta}\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], \quad |\arg z| < \pi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{A}i(-z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}, \tag{2.4}$$

$$Ai'(-z) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + O\left(\zeta^{-1}\right)\right], \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}, \tag{2.5}$$

где $\zeta = \dfrac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$. Очевидно, что спектр задачи (2.1), (1.2) дискретен и состоит из корней функции $f_0(0,\lambda) = Ai(-\lambda)$. Функция $Ai(-\lambda)$ имеет [20] корни $\hat{\lambda}_n,\ n = 1, 2, \ldots$, только на положительной полуоси, и справедливо асимптотическое равенство

$$\hat{\lambda}_n = g\left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right), \tag{2.6}$$

где

$$g(z) \sim z^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-4} + \frac{77125}{82944} z^{-6} - \frac{108056875}{6967296} z^{-8} + \ldots\right), \quad z \to \infty.$$

Более того, система функций $\left\{ \dfrac{f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ служит ортонормированным базисом в пространстве $L_2(0, \infty)$, т. е. имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \frac{f_0\left(y, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} = \delta(x-y), \tag{2.7}$$

где δ — дельта-функция Дирака, а нормировочные числа $\hat{\alpha}_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ определяются формулами

$$\hat{\alpha}_n = \sqrt{\int_0^{\infty} \left| f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right) \right|^2 dx}. \tag{2.8}$$

Исследуем асимптотику нормировочных чисел $\hat{\alpha}_n$ при $n \to \infty$. Условимся точками обозначать дифференцирование по λ, а штрихами — по $x: u' = \dfrac{\partial}{\partial x} u,\ \dot{u} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda} u$. Поскольку $f_0(x, \lambda)$ экспоненциально убывает при $x \to \infty$, то из стандартного (см., например, [16, 21]) тождества $f^2 = \left\{ \dot{f}, f \right\}'$, где $\{u, v\} = uv' - u'v$, следует, что

$$\hat{\alpha}_n^2 = \int_0^{\infty} f_0^2\left(x, \hat{\lambda}_n\right) dx = \left\{ \dot{f}_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right), f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right) \right\}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= -\dot{f}_0\left(0, \hat{\lambda}_n\right) f_0'\left(0, \hat{\lambda}_n\right) = \left[Ai'\left(-\hat{\lambda}_n\right) \right]^2. \tag{2.9}$$

Используя теперь (2.6) – (2.8), а также известное [20] соотношение

$$Ai'\left(-\hat{\lambda}_n\right) = (-1)^{n-1} g_1\left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right), \tag{2.10}$$

где

$$g_1(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{1525}{4608} z^{-4} + \frac{2397875}{663552} z^{-6} \ldots \right), \quad z \to \infty,$$

из (2.9), (2.10) выводим

$$(\hat{\alpha}_n)^2 = \left[g_1\left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right) \right]^2. \tag{2.11}$$

Рассмотрим теперь возмущенное уравнение (1.1). Известно [4, 5], что уравнение (1.1) при условии (1.3) имеет решение $f(x, \lambda)$, представимое в виде

$$f(x, \lambda) = f_0(x, \lambda) + \int_x^{\infty} K(x, t) f_0(t, \lambda) dt, \tag{2.12}$$

причем ядро $K(x, t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет соотношениям

$$|K(x,t)| \leq C\sigma_0\left(\frac{x+t}{2}\right), \tag{2.13}$$

$$\left|\frac{\partial K(x_1,x_2)}{\partial x_j}+\frac{1}{2}q\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right| \leq C\left[1+(x_2-x_1)^2\right]\sigma_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), \tag{2.14}$$

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(t)\,dt, \tag{2.15}$$

где $\sigma_0(x) = \int_x^\infty |q(t)|\,dt$, а через C здесь и далее обозначаются, вообще говоря, различные постоянные. Из (2.12), (2.13) следует, что функция $f(x,\lambda)$ при каждом λ принадлежит пространству $L_2(0,\infty)$. Следовательно, спектр задачи (1.1), (1.2) совпадает с множеством корней функции $f(0,\lambda)$, т. е. справедливы равенства $f(0,\lambda_n)=0, n=1,2,\ldots$. Как показано в [13], при выполнении условий (1.3) для собственных значений λ_n справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n=\left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right), \quad n\to\infty. \tag{2.16}$$

Полагая

$$\alpha_n=\sqrt{\int\limits_0^\infty |f(x,\lambda_n)|^2\,dx}, \tag{2.17}$$

вводим нормировочные числа α_n. Тогда собственные функции $\left\{\frac{f(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\right\}_{n=1}^\infty$ задачи (1.1), (1.2) образуют в пространстве $L_2(0,\infty)$ ортонормированный базис, т. е. имеет место формула

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{f(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\frac{f(y,\lambda_n)}{\alpha_n}=\delta(x-y). \tag{2.18}$$

Нам понадобится асимптотика нормировочных чисел α_n при $n\to\infty$.

Лемма 2.1. *Имеет место соотношение*

$$\alpha_n^{-2}=\hat{\alpha}_n^{-2}\left[1+O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right], \quad n\to\infty. \tag{2.19}$$

Доказательство. Аналогично (2.9) имеем

$$\alpha_n^2=\int\limits_0^\infty f^2(x,\lambda_n)\,dx=\left\{\dot{f}(x,\lambda_n), f(x,\lambda_n)\right\}\Big|_0^\infty=-\dot{f}(0,\lambda_n)\,f'(0,\lambda_n). \tag{2.20}$$

Следовательно, собственные значения граничной задачи (1.1), (1.2) простые. Далее, из (2.3)–(2.5), (2.12)–(2.14), (2.16) получаем

$$f'(0,\lambda_n)=f_0'\left(0,\hat{\lambda}_n\right)\left[1+O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right],$$

$$\dot{f}\left(0,\lambda_n\right)=\dot{f}_0\left(0,\hat{\lambda}_n\right)\left[1+O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right].$$

Тогда из (2.20) следует (2.19).

Лемма доказана.

Запишем установленные выше свойства в виде условия, которое понадобится при решении обратной задачи рассеяния.

1. *Спектральные данные* $\{\lambda_n,\alpha_n>0\}_{n=1}^{\infty}$ *задачи* (1.1), (1.2) *удовлетворяют соотношениям* (2.16), (2.19).

Рассмотрим последовательность функций

$$\Phi_N(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\frac{f\left(x,\lambda_n\right)f\left(y,\lambda_n\right)}{\alpha_n^2}-\sum_{n=1}^{N}\frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2}. \tag{2.21}$$

Из результатов работы [22] (см. формулу (5.2)), следует, что последовательность $\Phi_N(x,y)$ сходится равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и y.

Лемма 2.2. *Последовательность функций*

$$F_N(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\frac{f_0\left(x,\lambda_n\right)f_0\left(y,\lambda_n\right)}{\alpha_n^2}-\sum_{n=1}^{N}\frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2} \tag{2.22}$$

сходится равномерно в каждой конечной области изменения переменных x *и* y.

Доказательство. Из известных свойств операторов преобразования (см., например, [21]) и из (2.12), (2.13) следует, что

$$f_0(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\int_x^{\infty}\hat{K}(x,t)f(t,\lambda)dt, \tag{2.23}$$

где ядро $\hat{K}(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{K}(x,y)+K(x,y)+\int_x^{y}\hat{K}\left(x,t\right)K\left(t,y\right)dt=0. \tag{2.24}$$

Из последнего уравнения и (2.13), (2.14) следует, что

$$\left|\hat{K}(x,y)\right|\le C\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{2.25}$$

$$\left|\frac{\partial\hat{K}\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_j}+\frac{1}{2}q\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|\le C\left[1+\left(x_2-x_1\right)^2\right]\sigma_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Отсюда и из (1.3) находим, что ядро $\hat{K}(x,y)$ удовлетворяет оценке

$$\int_x^{\infty}\left[\left|\hat{K}'_y(x,y)\right|^2+y^2\left|\hat{K}(x,y)\right|^2\right]dy<\infty. \tag{2.26}$$

Далее, обозначим через $\mu_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ перенумерованный в порядке возрастания спектр задачи

$$-y'' + |x|\, y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty.$$

В силу четности функции $|x|$ собственные значения $\mu_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ последней задачи совпадают (см. также [23]) с корнями функции $\Delta(\lambda) = Ai(-\lambda)\, Ai'(-\lambda)$. Поскольку корни функций $Ai(-\lambda)$ и $Ai'(-\lambda)$ чередуются (см. [20]), то справедливы равенства $Ai(-\mu_{2n}) = 0$ и $Ai'(-\mu_{2n-1}) = 0$. Более того, собственная функция, соответствующая собственному значению μ_k, имеет вид

$$\psi(x, \mu_k) = \begin{cases} Ai(x - \mu_k), & x \geq 0, \\ (-1)^{k-1}\, Ai(-x - \mu_k), & x < 0. \end{cases}$$

Тогда в силу (2.26) при каждом $x \geq 0$ коэффициент $c_k = \displaystyle\int_x^\infty \hat{K}(x,t)\, \frac{\psi(t, \mu_k)}{\beta_k} dt$, где $\beta_k^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty |\psi(t, \mu_k)|^2\, dt$, удовлетворяет (см. [24], глава II, формула (3.20)) неравенству

$$\sum_{k=1}^\infty \mu_k\, |c_k|^2 < \infty.$$

Очевидно, что $\mu_{2n} = \hat{\lambda}_n,\ \beta_{2n}^2 = 2\hat{\alpha}_n^2$. Поэтому при каждом $x \geq 0$ коэффициент

$$\hat{c}_n = \int\limits_x^\infty \hat{K}(x,t)\, \frac{f_0\left(t, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} dt \tag{2.27}$$

удовлетворяет оценке

$$\sum_{n=1}^\infty \hat{\lambda}_n\, |\hat{c}_n|^2 < \infty. \tag{2.28}$$

Далее, воспользовавшись формулами (2.4), (2.6), (2.11), убедимся, что при больших значениях n равномерно относительно x, взятых из каждого конечного отрезка $[0, b]$, имеет место оценка

$$\left| \frac{f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \right| \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{3}}}, \tag{2.29}$$

где $C = C(b)$.

Запишем теперь формулу (2.23) в виде $f_0(y, \lambda) = \left(I_y + \hat{K}_y\right) f(y, \lambda)$. Применяя к равенству (2.21) оператор $\left(I_x + \hat{K}_x\right)\left(I_y + \hat{K}_y\right)$ и используя теорему о равномерной сходимости (см. [25], глава VII), получаем

$$\left(I_x + \hat{K}_x\right)\left(I_y + \hat{K}_y\right) \Phi_N(x, y) = \sum_{n=1}^N \frac{f_0(x, \lambda_n)\, f_0(y, \lambda_n)}{\alpha_n^2} -$$

$$- \sum_{n=1}^N \left(I_x + \hat{K}_x\right)\left(I_y + \hat{K}_y\right) \frac{f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right) f_0\left(y, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2} =$$

$$= F_N(x,y) - \sum_{n=1}^{N}\left(\int\limits_x^{\infty}\hat{K}\,(x,t)\,\frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}dt\right)\frac{f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}-$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\left(\int\limits_y^{\infty}\hat{K}\,(y,t)\,\frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}dt\right)\frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}-$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\left(\int\limits_x^{\infty}\hat{K}\,(x,t)\,\frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}dt\right)\left(\int\limits_y^{\infty}\hat{K}\,(y,t)\,\frac{f_0\left(t,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n}dt\right). \tag{2.30}$$

Левая часть тождества (2.30) сходится равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и y. Поэтому это справедливо и для правой части. Но в силу (2.27)– (2.29) второе, третье и четвертое слагаемые сходятся равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и y. Поэтому первое слагаемое справа в (2.30), т. е. последовательность функций $F_N(x,y)$, равномерно сходится, что и требовалось доказать.

Рассмотрим функцию

$$F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{f_0\,(x,\lambda_n)\,f_0\,(y,\lambda_n)}{\alpha_n^2} - \frac{f_0\left(x,\hat{\lambda}_n\right)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n^2}\right\}. \tag{2.31}$$

В силу леммы 2.2 ряд (2.31) в каждой конечной области изменения переменных x и y равномерно сходится к пределу $F(x,y)$. При решении обратной задачи, а также при установлении основных свойств функции $F(x,y)$ важную роль играет интегральное уравнение типа Марченко.

Теорема 2.1. *При каждом фиксированном x функция $K(x,y)$, входящая в представление* (2.12), *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$F(x,y) + K(x,y) + \int\limits_x^{\infty}K\,(x,t)\,F\,(t,y)\,dt = 0, \quad y > x. \tag{2.32}$$

Доказательство. Рассмотрим представление (2.23). Тогда при $y > x$ из (2.18) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f\,(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\frac{f_0\,(y,\lambda_n)}{\alpha_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f\,(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\frac{f\,(y,\lambda_n)}{\alpha_n} + \int\limits_y^{\infty}\hat{K}\,(y,t)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f\,(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\frac{f\,(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\right\}dt =$$

$$= \delta\,(x-y) + \int\limits_y^{\infty}\hat{K}\,(y,t)\,\delta\,(x-t)\,dt = \delta\,(x-y) + \hat{K}\,(y,x) = \delta\,(x-y)\,.$$

Используя (2.7), (2.12) и последнее равенство, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f\,(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\frac{f_0\,(y,\lambda_n)}{\alpha_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_0\,(x,\lambda_n)}{\alpha_n}\frac{f_0\,(y,\lambda_n)}{\alpha_n} + \int\limits_x^{\infty}K\,(x,t)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_0\,(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\frac{f_0\,(y,\lambda_n)}{\alpha_n}\right\}dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \frac{f_0\left(y, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_0\left(x, \lambda_n\right)}{\alpha_n} \frac{f_0\left(y, \lambda_n\right)}{\alpha_n} - \frac{f_0\left(x, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \frac{f_0\left(y, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \right\} +$$

$$+ \int_x^{\infty} K\left(x, t\right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_0\left(t, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \frac{f_0\left(y, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \right\} dt +$$

$$+ \int_x^{\infty} K\left(x, t\right) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_0\left(t, \lambda_n\right)}{\alpha_n} \frac{f_0\left(y, \lambda_n\right)}{\alpha_n} - \frac{f_0\left(t, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \frac{f_0\left(y, \hat{\lambda}_n\right)}{\hat{\alpha}_n} \right\} \right\} dt =$$

$$= \delta\left(x - y\right) + F(x, y) + K(x, y) + \int_x^{\infty} K\left(x, t\right) F\left(t, y\right) dt.$$

Сравнивая два последних равенства, получаем основное интегральное уравнение (2.32).

Теорема доказана.

Используем уравнение Марченко для уточнения свойств функции $F(x, y)$. Учитывая симметричность $F(x, y)$, интегральное уравнение (2.32) можно записать в виде

$$F(x, y) + \int_x^{y} K\left(x, z\right) F\left(z, y\right) dz = -K(x, y) - \int_y^{\infty} K\left(x, z\right) F\left(y, z\right) dz. \tag{2.33}$$

При фиксированном y рассмотрим оператор $I + K$, определяемый левой частью уравнения (2.33). Поскольку K является вольтерровским интегральным оператором, то оператор $I + K$ имеет обратный того же вида. Пусть

$$\left(I + K\right)^{-1} h(x, y) = h(x, y) + \int_x^{y} L\left(x, z\right) h\left(z, y\right) dz.$$

Легко проверить, что $L\left(x, z\right)$ удовлетворяет уравнению

$$L\left(x, z\right) + K\left(x, z\right) + \int_x^{z} K\left(x, t\right) L\left(t, z\right) dt = 0.$$

Из последнего уравнения и неравенства (2.13) следует, что $L\left(x, z\right)$ допускает оценку

$$\left|L\left(x, z\right)\right| \leq C\sigma_0\left(\frac{x + z}{2}\right).$$

Обращая оператор в левой части (2.33), получаем

$$F(x, y) = \tilde{K}(x, y) + \int_y^{\infty} \tilde{L}\left(x, z, y\right) F\left(y, z\right) dz, \tag{2.34}$$

где

$$\tilde{K}(x,y) = -K(x,y) - \int\limits_x^y L\,(x,z)\,K\,(z,y)\,dz,$$

$$\tilde{L}\,(x,z,y) = -K\,(x,z) - \int\limits_x^y L\,(x,t)\,K\,(t,z)\,dt.$$

Из последних соотношений и оценок $K(x,y)$, $L\,(x,z)$ находим

$$\left|\tilde{K}(x,y)\right| \le C\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{2.35}$$

$$\left|\tilde{L}\,(x,z,y)\right| \le C\sigma_0\left(\frac{x+z}{2}\right), \tag{2.36}$$

причем последняя оценка выполняется равномерно относительно y. Применяя метод последовательных приближений к уравнению (2.34), можно получить, что n-й член $F_n(x,y)$ ряда последовательных приближений для $F(x,y)$ удовлетворяет оценке

$$|F_n(x,y)| \le C\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{(C\sigma(y))^n}{n!}, \tag{2.37}$$

где $\sigma(y) = \displaystyle\int_y^\infty \sigma_0\left(\frac{z}{2}\right)dz$. Из этой оценки следует, что ряд последовательных приближений для $F(x,y)$ сходится и справедлива оценка

$$|F(x,y)| \le C\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{2.38}$$

Кроме того, из непрерывности функций $\tilde{K}(x,y)$, $\tilde{L}\,(x,z,y)$ и соотношений (2.34)–(2.37) следует, что функция $F(x,y)$ непрерывна по своим переменным.

Установим непрерывную дифференцируемость функции $F(x,y)$. Дифференцируя уравнение (2.32) по x, находим

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} + K\,(x,x)\,F(x,y)\; - \int\limits_x^\infty \frac{\partial K\,(x,t)}{\partial x}F\,(t,y)\,dt.$$

Отсюда и из (2.14), (2.38) следуют непрерывная дифференцируемость функции $F(x,y)$ по x и оценка

$$\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right| \le \frac{1}{2}\left|q\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + C\left[1+(y-x)^2\right]\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{2.39}$$

Дифференцируя уравнение (2.32) по y, получаем

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\; - \int\limits_x^\infty K\,(x,t)\,\frac{\partial F\,(y,t)}{\partial y}dt.$$

Из (2.38), (2.39) следует, что

$$\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right| \le \frac{1}{2}\left|q\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + C\left[1+(y-x)^2\right]\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right). \tag{2.40}$$

Далее, функция $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y)$ является решением уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y)+\int_x^\infty K(x,t)\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial t}\right)F(t,y)\right]dt=-$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)K(x,y)-\int_x^\infty\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x,t)\right]F(t,y)\,dt. \tag{2.41}$$

Полагая в уравнении (2.41) $y=x,$ находим

$$\frac{d}{dx}F(x,x)=-\frac{d}{dx}K(x,x)-\int_x^\infty K(x,t)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)F(t,x)\right]dt-$$

$$-\int_x^\infty\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)K(x,t)\right]F(t,x)\,dt.$$

Используя соотношения (1.3), (2.13), (2.14), (2.38) – (2.40) и последнее представление, убеждаемся, что кроме условия I спектральные данные удовлетворяют также следующему условию:

II. *Ряд* (2.31) *ограниченно сходится, причем его сумма $F(x,y)$ является непрерывно дифференцируемой функцией в области $x>0,\ y>0$ и имеют место соотношения*

$$|F(x,y)|\le C,\quad \left|\int_0^\infty y^3\sup_{x\ge 0}|F(x,y)|\,dy\right|<\infty, \tag{2.42}$$

$$\int_0^\infty y\left[\sup_{x\ge 0}\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|+\sup_{x\ge 0}\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|\right]dy<\infty, \tag{2.43}$$

$$\int_0^\infty x^4\left|\frac{d}{dx}F(x,x)\right|dx<\infty,\quad \frac{d}{dx}F(x,x)=o(x),\quad x\to\infty. \tag{2.44}$$

3. Обратная спектральная задача. Как отмечалось выше, система функций $\left\{f_0(x,\hat\lambda_n)\right\}_{n=1}^\infty$ служит ортогональным базисом в пространстве $L_2(0,\infty)$. Оказывается, что для любых чисел λ_n вида (2.16) система $\{f_0(x,\lambda_n)\}_{n=1}^\infty$ сохраняет свойство полноты[1].

Лемма 3.1. *Пусть даны числа $\lambda_n,\ n=1,2,\ldots,\lambda_n\ne\lambda_k,\ n\ne k,$ вида* (2.16). *Тогда последовательность $\{f_0(x,\lambda_n)\}_{n=1}^\infty$ полна в $L_2(0,\infty)$.*

[1]Доказательство полноты системы функций $\{f_0(x,\lambda_n)\}_{n=1}^\infty$ сообщено Х. Э. Аббасовой, которой авторы искренне благодарны.

Доказательство. Пусть $h(x) \in L_2(0,\infty)$ такова, что

$$\int_0^\infty h(x)Ai(x-\lambda_n)\,dx = 0, \quad n \geq 0.$$

Рассмотрим факторизацию Адамара функции $Ai(-\lambda)$:

$$Ai(-\lambda) = C_0 e^{p\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\hat{\lambda}_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\hat{\lambda}_n}},$$

где $C_0 = Ai(0) = \dfrac{3^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$, $p = -\dfrac{Ai'(0)}{Ai(0)} = \dfrac{3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$. Введем также функцию

$$A(\lambda) = C_1 e^{p\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\hat{\lambda}_n}},$$

множество корней которой совпадает с последовательностью λ_n. Здесь $C_1 = C_0 \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_n}{\hat{\lambda}_n}$. Из (2.6), (2.16) следует, что $A(\lambda)$ является целой функцией порядка $\dfrac{3}{2}$. При $h(x) \in L_2(0,\infty)$, как показано в [10], $\int_0^\infty h(x)Ai(x-\lambda)\,dx$ — целая функция порядка $\rho \leq \dfrac{3}{2}$. Отсюда следует, что $A^{-1}(\lambda)\int_0^\infty h(x)Ai(x-\lambda)\,dx$ является целой функцией порядка $\rho \leq \dfrac{3}{2}$. Далее, при $0 \leq$ $\leq \arg\lambda \leq 2\pi$ функция $Ai^{-1}(-\lambda)\int_0^\infty h(x)Ai(x-\lambda)\,dx$ допускает (см. [10]) оценку

$$\left| Ai^{-1}(-\lambda)\int_0^\infty h(x)Ai(x-\lambda)\,dx \right| \leq M\,\|h\|\,R^{\frac{1}{2}}, \quad R = |\lambda| > R_0.$$

С другой стороны, внутри угла $\delta \leq \arg\lambda \leq 2\pi - \delta$, $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\left| \frac{\lambda_n - \hat{\lambda}_n}{\lambda - \lambda_n} \right| \leq \frac{Cn^{-\frac{2}{3}}}{|\lambda_n \sin\delta|} \leq \frac{C_1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Тогда из формулы

$$\frac{Ai(-\lambda)}{A(\lambda)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_n - \hat{\lambda}_n}{\lambda - \lambda_n}\right)$$

следует, что

$$\left| \frac{Ai(-\lambda)}{A(\lambda)} \right| \leq C_2.$$

С помощью последних соотношений получаем, что

$$\left| A^{-1}(\lambda) \int\limits_0^\infty h(x) Ai(x-\lambda)\, dx \right| \leq M_1 \|h\| R^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1}$$

где $R = |\lambda| > R_0$, $\delta \leq \arg\lambda \leq 2\pi - \delta$. Пусть теперь $\delta > 0$ таково, что раствор сектора $-\delta \leq \arg\lambda \leq \delta$ меньше $\dfrac{2\pi}{3}$. Применив теорему Фрагмена – Линделефа [26] к функции $(1+\lambda)^{-\frac{1}{2}} A^{-1}(\lambda) \int_0^\infty h(x) Ai(x-\lambda)\, dx$, получим, что оценка (3.1) выполняется и в секторе $-\delta \leq \arg\lambda \leq \delta$. Используя тогда теорему Лиувилля [26], заключаем, что $A^{-1}(\lambda) \int_0^\infty h(x) Ai(x-\lambda)\, dx \equiv 0$ и, следовательно, $h(x) = 0$.

Лемма доказана.

Перейдем теперь к изучению разрешимости основного интегрального уравнения (2.32).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* I, II. *Тогда при каждом фиксированном* $x \geq 0$ *уравнение* (2.32) *имеет единственное решение* $K(x,y)$ *в пространстве* $L_p(x,\infty)$, $p = 1, 2$.

Доказательство. Из оценок (2.42), (2.43) следует, что уравнение (2.32) порождается вполне непрерывным оператором в $L_p(x,\infty)$, $p = 1, 2$. В силу альтернативы Фредгольма достаточно доказать, что однородное уравнение

$$h(y) + \int\limits_x^\infty F(t,y)\, h(t) dt = 0 \tag{3.2}$$

имеет только тривиальное решение в $L_p(x,\infty)$, $p = 1, 2$. С другой стороны, если $h(y) \in L_1(0,\infty)$ — решение уравнения (3.2), то из условия II следует, что функция $h(y)$ ограничена в интервале (x,∞). Поэтому будем считать, что $h(y)$ принадлежит $L_2(x,\infty)$. Тогда

$$\int\limits_x^\infty h^2(y) dy + \int\limits_x^\infty \int\limits_x^\infty F(t,y)\, h(t) h(y) dt dy = 0. \tag{3.3}$$

Запишем последнее равенство в виде

$$\lim_{b\to\infty} \left[\int\limits_x^b h^2(y) dy + \int\limits_x^b \int\limits_x^b F(t,y)\, h(t) h(y) dt dy \right] = 0.$$

Согласно условию II функция $F_N(x,y)$, определенная формулой (2.22), ограниченно сходится к функции $F(x,y)$. Подставляя тогда вместо $F(x,y)$ соответствующий предел и меняя местами интегралы и предел, получаем

$$\lim_{b\to\infty} \left[\int\limits_x^b h^2(y) dy + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\alpha_n)^2} \left(\int\limits_x^b h(y) f_0(y,\lambda_n)\, dy \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\hat{\alpha}_n)^2} \left(\int\limits_x^b h(y) f_0\left(y, \hat{\lambda}_n\right) dy \right)^2 \right] = 0.$$

Отметим, что в силу (2.7) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\hat{\alpha}_n)^2}\left(\int_x^b h(y)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)dy\right)^2$ при каждом b сходится, причем справедливо равенство Парсеваля

$$\int\limits_x^b h^2(y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\hat{\alpha}_n)^2}\left(\int\limits_x^b h(y)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)dy\right)^2.$$

Кроме того, из (2.2), (2.4), (2.6), (2.16), (2.19) следует, что

$$\frac{1}{(\alpha_n)^2}\left(\int\limits_x^b h(y)f_0\left(y,\lambda_n\right)dy\right)^2\sim\frac{1}{(\hat{\alpha}_n)^2}\left(\int\limits_x^b h(y)f_0\left(y,\hat{\lambda}_n\right)dy\right)^2,\quad n\to\infty.$$

Поэтому при каждом b ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n)^2}\left(\int_x^b h(y)f_0\left(y,\lambda_n\right)dy\right)^2$ также сходится. Тогда из последних двух равенств находим

$$\lim_{b\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n)^2}\left(\int\limits_x^b h(y)f_0\left(y,\lambda_n\right)dy\right)^2=0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{(\alpha_n)^2}\left(\int\limits_x^b h(y)f_0\left(y,\lambda_n\right)dy\right)^2=0.$$

Поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_x^{\infty} h(y)f_0\left(y,\lambda_n\right)dy=0, n\geq 1.$$

Поскольку в силу леммы 2.1 система функций $\{f_0\left(y,\lambda_n\right)\}_0^{\infty}$ полна в $L_2\left(x,\infty\right)$, то $h(y)=0$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

После некоторой переформулировки необходимые условия I и II становятся и достаточными для того, чтобы удовлетворяющий им набор величин $\{\lambda_n,\alpha_n>0\}_{n=1}^{\infty}$ был спектральными данными граничной задачи вида (1.1), (1.2) с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим требованиям (1.3). Действительно, из теоремы 2.1 следует, что оператор $I+K_{(x)}$, порожденный левой частью уравнения (2.32), имеет при каждом $x\geq 0$ ограниченный обратный в пространстве $L_1\left(x,\infty\right)$. Кроме того, вследствие (2.42) при $x\to\infty$ имеем $\left\|K_{(x)}\right\|=\sup_{z\geq x}\int_x^{\infty}\left|F\left(y,z\right)\right|dy\to 0,\ x\to\to\infty$, откуда следует, что обратный оператор $\left(I+K_{(x)}\right)^{-1}$ ограничен в $L_1\left(x,\infty\right)$ по норме равномерно относительно x $(x\geq 0)$. Отсюда и из (2.32) получаем

$$\left|K(x,y)\right|\leq\left|F(x,y)\right|+C\sup_{t\geq x}\left|F\left(t,y\right)\right|. \tag{3.4}$$

Аналогично доказывается, что оператор $\left(I+K_{(x)}\right)^{-1}$ ограничен в $L_\infty(x,\infty)$ по норме равномерно относительно x $(x\geq 0)$. Далее с помощью (2.42), (2.43) устанавливается, что решение $K(x,y)$уравнения (2.32) абсолютно непрерывно в области $y\geq x\geq 0$ по каждому аргументу, а функция $K(x,x)$ абсолютно непрерывна в области $x\geq 0$.

Дифференцируя тогда (2.32) по $y,x,$ получаем

$$\int\limits_x^\infty y\left|\frac{\partial K(x,y)}{\partial y}\right|dy<\infty,\quad \int\limits_x^\infty y\left|\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\right|dy<\infty. \tag{3.5}$$

Для изучения функции $\dfrac{dK(x,x)}{dx}$ введем функцию

$$B(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(K(x,y)+F(x,y)\right). \tag{3.6}$$

Из основного уравнения (2.32) имеем

$$B(x,y)+\int\limits_x^\infty B(x,z)\,F(z,y)\,dz=C(x,y), \tag{3.7}$$

где

$$C(x,y)=\int\limits_x^\infty F(z,y)\left(\frac{\partial F(x,z)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,z)}{\partial z}\right)dz-\int\limits_x^\infty K(x,y)\left(\frac{\partial F(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial F(y,z)}{\partial z}\right)dz.$$

Используя тогда (2.42)–(2.44), (3.5) и (3.6), из (3.7) находим, что при любом $x\geq 0$ имеет место соотношение

$$\int\limits_x^\infty x^4\left|B(x,x)\right|dx<\infty,\quad B(x,x)=o(x),\quad x\to\infty.$$

С помощью последних соотношений и (2.44), (3.6) получаем

$$\int\limits_x^\infty x^4\left|\frac{d}{dx}K(x,x)\right|dx<\infty,\quad \frac{d}{dx}K(x,x)=o(x),\quad x\to\infty. \tag{3.8}$$

Далее, с помощью основного уравнения (2.32), как и в [27], устанавливается, что определенная формулой (2.12) функция $f(x,\lambda)$ является решением задачи

$$-f''(x,\lambda)+xf(x,\lambda)+q(x)f(x,\lambda)=\lambda f(x,\lambda),\quad 0\leq x<\infty,$$

$$f(x,\lambda_n)=0,\quad n\geq 1,$$

где потенциал $q(x)$ определяется по формуле (2.15). В силу (2.15) и (3.8) потенциал $q(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int\limits_0^\infty x^4\left|q(x)\right|dx+<\infty,\ q(x)=o(x),\quad x\to\infty.$$

Это замечание и завершает решение обратной задачи.

Литература

1. J. Avron, I. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect*, Commun. Math. Phys., **52**, 239 – 254 (1977).
2. F. Calogero, A. Degasperis, *Inverse spectral problem for the one-dimensional Schrödinger equation with an additional linear potential*, Lett. Nuovo Cim., **23**, № 4, 143 – 149 (1978).
3. Y. Lin, M. Qian, Q. Zhang, *Inverse scattering problem for one-dimensional Schrödinger operators related to the general Stark effect*, Acta Math. Appl. Sin., **5**, № 2, 116 – 136 (1989).
4. Yishen Li, *One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis*, Chin. Ann. Math., **2**, № 2, 147 – 155 (1981).
5. A. P. Kachalov, Ya. V. Kurylev, *The method of transformation operators in the inverse scattering problem. The one-dimensional Stark effect*, J. Soviet Math., **5**, № 3, 3111 – 3122 (1991).
6. Х. Х. Муртазин, Т. Г. Амангильдин, *Асимптотика спектра оператора Штурма – Лиувилля*, Мат. сб., **110 (152)**, № 1, 135 – 149 (1979).
7. I. Herbst, *Dilation analyticity in constant electric field I. The two body problem*, Commun. Math. Phys., **64**, 279 – 298 (1979).
8. A. Jensen, *Perturbation results for Stark effect resonances*, J. reine und angew. Math., **394**, 168 – 179 (1989).
9. A. Its, V. Sukhanov, *A Riemann – Hilbert approach to the inverse problem for the Stark operator on the line*, Inverse Problems, **32**, 1 – 28 (2016).
10. А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси*, Функцион. анализ и его прил., **51**, № 1, 82 – 98 (2017).
11. E. L. Korotyaev, *Resonances for 1D Stark operators*, J. Spectral Theory, **7**, № 3, 633 – 658 (2017).
12. E. L. Korotyaev, *Asymptotics of resonances for 1D Stark operators*, Lett. Math. Phys., **118**, № 5, 1307 – 1322 (2018).
13. М. Г. Махмудова, А. Х. Ханмамедов, *О спектральных свойствах одномерного оператора Штарка на полуоси*, Укр. мат. журн., **71**, № 11, 1579 – 1584 (2019).
14. М. Г. Гасымов, Б. А. Мустафаев, *Обратная задача рассеяния для ангармонического уравнения на полуоси*, Докл. АН СССР, **228**, № 11, 321 – 323 (1976).
15. D. Chelkak, P. Kargaev, E. Korotyaev, *Inverse problem for harmonic oscillator perturbed by potential, characterization*, Commun. Math. Phys., **249**, № 4, 133 – 196 (2004).
16. D. Chelkak, E. Korotyaev, *The inverse problem for perturbed harmonic oscillator on the half-line with Dirichlet boundary condition*, Ann. H. Poincaré, **8**, № 6, 1115 – 1150 (2017).
17. I. M. Guseinov, A. Kh. Khanmamedov, A. F. Mamedova, *Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with an additional quadratic potential on the entire axis*, Theor. and Math. Phys., **195**, № 6, 538 – 547 (2018).
18. И. М. Гусейнов, А. Х. Ханмамедов, *К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом*, Укр. мат. журн., **70**, № 10, 1390 – 1402 (2018).
19. S. M. Bagirova, A. Kh. Khanmamedov, *The inverse spectral problem for the perturbed harmonic oscillator on the entire axis*, Proc. Inst. Math. and Mech. NAS Azerbaijan, **44**, № 2, 1 – 10 (2018).
20. М. Абрамович, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979).
21. В. А. Марченко, *Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения*, Наук. думка, Киев (1977).
22. Б. М. Левитан, *Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям. II*, Изв. АН СССР, сер. мат., **19**, 33 – 58 (1955).
23. N. G. Mamedova, A. Kh. Khanmamedov, *One remark on the eigenvalues of the Schrödinger operator with growing potential*, Casp. J. Appl. Math., Ecol. and Econ., **2**, 2 – 5 (2019).
24. Ф. А. Березин, М. А. Шубин, *Уравнение Шредингера*, Наука, Москва (1983).
25. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Введение в спектральную теорию*, Наука, Москва (1970).
26. Е. Ч. Титчмраш, *Теория функций*, Наука, Москва (1980).
27. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма – Лиувилля*, Наука, Москва (1984).

Получено 09.01.20