DOI: 10.37863/umzh.v72i7.2342

УДК 517.5

Т. М. Антонова (Нац. ун-т „Львів. політехніка”),
Р. І. Дмитришин (Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ)

ОЦІНКИ ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ $\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{1} + \ldots$

The paper deals with the problem of estimating the error of approximation of a branched continued fraction, which is a generalization of a continued fraction. Using the method of fundamental inequalities, truncation error bounds for branched continued fraction $\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{1} + \ldots$, whose elements belong to some rectangular sets of a complex plane, are established. The obtained results have been applied to multidimensional *S*-, *A*-fraction with independent variables.

Розглянуто задачу оцінювання похибки наближення для гіллястого ланцюгового дробу, який є багатовимірним узагальненням неперервного дробу. За допомогою методу фундаментальних нерівностей встановлено оцінки швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу $\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{1} + \ldots$, елементи якого належать деяким прямокутним множинам комплексної площини. Отримані результати застосовано до багатовимірних *S*-, *A*-дробів із нерівнозначними змінними.

1. Вступ. Нехай N — фіксоване натуральне число, $i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — мультиіндекс, зокрема $i(1) = i_1$, та $\mathcal{I} = \{i(k)\colon 1 \le i_p \le i_{p-1},\, 1 \le p \le k,\ i_0 = N,\ k \in \mathbb{N}\}$ — множина мультиіндексів.

Досліджується збіжність гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД)

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{1} + \ldots, \tag{1}$$

де N — розмірність ГЛД, $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, — комплексні сталі. Наведемо кілька понять, що стосуються теорії ГЛД (див., наприклад, [2, 6]).

Скінченний ГЛД

$$f_n = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} \frac{a_{i(n)}}{1}$$

називають n-м підхідним дробом ГЛД (1), $n \ge 1$.

ГЛД (1) збігається, якщо не більше ніж скінченна кількість його підхідних дробів не має сенсу, і послідовність його підхідних дробів $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до скінченної границі f, тобто $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. У цьому випадку f називають значенням ГЛД (1). Інакше ГЛД (1) розбігається.

Різницю $(f - f_n)$ називають похибкою наближення n-м підхідним дробом, $n \ge 1$.

Послідовність $\{E_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ непорожніх множин $E_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, із $\mathbb{C}$ називають послідовністю множин збіжності ГЛД (1), якщо із того, що $a_{i(k)} \in E_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$, випливає, що ГЛД (1) збігається. Послідовність множин збіжності $\{E_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ ГЛД (1) називають послідовністю його множин рівномірної збіжності, якщо існує послідовність додатних чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, яка залежить лише від $\{E_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$, збігається до нуля і така, що

$$|f_{n+k} - f_n| \le \lambda_n \quad \text{для} \quad n \ge 1, \quad k \ge 0,$$

для кожної послідовності $\{a_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ такої, що $a_{i(k)} \in E_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$.

Деякі методи доведення збіжності неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень — ГЛД — є методами доведення існування границь послідовностей підхідних дробів і тому не дають оцінок похибок наближень (див., наприклад, [2, 5, 6, 11, 13, 14, 16, 18]). Однак ці оцінки мають важливе значення для застосування їх до наближення функцій однієї чи багатьох змінних. Методику проведення аналізу похибок наближень неперервних дробів детально викладено у книзі [18]. На жаль, загалом ця методика не переноситься на ГЛД.

Одним із методів дослідження збіжності, який дозволяє оцінювати похибки наближень ГЛД, є метод фундаментальних нерівностей [3, 4, 6]. Аналоги цього методу також встановлені і для ГЛД (1) [1, 2]. Важливою складовою методу фундаментальних нерівностей є оцінки так званих залишків, які для цих ГЛД можна визначити таким чином:

$$G_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} \frac{a_{i(k+1)}}{G_{i(k+1)}^{(n)}}, \qquad i(k) \in \mathcal{I}, \quad 1 \le k \le n-1, \quad n \ge 2, \tag{2}$$

з початковими умовами $G_{i(s)}^{(s)} = 1,\ i(s) \in \mathcal{I},\ s \ge 1$. Вважатимемо, що для ГЛД (1) виконуються фундаментальні нерівності, якщо

$$G_{i(k)}^{(s)} \ne 0 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{I}, \quad 1 \le k \le s, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

та існують додатні сталі M і $\rho_l,\ l \ge 1$, такі, що для всіх $s \ge 1,\ n \ge 2$ і $1 \le k \le n-1$ виконуються нерівності

$$|a_{i(1)}| \le M|G_{i(1)}^{(s)}|, \quad 1 \le i_1 \le N,\ |a_{i(k+1)}| \le \rho_k |G_{i(k)}^{(n)} G_{i(k+1)}^{(n)}|, \quad i(k) \in \mathcal{I}, \quad 1 \le i_{k+1} \le i_k. \tag{4}$$

У роботі [1] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД* (1) *такі, що виконуються нерівності* (3), (4) *і*

$$C_{N+n}^{N-1} \prod_{l=1}^{n} \rho_l \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Тоді ГЛД (1) *збігається до значення f і для похибки наближення його n-м підхідним дробом f_n справджується оцінка $|f - f_n| \le M C_{N+n}^{N-1} \prod_{l=1}^{n} \rho_l,\ n \ge 1$.*

Зауважимо, що у випадку, коли $\rho_l \le \rho < 1$ для всіх $l \ge 1$, умова (5) виконується, оскільки $C_{N+n}^{N-1} \rho^{n+1} = (\rho^{n+N})^{(N-1)}/(N-1)!$, і степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n+N}$ та ряд, складений із $(N-1)$-х похідних його членів, збігаються.

Ця робота є продовженням досліджень, розпочатих в [1, 2], де встановлено деякі ознаки збіжності ГЛД (1) з дійсними і комплексними елементами за допомогою методу фундаментальних нерівностей.

Відмітимо також роботу [12], у якій встановлено оцінку похибки наближення для ГЛД

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{b_{i(1)}} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{1}{b_{i(2)}} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{1}{b_{i(3)}} + \ldots,$$

де $b_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I},$ — сталі, які належать кутовим множинам комплексної площини.

2. Оцінки похибок наближень. Нехай $\{t_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I},\, k\ge 2}$ і $\{\alpha_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ — послідовності дійсних чисел. Позначимо

$$x_{i(k)} = \Re\big(a_{i(k)} e^{i(\alpha_{i(k-1)} + \alpha_{i(k)})}\big), \qquad y_{i(k)} = \Im\big(a_{i(k)} e^{i(\alpha_{i(k-1)} + \alpha_{i(k)})}\big), \quad i(k) \in \mathcal{I}, \quad k \ge 2, \tag{6}$$

$$\mu_{i(k)} = (\sin^2 \alpha_{i(k)} + (1 - T_{i(k)})^2 \cos^2 \alpha_{i(k)})^{1/2}, \quad T_{i(k)} = \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} t_{i(k+1)}, \quad i(k) \in \mathcal{I}, \tag{7}$$

$$u_{i(k)}^{(n)} = \Re\big(G_{i(k)}^{(n)} e^{i\alpha_{i(k)}}\big), \qquad v_{i(k)}^{(n)} = \Im\big(G_{i(k)}^{(n)} e^{i\alpha_{i(k)}}\big), \quad i(k) \in \mathcal{I}, \quad 1 \le k \le n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Дослідимо збіжність ГЛД (1) у випадку, коли величини $x_{i(k)}$ й $y_{i(k)}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$ і $k \ge 2$ набувають відповідно недодатних і невід'ємних значень. З цією метою доведемо таку лему.

Лема 1. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності*

$$-t_{i(k)}\mu_{i(k)} \cos\alpha_{i(k-1)} \le x_{i(k)} \le 0, \qquad y_{i(k)} \ge 0 \quad \textit{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{I} \quad \textit{і} \quad k \ge 2, \tag{9}$$

де $x_{i(k)}$, $y_{i(k)}$ *і* $\mu_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $k \ge 2$, *означено відповідно в* (6) *і* (7); $t_{i(k)}$, $k \ge 2$, *та* $\alpha_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, *— деякі дійсні числа такі, що*

$$t_{i(k)} > 0, \quad k \ge 2, \qquad T_{i(k)} \le 1, \quad 0 \le \alpha_{i(k)} \le \pi/2, \qquad T_{i(k)} - \alpha_{i(k)} \ne 1, \quad i(k) \in \mathcal{I}, \tag{10}$$

де $T_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, *означено в* (7). *Тоді для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}$, $1 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$, *виконуються нерівності*

$$u_{i(k)}^{(n)} \ge (1 - T_{i(k)}) \cos\alpha_{i(k)}, \qquad v_{i(k)}^{(n)} \ge \sin\alpha_{i(k)}, \tag{11}$$

де $u_{i(k)}^{(n)}$ *і* $v_{i(k)}^{(n)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $1 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$, *означено у* (8).

Доведення проведемо для довільного натурального числа n за індукцією по k для кожного мультиіндексу $i(k) \in \mathcal{I}$, $1 \le k \le n$.

Для $k = n$ і для всіх $i(n) \in \mathcal{I}$ нерівності (11) є очевидними. Припустимо, що вони виконуються для $k = p$ і для всіх $i(p) \in \mathcal{I}$ таких, що $p \le n$. Тоді з урахуванням позначень (7), (8) та умов (10) для залишків (2) маємо

$$\big|G_{i(p)}^{(n)}\big| = \big|G_{i(p)}^{(n)} e^{i\alpha_{i(p)}}\big| \ge \mu_{i(p)} > 0, \qquad i(p) \in \mathcal{I}, \quad p \le n, \tag{12}$$

а для $k = p - 1$ і для довільного мультиіндексу $i(p-1) \in \mathcal{I}$ записуємо

$$G_{i(p-1)}^{(n)} e^{i\alpha_{i(p-1)}} = e^{i\alpha_{i(p-1)}} + \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{(x_{i(p)} + iy_{i(p)})\big(u_{i(p)}^{(n)} - iv_{i(p)}^{(n)}\big)}{\big|G_{i(p)}^{(n)}\big|^2}.$$

Звідси з урахуванням нерівностей (9), (10) і припущень індукції отримуємо

$$u_{i(p-1)}^{(n)} = \cos\alpha_{i(p-1)} + \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{x_{i(p)} u_{i(p)}^{(n)} + y_{i(p)} v_{i(p)}^{(n)}}{\big|G_{i(p)}^{(n)}\big|^2} \ge \cos\alpha_{i(p-1)} \left(1 - \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{t_{i(p)}\mu_{i(p)} u_{i(p)}^{(n)}}{\big|G_{i(p)}^{(n)}\big|^2}\right) \ge$$

$$\ge \cos\alpha_{i(p-1)}\big(1 - T_{i(p-1)}\big),$$

$$v_{i(p-1)}^{(n)} = \sin\alpha_{i(p-1)} + \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \frac{y_{i(p)} u_{i(p)}^{(n)} - x_{i(p)} v_{i(p)}^{(n)}}{\big|G_{i(p)}^{(n)}\big|^2} \ge \sin\alpha_{i(p-1)}.$$

Лему 1 доведено.

Для зручності позначимо

$$R^{(n)}_{i(k),j} = \cos\alpha_{i(k)} + \sum_{1\le i_{k+1}\le i_k,\; i_{k+1}\ne j} \frac{x_{i(k+1)}u^{(n)}_{i(k+1)} + y_{i(k+1)}v^{(n)}_{i(k+1)}}{\left|G^{(n)}_{i(k+1)}\right|^2}, \qquad (13)$$

$$Q^{(n)}_{i(k),j} = \sin\alpha_{i(k)} + \sum_{1\le i_{k+1}\le i_k,\; i_{k+1}\ne j} \frac{y_{i(k+1)}u^{(n)}_{i(k+1)} - x_{i(k+1)}v^{(n)}_{i(k+1)}}{\left|G^{(n)}_{i(k+1)}\right|^2}, \qquad (14)$$

де $i(k)\in\mathcal{I},\ 1\le k\le n-1,\ n\ge 2$, і $1\le j\le i_k$. Тоді для довільного $j,\ 1\le j\le i_k$, записуємо

$$G^{(n)}_{i(k)}e^{i\alpha_{i(k)}} = R^{(n)}_{i(k),j} + iQ^{(n)}_{i(k),j} + \frac{x_{i(k),j}+iy_{i(k),j}}{u^{(n)}_{i(k),j}+iv^{(n)}_{i(k),j}}, \qquad i(k)\in\mathcal{I},\quad 1\le k\le n-1,\quad n\ge 2,$$

звідки випливає, що для всіх $j,\ 1\le j\le i_k$, справджуються рівності

$$\left|G^{(n)}_{i(k)}\right|^2 = \left(R^{(n)}_{i(k),j}\right)^2 + \left(Q^{(n)}_{i(k),j}\right)^2 + \frac{|a_{i(k),j}|^2}{\left|G^{(n)}_{i(k),j}\right|^2} + 2R^{(n)}_{i(k),j}\frac{x_{i(k),j}u^{(n)}_{i(k),j} + y_{i(k),j}v^{(n)}_{i(k)j}}{\left|G^{(n)}_{i(k),j}\right|^2} +$$

$$+2Q^{(n)}_{i(k),j}\frac{y_{i(k),j}u^{(n)}_{i(k),j} - x_{i(k),j}v^{(n)}_{i(k)j}}{\left|G^{(n)}_{i(k),j}\right|^2}, \qquad i(k)\in\mathcal{I},\quad 1\le k\le n-1,\quad n\ge 2. \qquad (15)$$

Теорема 2. *Нехай існують додатні сталі L і d такі, що елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності* (9), (10) *і*

$$|a_{i(k)}|\le L, \qquad d\le (\mu_{i(k),j})^2\left(\sin^2\alpha_{i(k)} + \left((1-T_{i(k)})^2 - (t_{i(k),j})^2\right)\cos^2\alpha_{i(k)}\right) \qquad (16)$$

для всіх $i(k)\in\mathcal{I}$ та $j,\ 1\le j\le i_k$. Тоді ГЛД (1) *збігається до значення f і для кожного $n\ge 1$ для похибки наближення його n-м підхідним дробом f_n справджується оцінка*

$$|f-f_n|\le C^{N-1}_{N+n}\frac{L^{n+1}}{d_0(L^2+d)^{n/2}}, \qquad (17)$$

де $d_0=\min_{1\le i_1\le N}\mu_{i(1)}$.

Доведення. Покажемо, що виконуються нерівності (3) і (4). Зауважимо, що оскільки виконуються умови леми 1, то правильними є оцінки (11) і (12).

Використовуючи нерівності (12), (16), для довільного індексу $i_1,\ 1\le i_1\le N$, отримуємо

$$|a_{i(1)}|/\left|G^{(n)}_{i(1)}\right|\le L/\mu_{i(1)}\le L/d_0.$$

Нехай n — довільне натуральне число, $n\ge 2$. Використовуючи нерівності (9)–(12) і (16), для кожного мультиіндексу $i(k)\in\mathcal{I},\ 1\le k\le n-1$, і кожного індексу $j,\ 1\le j\le i_k$, оцінюємо величини $|a_{i(k),j}|^2/\left|G^{(n)}_{i(k)}G^{(n)}_{i(k),j}\right|^2$.

Для довільного мультиіндексу $i(k)\in\mathcal{I},\ 1\le k\le n-1$, і довільного індексу $j,\ 1\le j\le i_k$, спочатку для величин $R^{(n)}_{i(k),j}$ і $Q^{(n)}_{i(k),j}$, означених відповідно в (13) і (14), маємо

$$R_{i(k),j}^{(n)} \geq \cos\alpha_{i(k)} + \sum_{1\leq i_{k+1}\leq i_k,\, i_{k+1}\neq j} \frac{x_{i(k+1)}u_{i(k+1)}^{(n)}}{\left|G_{i(k+1)}^{(n)}\right|^2} \geq \cos\alpha_{i(k)}\left(1 - \sum_{1\leq i_{k+1}\leq i_k,\, i_{k+1}\neq j} t_{i(k+1)}\right) = \tag{18}$$

$$= \cos\alpha_{i(k)}\big(1 - T_{i(k)} + t_{i(k),j}\big),$$

$$Q_{i(k),j}^{(n)} \geq \sin\alpha_{i(k)}. \tag{19$'$}$$

Далі, із (15) враховуючи (18) і (19$'$), отримуємо

$$\left|G_{i(k)}^{(n)}\right|^2 \geq (R_{i(k),j}^{(n)})^2 + 2R_{i(k),j}^{(n)}\frac{x_{i(k),j}u_{i(k),j}^{(n)}}{\left|G_{i(k),j}^{(n)}\right|^2} + (Q_{i(k),j}^{(n)})^2 + \frac{|a_{i(k),j}|^2}{\left|G_{i(k),j}^{(n)}\right|^2} \geq$$

$$\geq (1 - T_{i(k)} - t_{i(k),j})R_{i(k),j}^{(n)}\cos\alpha_{i(k)} + \sin^2\alpha_{i(k)} + \frac{|a_{i(k),j}|^2}{\left|G_{i(k),j}^{(n)}\right|^2} \geq$$

$$\geq \sin^2\alpha_{i(k)} + ((1 - T_{i(k)})^2 - (t_{i(k),j})^2)\cos^2\alpha_{i(k)} + \frac{|a_{i(k),j}|^2}{\left|G_{i(k),j}^{(n)}\right|^2}$$

і, крім цього, враховуючи, що $|a_{i(k),j}|^2/\left|G_{i(k),j}^{(n)}\right|^2 \leq L^2/(\mu_{i(k),j})^2$, маємо

$$\frac{|a_{i(k),j}|^2}{|G_{i(k)}^{(n)}G_{i(k),j}^{(n)}|^2} \leq \frac{|a_{i(k),j}|^2/\left|G_{i(k),j}^{(n)}\right|^2}{\sin^2\alpha_{i(k)} + \big((1 - T_{i(k)})^2 - (t_{i(k),j})^2\big)\cos^2\alpha_{i(k)} + |a_{i(k),j}|^2/\left|G_{i(k),j}^{(n)}\right|^2} \leq \frac{L^2}{L^2 + d}.$$

Вибираючи $M = L/d_0$ і $\rho_n = L/(L^2+d)^{1/2}$, $n \geq 1$, на підставі теореми 1 і зауваження до неї отримуємо твердження цієї теореми.

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що для певних можливих значень чисел послідовностей $\{t_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I},\, k\geq 2}$ та $\{\alpha_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ із теореми 2 можна безпосередньо отримати ряд простих і конструктивних умов для встановлення швидкості збіжності ГЛД (1) і, як наслідок, послідовності множин їх рівномірної збіжності. Наприклад, нехай

$$t_{i(k)} = 1/i_{k-1} \quad \text{для всіх} \quad i(k)\in\mathcal{I} \quad \text{і} \quad k\geq 2 \quad \text{та} \quad \alpha_{i(k)} = \alpha_{i_k} \quad \text{для всіх} \quad i(k)\in\mathcal{I}. \tag{19}$$

Тоді маємо такі два наслідки.

***Наслідок* 1.** *Нехай існує додатна стала L така, що елементи ГЛД* (1) *для всіх $i(k)\in\mathcal{I}$, $k\geq 2$, задовольняють нерівності*

$$|a_{i(k-1)}| \leq L, \quad -\cos\alpha_{i_{k-1}}\sin\alpha_{i_k} \leq i_{k-1}\Re\big(a_{i(k)}e^{i(\alpha_{i_{k-1}}+\alpha_{i_k})}\big) \leq 0,$$

$$\Im\big(a_{i(k)}e^{i(\alpha_{i_{k-1}}+\alpha_{i_k})}\big) \geq 0,$$

де α_k, $1\leq k\leq N$, — деякі дійсні числа такі, що $\pi/4 < \alpha_k \leq \pi/2$, $1\leq k\leq N$. Тоді ГЛД (1) *збігається до значення f і для кожного $n\geq 1$ для похибки наближення його n-м підхідним дробом f_n виконується оцінка* (17), *де*

$$d_0 = \min_{1\leq i_1\leq N}|\sin\alpha_{i_1}|, \qquad d = \min_{i(2)\in\mathcal{I}}\big\{|\sin\alpha_{i_2}|(\sin^2\alpha_{i_1} - i_1^{-2}\cos^2\alpha_{i_1})\big\}. \tag{20}$$

***Наслідок* 2.** *Послідовність множин* $\{E_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$, *де*

$$E_{i(1)}=\big\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\le L\big\},\quad 1\le i_1\le N,$$
$$E_{i(k)}=\big\{z\in\mathbb{C}\colon -\sin 2\alpha\le 2i_{k-1}\Re(ze^{2i\alpha})\le 0,\ 0\le\Im(ze^{2i\alpha})\le K\big\},\qquad i(k)\in\mathcal{I},\quad k\ge 2,$$

$L,\ K,\ \alpha$ *— деякі дійсні числа такі, що* $L>0,\ K>0,\ \pi/4<\alpha\le\pi/2$, *є послідовністю множин рівномірної збіжності ГЛД* (1).

Для випадку, коли визначені за формулою (6) величини $x_{i(k)}$ та $y_{i(k)}$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}$ і $k\ge 2$ набувають недодатних значень, за схемою доведення леми 1 отримуємо таку лему.

Лема 2. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності*

$$-t_{i(k)}\mu_{i(k)}\cos\alpha_{i(k-1)}\le x_{i(k)}\le 0,\quad y_{i(k)}\le 0\quad \textit{для всіх}\quad i(k)\in\mathcal{I}\quad \textit{і}\quad k\ge 2, \tag{21}$$

де $x_{i(k)},\ y_{i(k)}$ *і* $\mu_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I},\ k\ge 2$, *означено відповідно в* (6) *і* (7); $t_{i(k)},\ k\ge 2$, *та* $\alpha_{i(k)}$, $i(k)\in\mathcal{I}$, *— деякі дійсні числа такі, що*

$$t_{i(k)}>0,\quad k\ge 2,\quad T_{i(k)}\le 1,\quad -\pi/2\le\alpha_{i(k)}\le 0,\quad T_{i(k)}+\alpha_{i(k)}\ne 1,\quad i(k)\in\mathcal{I}, \tag{22}$$

$T_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I}$, *означено в* (7). *Тоді для всіх* $i(k)\in\mathcal{I},\ 1\le k\le n$, *та* $n\in\mathbb{N}$ *виконуються нерівності* $u^{(n)}_{i(k)}\ge(1-T_{i(k)})\cos\alpha_{i(k)},\ v^{(n)}_{i(k)}\le\sin\alpha_{i(k)}$, *де* $u^{(n)}_{i(k)}$ *і* $v^{(n)}_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I},\ 1\le k\le n$, $n\in\mathbb{N}$, *означено у* (8).

На підставі леми 2, міркуючи, як і при доведенні теореми 2, і замінюючи нерівність (19′) нерівністю $Q^{(n)}_{i(k),j}\le\sin\alpha_{i(k)}$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I},\ 1\le k\le n-1,\ n\ge 2$ та $j,\ 1\le j\le i_k$, отримуємо такий результат.

Теорема 3. *Нехай існують додатні сталі* L *і* d *такі, що елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності* (21), (22) *і* (16) *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}$ *та* $j,\ 1\le j\le i_k$. *Тоді ГЛД* (1) *збігається до значення* f *і для кожного* $n\ge 1$ *для похибки наближення його* n*-м підхідним дробом* f_n *справджується оцінка* (17).

За умови (19) наступні два наслідки безпосередньо випливають із теореми 3.

***Наслідок* 3.** *Нехай існує додатна стала* L *така, що елементи ГЛД* (1) *для всіх* $i(k)\in\mathcal{I}$, $k\ge 2$, *задовольняють нерівності*

$$|a_{i(k-1)}|\le L,\qquad -\cos\alpha_{i_{k-1}}|\sin\alpha_{i_k}|\le i_{k-1}\Re\Big(a_{i(k)}e^{i(\alpha_{i_{k-1}}+\alpha_{i_k})}\Big)\le 0,$$
$$\Im\Big(a_{i(k)}e^{i(\alpha_{i_{k-1}}+\alpha_{i_k})}\Big)\le 0,$$

де $\alpha_k,\ 1\le k\le N$, *— деякі дійсні числа такі, що* $-\pi/2\le\alpha_k<-\pi/4,\ 1\le k\le N$. *Тоді ГЛД* (1) *збігається до значення* f *і для кожного* $n\ge 1$ *для похибки наближення його* n*-м підхідним дробом* f_n *виконується оцінка* (17), *де* d_0 *і* d *означено у* (20).

***Наслідок* 4.** *Послідовність множин* $\{E_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$, *де*

$$E_{i(1)}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\le L\},\quad 1\le i_1\le N,$$
$$E_{i(k)}=\big\{z\in\mathbb{C}\colon -|\sin 2\alpha|\le 2i_{k-1}\Re(ze^{2i\alpha})\le 0, -K\le\Im(ze^{2i\alpha})\le 0\big\},\quad i(k)\in\mathcal{I},\quad k\ge 2,$$

$L,\ K,\ \alpha$ *— деякі дійсні числа такі, що* $L>0,\ K>0,\ -\pi/2\le\alpha<-\pi/4$, *є послідовністю множин рівномірної збіжності ГЛД* (1).

Нехай тепер визначені за формулою (6) величини $x_{i(k)}$ та $y_{i(k)}$ для всіх $i(k)\in\mathcal{I}$ і $k\geq 2$ набувають невід'ємних значень. Тоді правильними є такі два твердження.

Лема 3. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності*

$$t_{i(k)}\nu_{i(k)}\sin\alpha_{i(k-1)}\geq x_{i(k)}\geq 0,\qquad y_{i(k)}\geq 0\quad \textit{для всіх}\quad i(k)\in\mathcal{I}\quad i\quad k\geq 2, \tag{23}$$

де $x_{i(k)},\ y_{i(k)},\ k\geq 2$, *означено в* (6);

$$\nu_{i(k)}=\left(\cos^2\alpha_{i(k)}+(1-T_{i(k)})^2\sin^2\alpha_{i(k)}\right)^{1/2},\quad i(k)\in\mathcal{I}; \tag{24}$$

$t_{i(k)},\ k\geq 2$, *та* $\alpha_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I}$, — *деякі дійсні числа такі, що*

$$t_{i(k)}>0,\quad k\geq 2,\quad T_{i(k)}\leq 1,\quad 0\leq\alpha_{i(k)}\leq\pi/2,\quad T_{i(k)}-\alpha_{i(k)}\neq 1-\pi/2,\quad i(k)\in\mathcal{I}. \tag{25}$$

Тоді для всіх $i(k)\in\mathcal{I},\ 1\leq k\leq n,\ n\in\mathbb{N}$, *виконуються нерівності* $u^{(n)}_{i(k)}\geq\cos\alpha_{i(k)},\ v^{(n)}_{i(k)}\geq$ $\geq(1-T_{i(k)})\sin\alpha_{i(k)}$, *де* $u^{(n)}_{i(k)}$ *і* $v^{(n)}_{i(k)},\ i(k)\in\mathcal{I},\ 1\leq k\leq n,\ n\in\mathbb{N}$, *означено у* (8).

Теорема 4. *Нехай існують додатні сталі* L *і* d *такі, що елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності* (23), (25) *і*

$$|a_{i(k)}|\leq L,\qquad d\leq(\nu_{i(k),j})^2\left(\cos^2\alpha_{i(k)}+\left((1-T_{i(k)})^2-(t_{i(k),j})^2\right)\sin^2\alpha_{i(k)}\right) \tag{26}$$

для всіх $i(k)\in\mathcal{I}$ *та* $j,\ 1\leq j\leq i_k$. *Тоді ГЛД* (1) *збігається до значення* f *і для кожного* $n\geq 1$ *для похибки наближення його* n*-м підхідним дробом* f_n *справджується оцінка* (17), *де* $d_0=\min_{1\leq i_1\leq N}\nu_{i(1)}$.

Зауважимо, що доведення леми 3 і теореми 4 проводимо за схемами доведення відповідно леми 1 і теореми 2, при цьому величини $u^{(n)}_{i(p-1)}$ і $v^{(n)}_{i(p-1)}$, означені у (8), та $R^{(n)}_{i(k),j}$ і $Q^{(n)}_{i(k),j}$, означені відповідно у (13) і (14), оцінюємо так:

$$u^{(n)}_{i(p-1)}\geq\cos\alpha_{i(p-1)},\ R^{(n)}_{i(k),j}\geq\cos\alpha_{i(k)},$$

$$v^{(n)}_{i(p-1)}\geq\sin\alpha_{i(p-1)}-\sum_{i_p=1}^{i_{p-1}}\frac{x_{i(p)}v^{(n)}_{i(p)}}{\left|G^{(n)}_{i(p)}\right|^2}\geq\sin\alpha_{i(p-1)}\left(1-\sum_{i_p=1}^{i_{p-1}}\frac{t_{i(p)}\nu_{i(p)}v^{(n)}_{i(p)}}{\left|G^{(n)}_{i(p)}\right|^2}\right)\geq$$

$$\geq\sin\alpha_{i(p-1)}(1-T_{i(p-1)}),$$

$$Q^{(n)}_{i(k),j}\geq\sin\alpha_{i(k)}-\sum_{1\leq i_{k+1}\leq i_k,\ i_{k+1}\neq j}\frac{x_{i(k+1)}v^{(n)}_{i(k+1)}}{\left|G^{(n)}_{i(k+1)}\right|^2}\geq\sin\alpha_{i(k)}\left(1-\sum_{1\leq i_{k+1}\leq i_k,\ i_{k+1}\neq j}t_{i(k+1)}\right)=$$

$$=\sin\alpha_{i(k)}\left(1-T_{i(k)}+t_{i(k),j}\right),$$

а $\left|G^{(n)}_{i(k)}\right|^2$ з урахуванням (15) — таким чином:

$$\left|G^{(n)}_{i(k)}\right|^2\geq\left(R^{(n)}_{i(k),j}\right)^2-2Q^{(n)}_{i(k),j}\frac{x_{i(k),j}v^{(n)}_{i(k),j}}{\left|G^{(n)}_{i(k),j}\right|^2}+(Q^{(n)}_{i(k),j})^2+\frac{|a_{i(k),j}|^2}{\left|G^{(n)}_{i(k),j}\right|^2}\geq$$

$$\geq(1-T_{i(k)}-t_{i(k),j})Q^{(n)}_{i(k),j}\sin\alpha_{i(k)}+\cos^2\alpha_{i(k)}+\frac{|a_{i(k),j}|^2}{\left|G^{(n)}_{i(k),j}\right|^2}\geq$$

$$\geq \cos^2 \alpha_{i(k)} + \big((1 - T_{i(k)})^2 - (t_{i(k),j})^2\big) \sin^2 \alpha_{i(k)} + \frac{|a_{i(k),j}|^2}{\big|G^{(n)}_{i(k),j}\big|^2}.$$

Далі, також без доведення, наведемо ще два результати, оскільки їхні доведення подібні до доведення леми 3 і теореми 4.

Лема 4. *Нехай елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності*

$$t_{i(k)}\nu_{i(k)}|\sin \alpha_{i(k-1)}| \geq x_{i(k)} \geq 0, \qquad y_{i(k)} \leq 0 \quad \text{для всіх} \quad i(k) \in \mathcal{I} \quad \text{і} \quad k \geq 2, \tag{27}$$

де $x_{i(k)},\ y_{i(k)}$ *і* $\nu_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I},\ k \geq 2,$ *означено відповідно в* (6) *і* (24); $t_{i(k)},\ k \geq 2,$ *та* $\alpha_{i(k)},$ $i(k) \in \mathcal{I},$ *— деякі дійсні числа такі, що*

$$t_{i(k)} > 0,\ k \geq 2,\ T_{i(k)} \leq 1,\ -\pi/2 \leq \alpha_{i(k)} \leq 0,\ T_{i(k)} - \alpha_{i(k)} \neq 1 + \pi/2,\ i(k) \in \mathcal{I}, \tag{28}$$

$T_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I},$ *означено в* (7). *Тоді для всіх* $i(k) \in \mathcal{I},\ 1 \leq k \leq n,\ n \in \mathbb{N},$ *виконуються нерівності* $u^{(n)}_{i(k)} \geq \cos \alpha_{i(k)},\ v^{(n)}_{i(k)} \leq \sin \alpha_{i(k)}(1 - T_{i(k)}),$ *де* $u^{(n)}_{i(k)}$ *і* $v^{(n)}_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I},\ 1 \leq k \leq n,$ $n \in \mathbb{N},$ *означено у* (8).

Теорема 5. *Нехай існують додатні сталі* L *і* d *такі, що елементи ГЛД* (1) *задовольняють нерівності* (26) – (28) *для всіх* $i(k) \in \mathcal{I}$ *та* $j,\ 1 \leq j \leq i_k$. *Тоді ГЛД* (1) *збігається до значення* f *і для кожного* $n \geq 1$ *для похибки наближення його* n*-м підхідним дробом* f_n *справджується оцінка* (17).

3. Деякі застосування. Хоча результати п. 2 є цікавими у наведеному вигляді, мабуть, їхня найбільша цінність пов'язана з отриманням похибок наближень для ГЛД (1), елементи $a_{i(k)},\ i(k) \in \mathcal{I},$ яких є функціями однієї або багатьох комплексних змінних. Ілюстрацію цього використання покажемо на застосуванні до багатовимірних *S*-, *A*-дробів із нерівнозначними змінними. Зображення деяких аналітичних функцій багатьох змінних цими ГЛД можна знайти у роботах [7 – 10, 15, 17]. ГЛД вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(1)}z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i(2)}z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{c_{i(3)}z_{i_3}}{1} + \ldots, \tag{29}$$

де $c_{i(k)} > 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I},\ \mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, називають багатовимірним S-дробом із нерівнозначними змінними.

***Приклад* 1.** Нехай для заданого $L > 0$ послідовність $\{c_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ додатних чисел задовольняє нерівності $c_{i(1)} \leq L/2,\ 1 \leq i_1 \leq N,\ c_{i(k)} \leq L/(2i_{k-1})$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I},\ k \geq 2,$ і $g_n(\mathbf{z})$ — n-й підхідний дріб багатовимірного *S*-дробу з нерівнозначними змінними (29). Тоді для всіх $z_k = |z_k|e^{i\alpha},\ 1 \leq k \leq N,$ таких, що $|z_k| \leq (\sin 2\alpha)/\big(L|\cos 3\alpha|\big),\ 1 \leq k \leq N,$ і $\pi/4 < \alpha \leq \pi/3,$ існує $g(\mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} g_n(\mathbf{z})$ і

$$|g(\mathbf{z}) - g_n(\mathbf{z})| \leq C^{N-1}_{N+n} M^{n+1}/(d_0(M^2 + d)^{n/2}), \quad n \geq 1,$$

де d_0 і d означено у (20), $M = (\sin 2\alpha)/(2|\cos 3\alpha|)$.

Цей приклад випливає із наслідку 1, де $a_{i(k)} = c_{i(k)}z_{i_k},\ i(k) \in \mathcal{I},$ та $\alpha_k = \alpha,\ 1 \leq k \leq N.$

Багатовимірний A-дріб із нерівнозначними змінними — це ГЛД вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{N} \frac{p_{i(1)}z_{i_1}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{(-1)^{\delta_{i_1,i_2}} p_{i(2)}z_{i_1}z_{i_2}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{(-1)^{\delta_{i_2,i_3}} p_{i(3)}z_{i_2}z_{i_3}}{1} + \ldots, \tag{30}$$

де $p_{i(k)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I},\ \delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

***Приклад* 2.** Нехай для заданого $L > 0$ послідовність $\{p_{i(k)}\}_{i(k)\in\mathcal{I}}$ дійсних чисел задовольняє нерівності $0 < p_{i(1)} \leq (L/2)^{1/2}$, $1 \leq i_1 \leq N$, $-L/(2i_{k-1}) \leq (-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} < 0$ для всіх $i(k) \in \mathcal{I}$, $k \geq 2$, і $h_n(\mathbf{z})$ — n-й підхідний дріб багатовимірного A-дробу з нерівнозначними змінними (30). Тоді для всіх $z_k = |z_k|e^{i\alpha}$, $1 \leq k \leq N$, таких, що $|z_k| \leq \big(|\sin 2\alpha|/(L\cos 4\alpha)\big)^{1/2}$, $1 \leq k \leq N$, і $-\pi/2 < \alpha < -3\pi/8$, існує $h(\mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} h_n(\mathbf{z})$ і

$$|h(\mathbf{z}) - h_n(\mathbf{z})| \leq C_{N+n}^{N-1} M^{n+1/2}/(d_0(M^2+d)^{n/2}), \quad n \geq 1,$$

де d_0 і d означено в (20), $M = |\sin 2\alpha|/(2\cos 4\alpha)$.

Цей результат безпосередньо випливає із наслідку 3, де $a_{i(1)} = p_{i(1)} z_{i_1}$, $1 \leq i_1 \leq N$, $a_{i(k)} = (-1)^{\delta_{i_{k-1},i_k}} p_{i(k)} z_{i_{k-1}} z_{i_k}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $k \geq 2$, та $\alpha_k = \alpha$, $1 \leq k \leq N$.

Література

1. Т. М. Антонова, *Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Волин. мат. вісн., **6**, 5 – 11 (1999).
2. Т. М. Антонова, Д. І. Боднар, *Області збіжності гілястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України, **31**, 5 – 18 (2000).
3. Т. М. Антонова, С. М. Возна, *Про один аналог методу фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка”. Сер. фіз.-мат. науки, **871**, 5 – 12 (2017).
4. Т. М. Антонова, О. М. Сусь, *Про деякі послідовності множин рівномірної збіжності двовимірних неперервних дробів*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **58**, № 1, 47 – 56 (2015).
5. О. Є. Баран, *Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Карпат. мат. публ., **5**, № 1, 4 – 13 (2013).
6. Д. И. Боднар, *Ветвящиеся цепные дроби*, Наук. думка, Киев (1986).
7. Д. І. Боднар, Р. І. Дмитришин, *Багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди*, Укр. мат. журн., **71**, № 3, 325 – 339 (2019).
8. Р. І. Дмитришин, *Двовимірне узагальнення qd-алгоритму Рутисхаузера*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **56**, № 4, 6 – 11 (2013).
9. Р. І. Дмитришин, *Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними*, Укр. мат. журн., **66**, № 9, 1175 – 1184 (2014).
10. Р. І. Дмитришин, *Про розвинення деяких функцій у двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **53**, № 4, 28 – 34 (2010).
11. T. M. Antonova, M. V. Dmytryshyn, S. M. Vozna, *Some properties of approximants for branched continued fractions of the special form with positive and alternating-sign partial numerators*, Carpathian Math. Publ., **10**, № 1, 3 – 13 (2018).
12. I. B. Bilanyk, *A truncation error bound for some branched continued fractions of the special form*, Mat. Stud., **52**, № 2, 115 – 123 (2019).
13. I. B. Bilanyk, D. I. Bodnar, L. M. Byak, *Representation of a quotient of solutions of a four-term linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 1, 33 – 41 (2019).
14. R. I. Dmytryshyn, *Convergence of some branched continued fractions with independent variables*, Mat. Stud., **47**, № 2, 150 – 159 (2017).
15. R. I. Dmytryshyn, *Multidimensional regular C-fraction with independent variables corresponding to formal multiple power series*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1 – 18 (2019), doi:10.1017/prm.2019.2.
16. R. I. Dmytryshyn, *On some of convergence domains of multidimensional S-fractions with independent variables*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 1, 54 – 58 (2019).
17. R. I. Dmytryshyn, *The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series*, J. Approxim. Theory, **164**, № 12, 1520 – 1539 (2012).
18. W. B. Jones, W. J. Thron, *Continued fractions: analytic theory and applications*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass. (1980).

Одержано 27.01.20