УДК 517.946

А. В. Мартыненко (Луган. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
А. Ф. Тедеев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
В. Н. Шраменко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИСТОЧНИКОМ В СЛУЧАЕ МЕДЛЕННО СТРЕМЯЩЕЙСЯ К НУЛЮ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

We study the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with source and inhomogeneous density of the form

$$u_t = \operatorname{div}(\rho(x)u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p$$

in the case where initial function decreases slowly to zero as $|x| \to \infty$.

We establish conditions for the existence and nonexistence of a global-in-time solution, which substantially depend on the behavior of the initial data as $|x| \to \infty$. In the case of global solvability, we obtain an exact estimate of a solution for large times.

Для виродженого параболічного рівняння з джерелом та неоднорідною щільністю вигляду

$$u_t = \operatorname{div}(\rho(x)u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p$$

розглядається задача Коші з початковою функцією, що повільно спадає до нуля при $|x| \to \infty$.

Знайдено умови існування та неіснування розв’язку задачі Коші глобально в часі, які суттєво залежать від поведінки початкової функції при $|x| \to \infty$. У випадку існування глобального розв’язку отримано його точну оцінку при великих значеннях часу.

1. Введение. В настоящей работе изучается задача Коши следующего вида:

$$u_t = \operatorname{div}(\rho(x)u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T), \qquad T > 0, \quad N \geq 1,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

В случае $\rho(x) \equiv 1$, $m = 1$, $\lambda = 1$ задача рассматривалась в работе [1]. Было установлено, что при $p > p^* = 1 + \dfrac{2}{N}$ существуют начальные данные, при которых решение задачи существует глобально по времени, в то же время при $1 < p < p^*$ все ненулевые решения становятся неограниченными за конечное время („взрываются”). Число p^* называют критическим показателем.

В дальнейшем подобные результаты, называемые теоремами типа Фуджиты, переносились на уравнения более общего вида. В случае однородной плотности ($\rho(x) \equiv 1$) теоремы типа Фуджиты для уравнения пористой среды ($\lambda = 1$, $m > 1$) получены в [2–4], для уравнения неньютоновской фильтрации ($\lambda > 1$, $m = 1$) — в [5], а для уравнения с двойной нелинейностью ($\lambda > 1$, $m > 1$) — в [6, 7]. В работе [7] для задачи (1), (2) при $\rho(x) \equiv 1$ показатель Фуджиты имеет вид $p^* = m + \lambda - 1 + (\lambda+1)/N$, а условие на начальную функцию, дающее при $p > p^*$ существование глобального решения, заключается в том, что

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} < \delta \tag{3}$$

© А. В. МАРТЫНЕНКО, А. Ф. ТЕДЕЕВ, В. Н. ШРАМЕНКО, 2012

при некотором $q > Q = N(p - m - \lambda + 1)/(\lambda + 1)$ и достаточно малом δ.

Критический случай $p = p^*$ впервые был исследован в [8] для уравнения (1) при $\rho(x) \equiv \equiv 1$, $\lambda = 1$, $m = 1$. Как оказалось, в этом случае любое нетривиальное решение становится неограниченным за конечное время. Для уравнения с двойной нелинейностью такой результат получен в [6]. Подробное изложение основных результатов для случая $\rho(x) \equiv 1$ можно найти в монографии [3] и обзорных статьях [9, 10].

Уравнение (1) можно рассматривать как частный случай более общего уравнения с переменными коэффициентами вида

$$\rho_1(x)u_t = \operatorname{div}(\rho_2(x)u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + \rho_3(x)u^p. \tag{4}$$

Такие уравнения исследовались многими авторами. Разумеется, поведение решений такого уравнения существенно зависит от свойств функций $\rho_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, в частности от их поведения на бесконечности. Наиболее изученным здесь является случай степенного поведения коэффициентов, т. е. случай $\rho_i(x) \sim |x|^{l_i}$, $i = 1, 2, 3$, при $|x| \to \infty$. Ниже изложены некоторые основные результаты, касающиеся уравнения (4). При этом отметим, что изменения в конфигурации параметров l_i, $i = 1, 2, 3$, приводят к качественным изменениям свойств решений и требуют значительной модификации методов и подходов, используемых при изучении уравнения (4).

Исследованию уравнения (4) с $\rho_2(x) \equiv 1$, $\rho_3(x) \equiv 0$ (уравнение без источника) и вырождающейся на бесконечности функцией $\rho_1(x)$ посвящены работы [11 – 19]. Такое уравнение имеет ряд интересных свойств, нехарактерных для уравнений с $\rho_1(x) \equiv 1$. Например, если $\rho_1(x)$ достаточно сильно вырождается на бесконечности, то нарушается стабилизация к нулю решения при $t \to \infty$ и компактный носитель решения разрушается за конечное время.

Уравнение (4) при $\rho_1(x) \equiv 1$, $\rho_2(x) \equiv 1$ и $\rho_3(x) = |x|^l$ изучалось в работах [20 – 23]. Были установлены теоремы типа Фуджиты с критическим показателем

$$p^*(l) = m + \lambda - 1 + \frac{\lambda + 1 + l}{N}.$$

В работе [23] получены универсальные оценки взрывающегося решения вблизи времени обострения.

Случай $\rho_1(x) = |x|^{-l}$, $l \geq 0$, $\rho_2(x) \equiv 1$, $\rho_3(x) \equiv 1$ рассматривался в [24]. Были найдены условия несуществования глобальных по времени решений и получена универсальная оценка решения вблизи времени обострения.

Задача (4), (2) при $\rho_1(x) \equiv 1$, $\rho_2(x) = |x|^l$, $l \geq 0$, $\rho_3(x) \equiv 1$ и $u_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^N)$ изучена в работе [25]. В частности, было установлено, что для $l < \lambda + 1 < N$ и начальной функции, удовлетворяющей условию (3) с $Q = N(p - m - \lambda + 1)/(\lambda + 1 - l)$, критический показатель $p^*(l) = m + \lambda - 1 + (\lambda + 1 - l)/N$. Кроме того, при $p > p^*(l)$ имеют место оценки

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty, R^N \times (t/2,t)} \leq \gamma t^{-\frac{N}{N(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(x,\tau)dx \right)^{\frac{\lambda+1-l}{N(m+\lambda-2)+\lambda+1-l}},$$

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{R^N} u(x,\tau)dx \le \gamma \int\limits_{R^N} u_0(x)dx. \tag{5}$$

Аналогичный результат для задачи (4), (2) в случае $\rho_1(x) = \rho_3(x) = |x|^{-l}$, $l \ge 0$, $\rho_2(x) \equiv 1$ получен в [26]. Также отметим работу [27], в которой найден критический показатель для задачи (4), (2) при $\rho_1(x) = \rho_3(x) = |x|^{-l}$, $\rho_2(x) \equiv 1$ в случае $l < 0$, $\lambda = 1$.

При исследовании задачи (1), (2) с начальной функцией, неинтегрируемой глобально в R^N, возникает естественный вопрос: как поведение начальной функции на бесконечности влияет на условия глобальной разрешимости? Как оказалось, в этом случае критический показатель p^* существенно зависит от поведения начальной функции при $|x| \to \infty$. Так, в работе [28] рассматривалась задача (1), (2) при $\rho(x) \equiv 1$, $\lambda = 1$, $p > m > 1$ с $u_0(x) \sim |x|^{-\alpha}$ при больших x, $0 \le \alpha < N$. Такую начальную функцию называют медленно стремящейся к нулю (медленно убывающей). В этом случае $p^* = m + 2/\alpha$. Этот результат был обобщен на случай задачи (4), (2) при $\rho_1(x) = \rho_3(x) = |x|^{-l}$, $l \ge 0$, $\rho_2(x) \equiv 1$ в [29]. Аналогичный результат получен в [30] для задачи (4), (2) при $\rho_1(x) \equiv \rho_2(x) \equiv \rho_3(x) \equiv 1$, $m + \lambda - 2 < 0$ (случай быстрой диффузии).

Основной целью данной работы является нахождение условий существования и несуществования в целом по времени решений задачи (1), (2) в классе начальных функций, вообще говоря, не принадлежащих $L^1(\mathbb{R}^N)$. В случае существования решения в целом по времени мы получаем оценку решения, которая является точной при больших значениях t.

Для описания медленно убывающих функций $w(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ нам понадобится следующая норма:

$$[w]_\theta = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N} \sup_{R > r_\theta(|x_0|)} (R + |x_0|)^\alpha \left(\fint\limits_{B_R(x_0)} |w(x)|^\theta dx \right)^{1/\theta}, \tag{6}$$

где $\alpha \in (0, N)$, $\theta = \max\left\{1, \dfrac{lN}{\alpha(\lambda+1)}\right\}$, $r_\theta(a)$ — функция, заданная неявно уравнением

$$\frac{r_\theta^N}{(r_\theta + a)^{\alpha\theta}} = 1, \tag{7}$$

и использованы обозначения $\fint_E v(x)dx = \int_E v(x)dx \Big/ \int_E dx$, $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x - x_0| \le \le R\}$. Сразу отметим, что функция $r_\theta(a)$ определена и непрерывна при $a \ge 0$, кроме того, $r_\theta(a)$ строго возрастает и $r_\theta(0) = 1$.

Норма (6) характеризует поведение функции при $x \to \infty$. Примером функции, для которой $[w]_\theta < \infty$, является функция $w(x) \backsim |x|^{-\alpha}$ при больших x, $0 < \alpha < N$.

***Замечание* 1.** В работе [29] было показано, что норма $[\cdot]_\theta$ эквивалентна известной норме

$$|||w|||_\theta = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N} (1 + |x_0|)^\alpha \left(\fint\limits_{B_{d(|x_0|)}(x_0)} |w(x)|^\theta dx \right)^{1/\theta}, \qquad d(a) = (1+a)^{\frac{\alpha\theta}{N}}, \tag{8}$$

которая была введена для описания медленно убывающих начальных функций в [4]. Использование в данной работе нормы $[\cdot]_\theta$ мотивировано тем, что с технической точки зрения она лучше подходит для задачи (1), (2), чем норма $||| \cdot |||_\theta$.

Всюду далее предполагаем, что $1 < \lambda + 1 < N$, $m + \lambda - 2 > 0$, $p > m + \lambda - 1$, $\rho(x) = |x|^l$, $0 \le l < \lambda + 1$ и $u_0(x)$ — неотрицательная измеримая функция из $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Будем говорить, что $u(x,t)$ является обобщенным решением (или просто решением) задачи (1), (2) в $Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$, если

$$u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(Q_T) \cap C((0,T), L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)),$$

$$\rho u^{m-1}|Du|^{\lambda+1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q_T), \quad u \in L^p_{\mathrm{loc}}(Q_T),$$

$$u(x,t) \to u_0(x) \qquad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{в} \quad L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$$

и выполнено интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ -u\varphi_t + \rho u^{m-1}|Du|^{\lambda-1} Du D\varphi \right\} dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u^p \varphi dxdt$$

для произвольной пробной функции $\varphi(x,t) \in C^1_0(Q_T)$.

***Замечание* 2.** Если не оговорено противное, то всюду далее через γ, γ_1, $\gamma_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, которые зависят только от параметров задачи l, m, λ, p, N, α.

Сформулируем основные результаты данной статьи.

Теорема 1. *Пусть* $p > p^*_\alpha(l) = m + \lambda - 1 + (\lambda + 1 - l)/\alpha$ *и*

$$[u_0]_\theta + \|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \le \delta, \tag{9}$$

где $q > Q = \dfrac{N(p - m - \lambda + 1)}{\lambda + 1 - l} > 1$ *и* $\delta > 0$ — *достаточно малое число, зависящее только от параметров задачи* (1), (2).

Тогда задача (1), (2) *имеет глобальное по времени решение и для любого* $t \in (0;\infty)$ *справедлива оценка*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \le \gamma_1 t^{-\frac{N}{H_{l,\theta}}} \left(\gamma_2 + \left(t[u_0]_\theta^{m+\lambda-2}\right)^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}} \right)^{\frac{\lambda+1-l}{H_{l,\theta}}} [u_0]_\theta^{\frac{(\lambda+1-l)\theta}{H_{l,\theta}}}, \tag{10}$$

где

$$H_{l,\omega} = N(m + \lambda - 2) + (\lambda + 1 - l)\omega, \qquad G_\alpha = \alpha(m + \lambda - 2) + \lambda + 1 - l.$$

***Замечание* 3.** Очевидно, что при $t < C[u_0]_\theta^{-(m+\lambda-2)}$ оценка (10) имеет вид

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \le \gamma t^{-\frac{N}{H_{l,\theta}}} [u_0]_\theta^{\frac{(\lambda+1-l)\theta}{H_{l,\theta}}},$$

а при $t \ge C[u_0]_\theta^{-(m+\lambda-2)}$ —

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \le \gamma t^{-\frac{\alpha}{G_\alpha}} [u_0]_\theta^{\frac{\lambda+1-l}{G_\alpha}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $p < p^*_\alpha(l)$, $u(x,t)$ — *решение задачи* (1), (2) *и существует положительное число* $\widehat{C}$ *такое, что начальная функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию*

$$(R+|x_0|)^{\alpha(1-\theta)} \fint_{B_R(x_0)} u_0^{1-\theta}(x)dx \geq \widehat{C} \tag{11}$$

при некотором $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in (0,1)$ *и произвольном* $R > 0$.

Тогда $u(x,t)$ *„взрывается" за конечное время, т. е. найдутся такие* $0 < R_1 < \infty$ *и* $0 < T < \infty$, *что*

$$\int_{B_{R_1}(x_0)} u^{1-\theta}(x,t)dx \to \infty$$

при $t \to T$.

***Замечание* 4.** Поскольку при доказательстве основных результатов будут использоваться локальные энергетические оценки, модельность уравнения (1) не принципиальна.

***Замечание* 5.** При доказательстве основных результатов мы использовали подходы из [4, 18, 23, 26, 31].

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $B_j = \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x| \leq j\}$, $j \in N$ и $\{u_{0j}\}_{j=1}^\infty$ — последовательность функций таких, что $u_{0j} \in C_0^\infty(B_j)$, $u_{0j} \to u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ и $[u_{0j} - u_0]_\theta \to 0$ при $n \to \infty$.

Аппроксимируем задачу (1), (2) с помощью начально-краевых задач

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho u_j^{m-1}|Du_j|^{\lambda-1}Du_j) + u_j \min\{j, u_j^{p-1}\}, \tag{12}$$

$$u_j(x,t) = 0, \qquad x \in \partial B_j, \tag{13}$$

$$u_j(x,0) = u_{0,j}(x). \tag{14}$$

При любом j задача (12) – (14) глобально разрешима, причем ее решение непрерывно по Гельдеру (см. [32 – 34]). Таким образом, чтобы доказать теорему, необходимо получить не зависящую от j оценку (10) для решения u_j. Продолжив $u_j(x,t)$ нулем вне $B_j \times (0,\infty)$, мы тем самым определим $u_j(x,t)$ в $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$. Все дальнейшие рассуждения будут проводиться для задачи (12) – (14) при произвольном фиксированном j, поэтому для удобства будем обозначать u_j, u_{0j}, B_j через u, u_0, B соответственно.

Из результатов работы [25] следует справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение задачи* (12) – (14) *и существует такое* t_1, *что для любых* $t \in [0,t_1)$, $x \in B_{2R}(x_0)$ *выполнено неравенство*

$$\frac{|x|^l}{(2R)^{\lambda+1}} t u^{m+\lambda-2}(x,t) + t u^{p-1}(x,t) \leq 1. \tag{15}$$

Тогда для любых $t \in (0,t_1)$, $\omega \geq 1$

$$\|u(x,t)\|_{\infty,B_R(x_0)} \leq \gamma t^{-\frac{N}{H_{l,\omega}}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{B_{2R}(x_0)} u^\omega(x,\tau)dx \right)^{\frac{\lambda+1-l}{H_{l,\omega}}}. \tag{16}$$

Обозначим через $r_\theta(b,t)$ функцию, заданную неявно уравнением

$$\frac{r_\theta^N}{(r_\theta+b)^{\alpha\theta}} = \Gamma^{N-\alpha\theta} t^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}} + 1, \tag{17}$$

где $b \geq 0$, $\Gamma = C_*[u_0]_\theta^{\frac{m+\lambda-2}{G_\alpha}}$, C_* — достаточно большое число, зависящее от параметров задачи, которое будет выбрано ниже.

Очевидно, что функция $r_\theta(b,t)$ определена и непрерывна при $b \geq 0$, $t \geq 0$, кроме того, $r_\theta(b,0)$ совпадает с функцией $r_\theta(b)$, определяемой уравнением (7). Также легко заметить, что $r_\theta(b,t)$ возрастает по каждому из своих аргументов и для любых $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $R \in [0; 2r_\theta(|x_0|,t)]$

$$\frac{R^N}{(R+|x_0|)^{\alpha\theta}} \leq \gamma(\Gamma^{N-\alpha\theta} t^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}} + 1). \tag{18}$$

Введем обозначение

$$\langle u\rangle_{\theta,t} = \sup_{0<\tau<t}\ \sup_{x_0\in\mathbb{R}^N}\ \sup_{R>r_\theta(|x_0|,\tau)} (2R+|x_0|)^\alpha \left(\fint_{B_R(x_0)} u^\theta(x,\tau)dx \right)^{1/\theta},$$

тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\quad R \geq r_\theta(|x_0|,t)$

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{B_{2R}(x_0)} u^\theta(x,\tau)dx \leq \gamma \frac{R^N}{(R+|x_0|)^{\alpha\theta}} \langle u\rangle_{\theta,t}^\theta. \tag{19}$$

Пусть

$$\Omega(t) \equiv \sup_{0<\tau<t}\ \sup_{x_0\in\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{\tau(r_\theta(|x_0|,\tau)+|x_0|)^l}{r_\theta^{\lambda+1}(|x_0|,\tau)} \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{m+\lambda-2} \right\} + \sup_{0<\tau<t} \left\{ \tau \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{p-1} \right\}, \tag{20}$$

$$T = \sup\{t\colon \Omega(t) \leq 1\}.$$

Из непрерывности решения $u(x,t)$ следует, что $T > 0$.

Из леммы 1 и неравенства (19) получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи* (12)–(14), *тогда для любого $t \in (0,T)$ и $q \geq 1$ справедливы оценки*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \leq \gamma t^{-\frac{N}{H_{l,\theta}}} \left(\Gamma^{N-\alpha\theta} t^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}} + 1 \right)^{\frac{\lambda+1-l}{H_{l,\theta}}} \langle u\rangle_{\theta,t}^{\frac{(\lambda+1-l)\theta}{H_{l,\theta}}}, \tag{21}$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\mathbb{R}^N} \leq \gamma t^{-\frac{N}{H_{l,q}}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{\mathbb{R}^N} u^q(x,\tau)dx \right)^{\frac{\lambda+1-l}{H_{l,q}}}. \tag{22}$$

***Замечание* 6.** Напомним, что функция $u = u_j$ продолжена нулем вне $B_j \times (0,T)$, поэтому интеграл в правой части (22) конечен.

Лемма 3. *Пусть $u(x,\tau)$ — решение задачи (12)–(14) и $\theta=1$, тогда для любых $t\in(0,T)$, $x_0\in\mathbb{R}^N$, $R\geq r_1(|x_0|,t)$*

$$I\equiv\frac{1}{R}\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l u^{m-1}|Du|^\lambda\zeta^\lambda(x)dxd\tau\leq\gamma\frac{(R+|x_0|)^{\frac{l}{\lambda+1}}}{R}\times$$

$$\times\frac{R^N}{(R+|x_0|)^\alpha}t^{\frac{\lambda+1-l}{(\lambda+1)K_l}}\left(\Gamma^{N-\alpha}t^{\frac{N-\alpha}{G_\alpha}}+1\right)^{\frac{(m+\lambda-2)(\lambda+1-l)}{(\lambda+1)K_l}}\langle u\rangle_{1,t}^{1+\frac{(\lambda+1-l)(m+\lambda-2)}{(\lambda+1)K_l}},\qquad(23)$$

где $K_l=H_{l,1}$ и $\zeta(x)$ — дифференцируемая функция, такая, что $\zeta(x)=1$ при $x\in B_R(x_0)$, $\zeta(x)=0$ при $x\notin B_{2R}(x_0)$ и $|D\zeta|\leq\dfrac{1}{R}$.

Доказательство. Пусть $\kappa=\dfrac{2-m}{\lambda}$ и $\beta\in\left(\dfrac{N(m+\lambda-2)}{\lambda K_l};\ \dfrac{1}{\lambda}\right)$, тогда

$$I=\frac{1}{R}\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l u^{m-1}|Du|^\lambda\zeta^\lambda\tau^{\beta\frac{\lambda}{\lambda+1}}\tau^{-\beta\frac{\lambda}{\lambda+1}}u^{\kappa\frac{\lambda}{\lambda+1}}u^{-\kappa\frac{\lambda}{\lambda+1}}dxd\tau.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $(\lambda+1)/\lambda$ и $\lambda+1$, получаем

$$I\leq\frac{(R+|x_0|)^{\frac{l}{\lambda+1}}}{R}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l\tau^\beta u^{m-1-\kappa}|Du|^{\lambda+1}\zeta^{\lambda+1}dxd\tau\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\tau^{-\beta\lambda}u^{m+\kappa\lambda-1}dxd\tau\right)^{\frac{1}{\lambda+1}}=\frac{(R+|x_0|)^{\frac{l}{\lambda+1}}}{R}I_1^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}I_2^{\frac{1}{\lambda+1}}.\qquad(24)$$

Для того чтобы оценить I_1, умножим уравнение (12) на $\tau^\beta u^{1-\kappa}\zeta^{\lambda+1}$ и проинтегрируем по $B_{2R}(x_0)\times(0,t)$:

$$\frac{1}{2-\kappa}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}u^{2-\kappa}(x,t)t^\beta\zeta^{\lambda+1}(x)dx-\frac{\beta}{2-\kappa}\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2R}(x_0)}u^{2-\kappa}\tau^{\beta-1}\zeta^{\lambda+1}dxd\tau=$$

$$=-(1-\kappa)I_1-(\lambda+1)\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l u^{m-\kappa}\tau^\beta|Du|^{\lambda-1}DuD\zeta\zeta^\lambda dxd\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{B_{2R}(x_0)}\tau^\beta u^{p+1-\kappa}\zeta^{\lambda+1}dxd\tau.$$

Применяя неравенство Юнга с ε ко второму члену правой части, получаем

$$I_1 \le \gamma_1 \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^{2-\kappa}\tau^{\beta-1}dxd\tau +$$

$$+\gamma_1 \frac{(R+|x_0|)^l}{R^{\lambda+1}} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^{m+\lambda-\kappa}\tau^{\beta}dxd\tau + \gamma_1 \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} \tau^{\beta}u^{p+1-\kappa}dxd\tau \le$$

$$\le \gamma_1 \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^{2-\kappa}\tau^{\beta-1}dxd\tau + \right.$$

$$+\frac{(R+|x_0|)^l}{R^{\lambda+1}} \sup_{0<\tau<t} \tau \|u\|^{m+\lambda-2}_{\infty,B_{2R}} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^{2-\kappa}\tau^{\beta-1}dxd\tau +$$

$$\left. + \sup_{0<\tau<t} \tau \|u\|^{p-1}_{\infty,B_{2R}} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^{2-\kappa}\tau^{\beta-1}dxd\tau \right). \tag{25}$$

Поскольку при $t \in (0,T)$ $\Omega(t) \le 1$, то

$$I_1 \le 2\gamma_1 \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^{2-\kappa}\tau^{\beta-1}dxd\tau = 2\gamma_1 I_3.$$

Из того, что $R \ge r_1(|x_0|,t)$, $t \in (0,T)$, и оценки (21) получаем

$$I_3 \le \int\limits_0^t \tau^{\beta-1}\|u(\cdot,\tau)\|^{1-\kappa}_{\infty,B_{2R}(x_0)} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u(x,\tau)dxd\tau \le$$

$$\le \gamma_2 \int\limits_0^t \tau^{\beta-1}\tau^{-\frac{N(1-\kappa)}{K_l}}[\Gamma^{N-\alpha}\tau^{\frac{N-\alpha}{G_\alpha}}+1]^{\frac{(1-\kappa)(\lambda+1-l)}{K_l}} d\tau \langle u\rangle_{1,t}^{\frac{(\lambda+1-l)(1-\kappa)}{K_l}} \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u(x,\tau)dx.$$

Учитывая выбор параметров β, κ и используя (19), приходим к оценкам

$$I_1 \le \gamma_3 \frac{R^N}{(R+|x_0|)^\alpha} t^{\beta-\frac{N(1-\kappa)}{K_l}} \left[\Gamma^{N-\alpha}t^{\frac{N-\alpha}{G_\alpha}}+1\right]^{\frac{(1-\kappa)(\lambda+1-l)}{K_l}} \langle u\rangle_{1,t}^{1+\frac{(\lambda+1-l)(1-\kappa)}{K_l}}, \tag{26}$$

$$I_2 \le \gamma_4 \int\limits_0^t \tau^{-\beta\lambda} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} udxd\tau \le t^{1-\beta\lambda}\frac{R^N}{(R+|x_0|)^\alpha}\langle u\rangle_{1,t}. \tag{27}$$

Из (24) – (27) следует справедливость леммы.

Отметим, что для любых $x_0 \in \mathbb{R}^N,\ t \geq 0$ из того, что $R \geq r_\theta(|x_0|, t)$, следует

$$\frac{(R+|x_0|)^l}{R^{\lambda+1}} \leq \left(\frac{R}{R+|x_0|}\right)^{\frac{(\lambda+1)\alpha\theta - lN}{N-\alpha\theta}} \left[\Gamma^{N-\alpha\theta} t^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}} + 1\right]^{-\frac{\lambda+1-l}{N-\alpha\theta}},$$

а поскольку значение θ выбрано так, чтобы

$$\frac{(\lambda+1)\alpha\theta - lN}{N-\alpha\theta} \geq 0,$$

то

$$\frac{(R+|x_0|)^l}{R^{\lambda+1}} \leq [\Gamma^{N-\alpha\theta} t^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}} + 1]^{-\frac{\lambda+1-l}{N-\alpha\theta}}. \tag{28}$$

Лемма 4. *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи* (12)–(14), *тогда для любых $t \in [0,T)$*

$$\langle u\rangle_{\theta,t}^\theta \leq \widetilde{C}[u_0]_\theta^\theta + \gamma C_*^{-\kappa(\theta)\frac{G_\alpha(\lambda+1-l)\theta}{H_{l,\theta}}} \left[\frac{\langle u\rangle_{\theta,t}}{[u_0]_\theta}\right]^{\frac{(m+\lambda-2)(\lambda+1-l)\theta}{H_{l,\theta}}\kappa(\theta)} \langle u\rangle_{\theta,t}^\theta +$$

$$+\gamma \int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{p-1} d\tau \langle u\rangle_{\theta,t}^\theta, \tag{29}$$

где постоянная $\widetilde{C}$ зависит лишь от параметров задачи, а $\kappa(\theta) = 1$ при $\theta > 1$ и $\kappa(\theta) = 1/(\lambda+1)$ при $\theta = 1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\theta = 1$. Пусть $R \geq r_1(|x_0|, t)$ и $\zeta(x)$ — функция из условия леммы 3. Умножим уравнение на $\zeta^{\lambda+1}(x)$ и проинтегрируем по $B_{2R}(x_0) \times (0,t)$ при $t \in (0,T)$:

$$\int_{B_R(x_0)} u(x,t)dx \leq \int_{B_{2R}(x_0)} u_0(x)dx + \frac{\gamma}{R}\int_0^t \int_{B_{2R}(x_0)} |x|^l u^{m-1}|Du|^\lambda \zeta^\lambda dxd\tau + \int_0^t \int_{B_{2R}(x_0)} u^p dxd\tau.$$

Умножим полученное неравенство на $(2R+|x_0|)^\alpha / \int_{B_{2R}(x_0)} dx$ и применим (23) ко второму слагаемому в правой части, тогда

$$(R+|x_0|)^\alpha \fint_{B_R(x_0)} u(x,t)dx \leq \widetilde{C}(2R+|x_0|)^\alpha \fint_{B_{2R}(x_0)} u_0 +$$

$$+\gamma \left(\frac{(R+|x_0|)^l}{R^{\lambda+1}}\right)^{\frac{1}{\lambda+1}} t^{\frac{\lambda+1-l}{(\lambda+1)K_l}} \left[\Gamma^{N-\alpha} t^{\frac{N-\alpha}{G_\alpha}} + 1\right]^{\frac{(m+\lambda-2)(\lambda+1-l)}{(\lambda+1)K_l}} \langle u\rangle_{1,t}^{1+\frac{(\lambda+1-l)(m+\lambda-2)}{(\lambda+1)K_l}} +$$

$$+\gamma \int_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{p-1} d\tau \sup_{0<\tau<t} (2R+|x_0|)^\alpha \fint_{B_{2R}(x_0)} udx.$$

Используя (28) во втором слагаемом справа, получаем (29) при $\theta = 1$.

Теперь рассмотрим случай $\theta > 1$. Пусть $R \geq r_\theta(|x_0|, t)$. Умножим уравнение (12) на $u^{\theta-1}\zeta^{\lambda+1}$ и проинтегрируем по $B_{2R}(x_0) \times (0, t)$ при $t \in (0, T)$:

$$\frac{1}{\theta} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^\theta(x,t)dx - \frac{1}{\theta} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u_0^\theta(x,t)dx \leq$$

$$\leq -(\theta-1) \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} |x|^l u^{m-1} |Du|^{\lambda+1} u^{\theta-2} \zeta^{\lambda+1} dx d\tau +$$

$$+ \frac{\lambda+1}{R} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} |x|^l u^{m+\theta-2} |Du|^\lambda \zeta^\lambda dx d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^p u^{\theta-1} \zeta^{\lambda+1} dx d\tau = -I_1 + I_2 + I_3. \tag{30}$$

Оценим I_2 с помощью неравенства Юнга:

$$I_2 \leq \varepsilon I_1 + \frac{\gamma(\varepsilon)}{R^{\lambda+1}} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2R}(x_0)} |x|^l u^{m+\theta+\lambda-2} dx d\tau \leq$$

$$\leq \varepsilon I_1 + \gamma(\varepsilon) \frac{(R+|x_0|)^l}{R^{\lambda+1}} \int\limits_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{m+\lambda-2} d\tau \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^\theta dx. \tag{31}$$

Используя (28) и (21), из (30) и (31) находим

$$\int\limits_{B_R(x_0)} u^\theta(x,t)dx \leq \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u_0^\theta(x)dx + \gamma t^{1-\frac{N(m+\lambda-2)}{H_{l,\theta}}} \times$$

$$\times \left[\Gamma^{N-\alpha\theta} t^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}} + 1\right]^{-\frac{\lambda+1-l}{N-\alpha\theta} + \frac{(\lambda+1-l)(m+\lambda-2)}{H_{l,\theta}}} \langle u \rangle_{\theta,t}^{\frac{(\lambda+1-l)(m+\lambda-2)\theta}{H_{l,\theta}}} \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^\theta dx +$$

$$+ \gamma \int\limits_0^t \|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{p-1} d\tau \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^\theta dx.$$

Умножая обе части этого неравенства на $(2R+|x_0|)^\alpha \Big/ \int_{B_{2R}(x_0)} dx$, получаем (29) при $\theta > 1$.

Лемма 4 доказана.

Введем обозначения

$$\mu(t)=\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N}u^q(x,\tau)dx,\qquad \mu_0=\int\limits_{\mathbb{R}^N}u_0^q(x)dx,$$

$$T_\mu=\sup\{t\colon \mu(t)\le 2\mu_0\},\qquad T_{\langle\rangle}=\sup\{t\colon \langle u\rangle_{t,\theta}^\theta\le 2\widetilde{C}[u_0]_\theta^\theta\},$$

где $\widetilde{C}$ — постоянная из условия леммы 4.

Лемма 5. *Пусть* $q>Q>1$ *и выполнено* (9) *с достаточно малым* δ, *тогда*

$$\min\{T_\mu,T\}>1.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1) $T_\mu<T$. Предположим, что $T_\mu\le 1$, тогда, умножая уравнение (12) на u^{q-1} и интегрируя по $\mathbb{R}^N\times(0,T_\mu)$, получаем

$$\mu(T_\mu)\le\mu_0+\gamma\mu(T_\mu)\int\limits_0^{T_\mu}\|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{p-1}d\tau. \tag{32}$$

Используя оценку (22), приходим к неравенству

$$\int\limits_0^{T_\mu}\|u(\cdot,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N}^{p-1}d\tau\le\gamma_1T_\mu^{1-\frac{(p-1)N}{H_{l,q}}}\mu(T_\mu)^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}}\le\gamma_2T_\mu^{1-\frac{(p-1)N}{H_{l,q}}}\mu_0^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}}. \tag{33}$$

Из (32) и (33), учитывая, что $q>Q$, при достаточно малом δ получаем

$$\mu(T_\mu)\le\mu_0+\gamma_3\delta^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}}\mu(T_\mu)\le\mu_0+\frac{1}{3}\mu(T_\mu). \tag{34}$$

Таким образом,

$$\mu(T_\mu)\le\frac{3}{2}\mu_0,$$

что противоречит определению T_μ. Значит, $T_\mu>1$.

2) $T\le T_\mu$. Используя оценки (22) и (28), получаем

$$\Omega(t)\le\gamma\sup_{0<\tau<T}\left\{\tau^{1-\frac{(m+\lambda-2)N}{H_{l,q}}}\mu(\tau)^{\frac{(\lambda+1-l)(m+\lambda-2)}{H_{l,q}}}\right\}+\gamma\sup_{0<\tau<T}\left\{\tau^{1-\frac{(p-1)N}{H_{l,q}}}\mu(\tau)^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}}\right\}.$$

Поскольку $q>Q$ и T, очевидно, предполагается меньшим 1, при достаточно малом δ приходим к неравенству

$$\Omega(T)\le\gamma_1\mu_0^{\frac{(\lambda+1-l)(m+\lambda-2)}{H_{l,q}}}+\gamma_2\mu_0^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}}<\frac{1}{2},$$

что противоречит определению T, если $T<\infty$. Значит, $T>1$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $q>Q,\ p>p_\alpha^*(l)$ *и выполнено* (9) *с достаточно малым* δ. *Тогда* $T_{\langle\rangle}\ge T$.

Доказательство. Предположим, что $T_{\langle\rangle} < T$, тогда

$$\frac{\langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}}}{[u_0]^{\theta}_{\theta}} \le 2\widetilde{C}.$$

Выбирая C_* достаточно большим, из (29) получаем

$$\langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}} \le \widetilde{C}[u_0]^{\theta}_{\theta} + \frac{1}{6}\widetilde{C}\langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}} + \gamma\int\limits_0^{T_{\langle\rangle}} \|u(\cdot,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\mathbb{R}^N} d\tau \langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}}. \qquad (35)$$

Если $T_{\langle\rangle} \le 1$, то из условия $q > Q$, оценки (22) и того, что $T > 1$, имеем

$$\int\limits_0^{T_{\langle\rangle}} \|u(\cdot,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\mathbb{R}^N} d\tau \le \gamma_1 \int\limits_0^1 \tau^{-\frac{N(p-1)}{H_{l,q}}} d\tau \mu(1)^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}} \le \gamma_2 \delta^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}}. \qquad (36)$$

Если $T_{\langle\rangle} > 1$, то

$$\int\limits_0^{T_{\langle\rangle}} \|u(\cdot,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\mathbb{R}^N} d\tau = \int\limits_0^1 \|u(\cdot,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\mathbb{R}^N} d\tau + \int\limits_1^{T_{\langle\rangle}} \|u(\cdot,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\mathbb{R}^N} d\tau \le$$

$$\le \gamma_3 \delta^{\frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{H_{l,q}}} + \int\limits_1^{T_{\langle\rangle}} \|u(\cdot,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\mathbb{R}^N} d\tau. \qquad (37)$$

При $p > p^*_{\alpha}(l)$ из оценки (21) следует

$$\int\limits_1^{T_{\langle\rangle}} \|u(\cdot,\tau)\|^{p-1}_{\infty,\mathbb{R}^N} d\tau \le$$

$$\le \gamma_4 \int\limits_1^{T_{\langle\rangle}} \tau^{-\frac{N(p-1)}{H_{l,\theta}}} \max\left\{\Gamma^{\frac{(N-\alpha\theta)(\lambda+1-l)}{H_{l,\theta}}} \tau^{\frac{(N-\alpha\theta)(\lambda+1-l)}{G_{\alpha}H_{l,\theta}}},\ 1\right\}^{p-1} d\tau \langle u\rangle_{\theta,T_{\langle\rangle}}^{\frac{(\lambda+1-l)\theta(p-1)}{H_{l,\theta}}} \le$$

$$\le \gamma_5 \int\limits_1^{T_{\langle\rangle}} \tau^{-\frac{\alpha(p-1)}{G_{\alpha}}} d\tau \max\left\{\Gamma^{\frac{(N-\alpha\theta)(\lambda+1-l)(p-1)}{H_{l,\theta}}},\ 1\right\} [u_0]_{\theta}^{\frac{(\lambda+1-l)\theta(p-1)}{H_{l,\theta}}} \le$$

$$\le \gamma_6 \max\left\{\left(C_* \delta^{\frac{m+\lambda-2}{G_{\alpha}}}\right)^{\frac{(N-\alpha\theta)(\lambda+1-l)(p-1)}{H_{l,\theta}}},\ 1\right\} \delta^{\frac{(\lambda+1-l)\theta(p-1)}{H_{l,\theta}}}. \qquad (38)$$

Выбирая δ достаточно малым, из (35) – (38) получаем

$$\langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}} \le \widetilde{C}[u_0]^{\theta}_{\theta} + \frac{1}{6}\widetilde{C}\langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}} + \frac{1}{6}\widetilde{C}\langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}},$$

т. е.

$$\langle u\rangle^{\theta}_{\theta,T_{\langle\rangle}} \leq \frac{3}{2}\widetilde{C}[u_0]^{\theta}_{\theta},$$

что противоречит определению $T_{\langle\rangle}$. Значит, $T_{\langle\rangle} \geq T$.

Лемма 6 доказана.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $T = \infty$ при $p > p^*_\alpha(l)$. Пусть это не так, тогда, используя (21) и (28) для первого слагаемого $\Omega(t)$ и (21), (22) для второго слагаемого, получаем

$$\Omega(T) \leq \gamma \sup_{0<\tau<T}\left\{\tau^{\frac{\theta(\lambda+1-l)}{H_{l,\theta}}}\left(\Gamma^{N-\alpha\theta}\tau^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}}+1\right)^{-\frac{(\lambda+1-l)\theta G_\alpha}{(N-\alpha\theta)H_{l,\theta}}}\right\}[u_0]_\theta^{\frac{(\lambda+1-l)\theta(m+\lambda-2)}{H_{l,\theta}}}+$$

$$+\gamma\sup_{0<\tau<1}\left\{\tau^{1-\frac{N(p-1)}{H_{l,q}}}\right\}\mu_0^{\frac{(\lambda+1-l)(p-1)}{H_{l,q}}}+$$

$$+\gamma\sup_{1<\tau<T}\left\{\tau^{1-\frac{N(p-1)}{H_{l,\theta}}}\left(\Gamma^{N-\alpha\theta}\tau^{\frac{N-\alpha\theta}{G_\alpha}}+1\right)^{\frac{(\lambda+1-l)(p-1)}{H_{l,\theta}}}\right\}[u_0]^{\frac{(\lambda+1-l)(p-1)\theta}{H_{l,\theta}}}\leq$$

$$\leq \gamma_1 C_*^{-\frac{\theta(\lambda+1-l)G_\alpha}{H_{l,\theta}}}+\gamma\mu_0^{\frac{(\lambda+1-l)(p-1)}{H_{l,q}}}+\gamma[\Gamma^{N-\alpha\theta}+1]^{\frac{(\lambda+1-l)(p-1)}{H_{l,\theta}}}[u_0]_\theta^{\frac{(\lambda+1-l)\theta(p-1)}{H_{l,\theta}}}.$$

Выбирая C_* достаточно большим, а δ достаточно малым, получаем $\Omega(T) \leq \dfrac{1}{2}$, что невозможно при конечном T.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция, такая, что $\zeta(x) = 1$ при $x \in B_R(x_0)$, $\zeta(x) = 0$ при $x \notin B_{2R}(x_0)$ и $|D\zeta| < \gamma R^{-1}$. Пусть $\varepsilon, s > 0$, тогда, умножая обе части уравнения (12) на $(u+\varepsilon)^{-\theta}\zeta^s$ и интегрируя в $B_{2R}(x_0)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}(u(x,t)+\varepsilon)^{1-\theta}\zeta^s dx \geq \gamma_1\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l u^{m-1}|Du|^{\lambda+1}(u+\varepsilon)^{-(1+\theta)}\zeta^s dx-$$

$$-\gamma_2\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l u^{m-1}|Du|^{\lambda}(u+\varepsilon)^{-\theta}\zeta^{s-1}|D\zeta|dx+\gamma_3\int\limits_{B_{2R}(x_0)}u^p(u+\varepsilon)^{-\theta}\zeta^s dx.$$

Применяя ко второму слагаемому правой части неравенство Юнга с достаточно малым ν и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}u^{1-\theta}\zeta^s dx \geq \gamma_4(\nu)\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l u^{m-\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\zeta^s dx-$$

$$-\frac{\gamma_5(\nu)}{R^{\lambda+1}}\int\limits_{B_{2R}(x_0)}|x|^l u^{m+\lambda-\theta-1}\zeta^{s-\lambda-1}dx+\gamma_3\int\limits_{B_{2R}(x_0)}u^{p-\theta}\zeta^s dx = I_1 - I_2 + I_3. \tag{39}$$

Снова применяя неравенство Юнга с достаточно малым $\nu > 0$ и выбирая

$$s > \frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1},$$

находим

$$I_2 \le \nu I_3 + \gamma_6(\nu) R^{N-\frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}} (R+|x_0|)^{\frac{l(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}}.$$

Обозначим $E = E(t) = \displaystyle\int_{B_{2R}(x_0)} u^{1-\theta}(x,t)dx$. Тогда, выбирая достаточно малое ν, из (39) получаем

$$\frac{d}{dt}E \ge \gamma_8 I_3 - \gamma_7 R^{N-\frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}} (R+|x_0|)^{\frac{l(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}}. \tag{40}$$

Применяя в E неравенство Гельдера, находим

$$E \le \gamma_9 I_3^{\frac{1-\theta}{p-\theta}} R^{\frac{N(p-1)}{p-\theta}},$$

следовательно,

$$I_3 \ge \gamma_{10} E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} R^{-\frac{N(p-1)}{1-\theta}}.$$

Таким образом, из (40) получаем неравенство для E :

$$\frac{d}{dt}E \ge \gamma_{11} E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} R^{-\frac{N(p-1)}{1-\theta}} - \gamma_7 R^{N-\frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}} (R+|x_0|)^{\frac{l(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}}. \tag{41}$$

Покажем, что существует положительное $R_1 < \infty$ такое, что для любых $t \ge 0,\ R \ge R_1$

$$C\, E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} R^{-\frac{N(p-1)}{1-\theta}} \ge R^{N-\frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}} (R+|x_0|)^{\frac{l(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}}, \tag{42}$$

где $C = \mathrm{const} > 0$ — достаточно малое число.

Действительно, (42) равносильно неравенству

$$C\left(R^{\alpha(1-\theta)} - \!\!\!\!\!\!\int\limits_{B_{2R}(x_0)} u^{1-\theta}(x,t)dx\right)^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} \ge$$

$$\ge \gamma_{12}\left(\frac{R^{\alpha(1-\theta)}}{R^N}\right)^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} R^{\frac{N(p-1)}{1-\theta}+N-\frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}} (R+|x_0|)^{\frac{l(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}} =$$

$$= \gamma_{12}\left(R^{\alpha-\frac{\lambda+1}{p-m-\lambda+1}} (R+|x_0|)^{\frac{l}{p-m-\lambda+1}}\right)^{p-\theta},$$

правая часть которого убывает по R при $p < p_\alpha^*(l)$. Значит, в силу условия (11) найдется такое достаточно большое $R_1 > 0$, что (42) выполнено при $t = 0$ и $R \ge R_1$ со сколь угодно малой C. Но тогда из (41), (42) следует, что $E(t)$ — возрастающая функция и, следовательно, (42) выполнено при всех $t \ge 0,\ R \ge R_1$.

Таким образом, из (41), (42) следует

$$\frac{d}{dt}E(t) \geq \gamma E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} R^{-\frac{N(p-1)}{1-\theta}}.$$

Интегрируя это неравенство по интервалу $(0, t)$, получаем

$$E(t) \geq \frac{E(0)}{\left[1 - \gamma E(0)^{\frac{p-1}{1-\theta}} R^{-\frac{N(p-1)}{1-\theta}} t\right]^{\frac{1-\theta}{p-1}}},$$

откуда следует, что $E(t) \to \infty$ при $t \to T = 1\Big/\left(\gamma E(0)^{\frac{p-1}{1-\theta}} R^{-\frac{N(p-1)}{1-\theta}}\right)$.

1. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I. – 1966. – **13**. – P. 109 – 124.
2. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u)u + u^\beta$ // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 6. – С. 1362 – 1364.
3. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987.
4. *Andreucci D., Di Benedetto E.* On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources equations // Ann. sci. norm. super. Pisa. – 1991. – **18**. – P. 363 – 441.
5. *Галактионов В. А.* Об условиях отсутствия глобальных решений одного класса квазилинейных параболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1982. – **22**, № 2. – С. 322 – 338.
6. *Galaktionov V. A., Levine H. A.* A general approach to critical Fujita exponents and systems // Nonlinear Anal. – 1998. – **34**. – P. 1005 – 1027.
7. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543 – 567.
8. *Hayakawa K.* On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations // Proc. Jap. Acad. Ser. A. Math. Sci. – 1973. – **49**. – P. 503 – 505.
9. *Levine H. A.* The role of critical exponents in blow up theorems // SIAM Rev. – 1990. – **32**. – P. 262 – 288.
10. *Deng K., Levine H. A.* The role of critical exponents in blow up theorems: The sequel // J. Math. Anal. and Appl. – 2000. – **243**. – P. 85 – 126.
11. *Kamin S., Rosenau P.* Nonlinear diffusion in a finite mass medium // Communs Pure and Appl. Math. – 1982. – **35**. – P. 113 – 127.
12. *Kamin S., P. Rosenau P.* Propagation of thermal waves in an inhomogeneous medium // Communs Pure and Appl. Math. – 1981. – **34**. – P. 831 – 852.
13. *Kamin S., Kersner R.* Disappearence of interfaces in finite time // Meccanica. – 1993. – **28**. – P. 117 – 120.
14. *Guedda M., Hilhorst D., Peletier M. A.* Disappearing interfaces in nonlinear diffusion // Adv. Math. Sci. and Appl. – 1997. – **7**. – P. 695 – 710.
15. *Galaktionov V. A., King J. R.* On the behaviour of blow-up interfaces for an inhomogeneous filtration equation // J. Appl. Math. – 1996. – **57**. – P. 53 – 77.
16. *Kersner R., G. Reyes G., Tesei A.* On a class of nonlinear parabolic equations with variable density and absortion // Adv. Different. Equat. – 2002. – **7**, № 2. – P. 155 – 176.
17. *Galaktionov V. A., Kamin S., Kersner R., Vazquez J. L.* Intermidiate asymptotics for inhomogeneous nonlinear heat conduction // J. Math. Sci. – 2004. – **120**, № 3. – P. 1277 – 1294.
18. *Тедеев А. Ф.* Условия существования и несуществования в целом по времени компактного носителя решений задачи Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 1. – С. 189 – 200.
19. *Tedeev A. F.* The interface blow-up phenomenon and local estimates for doubly degenerate parabolic equations // Appl. Anal. – 2007. – **86**, № 6. – P. 755 – 782.

20. *Qi Y. W.* The critical exponents of parabolic equations and blow-up in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Roy. Soc. Edinburg A. – 1998. – **128**. – P. 123 – 136.
21. *Qi Y. W., Wang M. X.* Critical exponents of quasilinear parabolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2002. – **267**. – P. 264 – 280.
22. *Liu X., Wang M.* The critical exponent of doubly singular parabolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2001. – **257**. – P. 170 – 188.
23. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, № 1. – P. 89 – 120.
24. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 2. – С. 245 – 255.
25. *Cianci P., Martynenko A. V., Tedeev A. F.* The blow-up phenomenon for degenerate parabolic equations with variable coefficient and nonlinear source // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. – 2010. – **73**, № 7. – P. 2310 – 2323.
26. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф.* О поведении решений задачи Коши для вырождающегося параболического уравнения с неоднородной плотностью и источником // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2008. – **48**, № 7. – С. 1214 – 1229.
27. *Wang C., Zheng S.* Critical Fujita exponents of degenerate and singular parabolic equations coefficient and nonlinear source // Proc. Roy. Soc. Edinburg A. – 2006. – **136**. – P. 415 – 430.
28. *Mukai K., Mochuzuki K., Huang Q.* Large time behavior and life span for a quasilinear parabolic equation with slow decay initial values // Nonlinear Anal. – 2000. – **39A**, № 1. – P. 33 – 45.
29. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф., Шраменко В. Н.* Задача Коши для вырождающегося параболического уравнения с неоднородной плотностью и источником в классе медленно стремящихся к нулю начальных функций // Изв. РАН. Сер. мат. – 2012. – **76**, № 3. – С. 139 – 156.
30. *Афанасьева Н. В., Тедеев А. Ф.* Теоремы типа Фуджиты для квазилинейных параболических уравнений в случае медленно стремящихся к нулю начальных данных // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 4. – С. 3 – 22.
31. *Andreucci D.* Degenerate parabolic equations with initial data measures // Trans. Amer. Math. Soc. – 1997. – **340**, № 10. – P. 3911 – 3923 .
32. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – **279**. – P. 373 – 394.
33. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**. – S. 311 – 341.
34. *Мартыненко А. В., Тедеев А. Ф.* Регулярность решений вырождающихся параболических уравнений с неоднородной плотностью // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**, № 1. – С. 116 – 145.

Получено 27.02.12