УДК 517.925

І. І. Король (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We study the problems of the existence of periodic solutions of two-dimensional linear inhomogeneous periodic systems of differential equations whose corresponding homogeneous system possesses the Hamiltonian properties. We suggest a new numerical-analytic algorithm that enables one to investigate the existence and to construct periodic solutions of two-dimensional nonlinear differential systems with the Hamiltonian linear part. The results obtained are generalized to systems of higher orders.

Вивчаються питання існування періодичних розв'язків двовимірних лінійних неоднорідних періодичних систем диференціальних рівнянь, у яких відповідна однорідна система є гамільтоновою. Запропоновано новий чисельно-аналітичний алгоритм дослідження існування і побудови періодичних розв'язків двовимірних нелінійних диференціальних систем із гамільтоновою лінійною частиною. Одержані результати узагальнено на системи вищих порядків.

Аналіз різноманітних процесів у механіці, фізиці, біології, небесній механіці та інших галузях науки і техніки приводить до необхідності вивчення періодичних розв'язків різних типів диференціальних рівнянь та їх систем. Зокрема, велику кількість робіт присвячено питанням існування та побудови періодичних розв'язків, розроблено широкий спектр засобів для їх дослідження [1 – 4]. Серед них можна виділити чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень [5, 6], ідею якого згодом було перенесено на широкий клас задач [7 – 10].

Дана стаття є продовженням досліджень з даної тематики. У ній розглядаються періодичні розв'язки лінійних неоднорідних систем, а також для систем диференціальних рівнянь другого порядку, лінійна частина яких гамільтонова, на базі чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка розроблено новий алгоритм дослідження періодичних розв'язків.

1. Лінійні двовимірні системи. Розглянемо лінійну неоднорідну двовимірну ω-періодичну систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t), \tag{1}$$

коли відповідна однорідна система є гамільтоновою:

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & p(t) \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$x,\ f \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R},\ f(t),\ p(t)$ — неперервні ω-періодичні функції.

Відомо [11, с. 77], що розв'язок системи (1), який при $t = 0$ проходить через точку $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, має вигляд

$$x(t) = X(t)\xi + \int_0^t X(t,s)\, f(s)\,ds,$$

де $X(t)$ — матрицант відповідної (1) однорідної системи,

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(0,t) & \sin\varphi(0,t) \\ -\sin\varphi(0,t) & \cos\varphi(0,t) \end{pmatrix},$$

$$X(t,s) = X(t)X^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(s,t) & \sin\varphi(s,t) \\ -\sin\varphi(s,t) & \cos\varphi(s,t) \end{pmatrix},$$

$$\varphi(s,t) = \int_s^t p(\tau)d\tau.$$

Оскільки $p(t)$ — неперервна ω-періодична функція, то можемо записати її у вигляді

$$p(t) = p_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos\left(\frac{2\pi j}{\omega}t\right) + b_j\sin\left(\frac{2\pi j}{\omega}t\right)\right),$$

де

$$p_0 = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} p(s)ds, \quad a_j = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} p(s)\cos\left(\frac{2\pi js}{\omega}\right)ds, \quad b_j = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} p(s)\sin\left(\frac{2\pi js}{\omega}\right)ds.$$

Розглянемо питання існування ω-періодичних розв'язків системи (1).

Лема 1. 1. *Якщо* $p(t)$ *таке, що*

$$\int_0^{\omega} p(t)dt \neq 2\pi l, \tag{3}$$

де l — *ціле число, то існує єдиний* ω-*періодичний розв'язок системи* (1).

2. *У резонансному випадку, тобто якщо*

$$\int_0^{\omega} p(t)dt = 2\pi l, \tag{4}$$

система (1) *має* ω-*періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли*

$$\int_0^{\omega} X^{-1}(s)f(s)ds = 0. \tag{5}$$

При цьому для довільної точки $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ *існує* ω-*періодичний розв'язок системи* (1) *з початковою умовою* $x(0) = \xi$.

Доведення. Якщо умову (3) виконано, то мультиплікатори системи (1) відмінні від одиниці. Згідно з теоремою 23.1 [11] система (1) при цьому має єдиний ω-періодичний розв'язок вигляду

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

де $G(t,\tau)$ — функція Гріна,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} X(t)(E - X(\omega))^{-1}X^{-1}(\tau), & 0 \le \tau \le t \le \omega, \\ X(t+\omega)(E - X(\omega))^{-1}X^{-1}(\tau), & 0 \le t < \tau \le \omega. \end{cases}$$

Якщо виконується умова (4), то, враховуючи, що система (1) є самоспряженою, твердження леми безпосередньо випливає з теореми 23.2 [11].

Лема 2. *Нехай для системи* (1) *виконується умова* (4). *Тоді завжди існує* ω-*періодична функція* $\theta(t)$ *така, що система*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) - \theta(t) \tag{6}$$

має двопараметричну сім'ю ω-*періодичних розв'язків.*

Доведення. Умова ортогональності (5) для системи (6) запишеться так:

$$\int_0^\omega X^{-1}(s)\big(f(s)-\theta(s)\big)ds = 0. \tag{7}$$

Будемо шукати $\theta(t)$ у вигляді

$$\theta(t) = X(t)\mu, \tag{8}$$

де μ — деякий сталий двовимірний вектор.

Очевидно, що єдиним розв'язком рівняння (7) є

$$\mu_0 = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Отже, згідно з лемою 1 система (6), (8) при $\mu = \mu_0$ має ω-періодичні розв'язки, які утворюють двопараметричну сім'ю.

Лема 3. *Нехай послідовність неперервних при $t \in [0, \omega]$ функцій $r_m(t)$ задається рекурентним співвідношенням*

$$r_m(t) = \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t r_{m-1}^2(s)ds} + \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega r_{m-1}^2(s)ds}, \tag{9}$$

$$r_0(t) = 1, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Тоді при всіх цілих $m \geq 2$, $t \in [0, \omega]$ виконуються оцінки

$$r_m(t) \leq q^{m-1} r_1(t), \qquad q = \sqrt{\frac{2}{15}}\,\omega. \tag{10}$$

Доведення. Згідно з (9) отримуємо

$$r_1(t) = \frac{2t(\omega-t)}{\omega},$$

$$r_2(t) = \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t r_1^2(s)ds} + \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega r_1^2(s)ds} = r_1(t)h(t),$$

де

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{30}\,\omega}\left\{\sqrt{6t^4-15\omega t^3+10\omega t^2} + \sqrt{6t^4-9\omega t^3+\omega^2t^2+\omega^3 t+\omega^4}\right\}.$$

Оскільки

$$\max_{t\in[0,\omega]} h(t) = h\left(\frac{\omega}{2}\right) = q,$$

то $r_2(t) \leq q r_1(t)$. За індукцією можемо встановити, що оцінка (10) виконується при всіх $m \geq 2$.

Лему доведено.

2. Періодичні розв'язки нелінійних двовимірних систем. Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + g(t,x), \tag{11}$$

де $P(t)$ — матриця вигляду (2), для якої виконується рівність (4).

Припустимо, що в області

$$(t,x) \in \Omega = \mathbb{R} \times D, \qquad D = \{x \mid 0 \leq r \leq \|x\| \leq R\},$$

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2},$$

система (11) задовольняє наступні умови:

функція $g(t, x)$ є визначеною, неперервною, ω-періодичною по t і

$$\sup_{(t,x)\in\Omega} \| g(t, x) \| = M; \tag{12}$$

існує невід'ємна стала K така, що при всіх (t, x'), $(t, x'') \in \Omega$

$$\| g(t, x') - g(t, x'') \| \le K \| x' - x'' \|; \tag{13}$$

при цьому

$$M \le \frac{R - r}{\omega}, \qquad qK < 1. \tag{14}$$

Дослідимо питання існування і побудови періодичних розв'язків системи (11). Розглянемо послідовність ω-періодичних функцій

$$x_m(t, \xi) = x_0(t,\xi) + \int_0^t X(t,s)\left\{ g(s, x_{m-1}(s,\xi)) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(s,\tau) g(\tau, x_{m-1}(\tau,\xi)) d\tau \right\} ds,$$

$$x_0(t, \xi) = X(t)\xi, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Лема 4. *Функція* $x(t)$ *є* ω*-періодичним розв'язком системи* (11) *з початковою умовою* $x(0) = \xi$ *тоді і тільки тоді, коли* $x(t)$ *є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = X(t)\xi + \int_0^t X(t,s)\left\{ g(s,x(s)) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(s,\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau \right\} ds \tag{16}$$

і виконується умова ортогональності

$$\int_0^\omega X^{-1}(s) g(s, x(s)) ds = 0. \tag{17}$$

Доведення. Нехай $x(t)$ — ω-періодична вектор-функція така, що

$$\frac{dx}{dt} \equiv P(t)x(t) + g(t, x(t)), \qquad x(0) = \xi.$$

Тоді

$$x(t) = X(t)\xi + \int_0^t X(t,s) g(s, x(s)) ds. \tag{18}$$

Оскільки $X(\omega) = E$,

$$x(t+\omega) = x(t) + X(t)\int_0^\omega X^{-1}(s) g(s, x(s)) ds,$$

то з ω-періодичності $x(t)$ випливає виконання умови (17). При цьому рівняння (16) і (18) збігаються, що і доводить необхідність виконання умов (16), (17).

Достатня умова є очевидною, оскільки в ω-періодичності розв'язку рівняння (16) можна переконатися безпосередньою перевіркою, а якщо справджується рівність (17), то рівняння (16) перетворюється на (18).

Теорема 1. *Нехай система* (11) *задовольняє умови* (12) – (14). *Тоді*:

1) *послідовність функцій* $x_m(t, \xi)$ *вигляду* (15) *при* $m \to \infty$ *рівномірно збігається відносно* $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times D_0$,

$$D_0 = \left\{ \xi \mid r + \frac{M\omega}{2} \le \|\xi\| \le R - \frac{M\omega}{2} \right\},$$

до граничної функції $x^*(t,\xi)$ *і при всіх натуральних* m *справджуються оцінки збіжності*

$$\left\| x^*(t,\xi) - x_m(t,\xi) \right\| \le \frac{(qK)^m}{1-qK} M r_1(t); \tag{19}$$

2) *гранична функція* $x^*(t,\xi)$ *є* ω*-періодичною по* t *і набуває початкового значення* $x^*(0,\xi) = \xi$;

3) *функція* $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ *є* ω*-періодичним розв'язком системи диференціальних рівнянь* (11) *тоді і тільки тоді, коли точка* $\xi = \xi^*$ *є розв'язком рівняння*

$$\Delta(\xi) \equiv \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X^{-1}(s)\, g(s, x^*(s,\xi))\, ds = 0. \tag{20}$$

Доведення. Спочатку наведемо деякі допоміжні викладки. Використовуючи інтегральну форму нерівності Коші – Буняковського і беручи до уваги, що $X^\top(t) = X^{-1}(t)$, для довільної неперервної вектор-функції $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$, $0 \le a \le b \le \omega$ отримуємо

$$\left\| \int_a^b X(t,s)\, g(s)\, ds \right\| \le \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b \|X(t,s)\, g(s)\|^2 ds} =$$

$$= \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b \langle X(t,s)\, g(s),\ X(t,s)\, g(s)\rangle ds} =$$

$$= \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b \langle X^\top(t,s) X(t,s)\, g(s),\ g(s)\rangle ds} = \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b \|g(s)\|^2 ds}. \tag{21}$$

Отже,

$$\left\| \int_0^t X(t,s)\left\{ g(s) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(s,\tau)\, g(\tau)\, d\tau \right\} ds \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^t X(t,s)\, g(s)\, ds - \frac{t}{\omega}\int_0^\omega X(t,\tau)\, g(\tau)\, d\tau \right\| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\left\| \int_0^t X(t,s)\, g(s)\, ds \right\| + \frac{t}{\omega}\left\| \int_t^\omega X(t,s)\, g(s)\, ds \right\| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|g(s)\|^2 ds} + \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega - t}\sqrt{\int_t^\omega \|g(s)\|^2 ds}. \tag{22}$$

Враховуючи (12), (22), з (9), (15) одержуємо оцінку

$$\|x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| =$$

$$= \left\| \int_0^t X(t,s)\left\{ g(s, x_0(s,\xi)) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(s,\tau)\, g(\tau, x_0(\tau,\xi))\, d\tau \right\} ds \right\| \le$$

$$\leq \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|g(s,x_0(s,\xi))\|^2 ds} + \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega \|g(s,x_0(s,\xi))\|^2 ds} \leq$$

$$\leq Mr_1(t) \leq \frac{M\omega}{2}. \tag{23}$$

Виберемо довільну точку ξ з області D_0. Оскільки $\|x_0(t,\xi)\| = \|\xi\|$, то з (23) за правилом трикутника одержимо нерівності

$$\|x_1(t,\xi)\| \geq \|x_0(t,\xi)\| - \|x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| \geq r,$$

$$\|x_1(t,\xi)\| \leq \|x_1(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| + \|x_0(t,\xi)\| \leq R.$$

Таким чином, $x_1(t,\xi) \in D$. За індукцією можна переконатися, що при всіх $m \geq 1$ маємо

$$\|x_m(t,\xi) - x_0(t,\xi)\| \leq Mr_1(t) \leq \frac{M\omega}{2}, \tag{24}$$

а отже, $r \leq \|x_m(t,\xi)\| \leq R$, і всі члени послідовності (15) належать області D.

За допомогою (13), (22) оцінимо різницю сусідніх членів послідовності (15):

$$\|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)\| =$$

$$= \left\| \int_0^t X(t,s)\left\{ g(s,x_m(s,\xi)) - g(s,x_{m-1}(s,\xi)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(s,\tau)\{g(\tau,x_m(\tau,\xi)) - g(\tau,x_{m-1}(\tau,\xi))\}d\tau \right\} ds \right\| \leq$$

$$\leq \left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|g(s,x_m(s,\xi)) - g(s,x_{m-1}(s,\xi))\|^2 ds} +$$

$$+ \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega \|g(s,x_m(s,\xi)) - g(s,x_{m-1}(s,\xi))\|^2 ds}.$$

З умови Ліпшиця (13) маємо

$$\|x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi)\| \leq K\left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|x_m(s,\xi) - x_{m-1}(s,\xi)\|^2 ds} + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega \|x_m(s,\xi) - x_{m-1}(s,\xi)\|^2 ds}\right\}. \tag{25}$$

Враховуючи (9), (10), з (23), (25) одержуємо

$$\|x_2(t,\xi) - x_1(t,\xi)\| \leq K\left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \|x_1(s,\xi) - x_0(s,\xi)\|^2 ds} + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega \|x_1(s,\xi) - x_0(s,\xi)\|^2 ds}\right\} \leq K\left\{\left(1-\frac{t}{\omega}\right)\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t r_1^2(s)ds} + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{\omega}\sqrt{\omega-t}\sqrt{\int_t^\omega r_1^2(s)ds}\right\} \leq KMr_2(t) \leq qKMr_1(t).$$

Методом математичної індукції отримуємо оцінку

$$\left\| x_{m+1}(t,\xi) - x_m(t,\xi) \right\| \le (qK)^m M r_1(t),$$

а тому для всіх $m \in \mathbb{N}$, $j \ge 1$ маємо

$$\left\| x_{m+j}(t,\xi) - x_m(t,\xi) \right\| \le \sum_{k=0}^{j-1} \left\| x_{m+k+1}(t,\xi) - x_{m+k}(t,\xi) \right\| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=0}^{j-1} (qK)^{m+k} \right) M r_1(t) \le (qK)^m \left(\sum_{k=0}^{j-1} (qK)^k \right) M r_1(t). \tag{26}$$

З (14) випливає, що послідовність (15) рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times D_0$ до граничної функції $x^*(t, \xi)$. Переходячи в (26) до границі при $j \to \infty$, одержуємо оцінку (19).

Оскільки всі функції $x_m(t, \xi)$ послідовності (15) періодичні по t з періодом ω і при $t = 0$ набувають значення $x_m(0, \xi) = \xi$, то і гранична функція $x^*(t, \xi)$ теж є ω-періодичною і $x^*(0, \xi) = \xi$.

Переходячи в (15) до границі при $m \to \infty$, бачимо, що гранична функція $x^*(t, \xi)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = X(t)\xi + \int_0^t X(t,s) \left\{ g(s, x(s)) - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega X(s,\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau \right\} ds,$$

а тому за лемою 4 є ω-періодичним розв'язком системи (11) тоді і тільки тоді, коли виконується умова (17).

Теорему доведено.

Розглянемо можливість вивчення питання існування ω-періодичних розв'язків системи (11) без знаходження граничної функції $x^*(t, \xi)$. Для цього розглянемо наближені визначальні рівняння

$$\Delta_m(\xi) \equiv \frac{1}{\omega} \int_0^\omega X^{-1}(s) g(s, x_m(s,\xi)) ds = 0. \tag{27}$$

Наступне твердження на підставі аналізу коренів рівняння (27) дає можливість робити висновки про існування розв'язків рівняння (20).

Теорема 2. *Нехай система* (11) *задовольняє умови* (12) – (14) *і, крім того*:

1) *при деякому фіксованому натуральному* m *рівняння* (27) *має ізольований розв'язок* $\xi = \xi_{0m}$;

2) *індекс особливої точки* ξ_{0m} *відображення* Δ_m, *породженого* (27), *не дорівнює нулю*;

3) *існує опукла замкнена область* $D_1 \subset D_0$ *така, що* ξ_{0m} *є в* D_1 *єдиним розв'язком рівняння* (27) *і на її границі* ∂D_1 *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi \in \partial D_1} \left\| \Delta_m(\xi) \right\| > \frac{(qK)^{m+1} M}{1 - qK}. \tag{28}$$

Тоді система (11) *має єдиний* ω*-періодичний розв'язок* $x = x^*(t) = x^*(t, \xi^*)$ *з початковою умовою* $x^*(0) = \xi^*$, *де* $\xi^* \in D_1$.

Доведення. Використовуючи оцінки (19), (21), при $m \ge 1$ одержуємо співвідношення

$$\|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)\| = \frac{1}{\omega}\left\|\int_0^\omega X^{-1}(s)\left\{g(s, x^*(s,\xi)) - g(s, x_m(s,\xi))\right\}ds\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\omega}}\sqrt{\int_0^\omega \left\|g(s, x^*(s,\xi)) - g(s, x_m(s,\xi))\right\|^2 ds} \le$$

$$\le \frac{(qK)^m MK}{(1-qK)\sqrt{\omega}}\sqrt{\int_0^\omega r_1^2(s)\,ds} \le \frac{(qK)^{m+1}M}{1-qK}.$$

Далі, враховуючи останню оцінку, за схемою доведення теореми 3.1 [7] можемо показати гомотопність полів $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$, що завершує доведення теореми.

Проілюструємо практичне застосування розробленого алгоритму.

Приклад. Нехай потрібно знайти 2π-періодичний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 - \frac{\sin(t)}{16}x_1 - \frac{1}{8}x_2^2 + \frac{1}{32}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + \frac{1}{5}x_1x_2 - \frac{\sin(2t)}{40} \end{aligned} \tag{29}$$

в області $(t, x) \in \Omega = \mathbb{R} \times D$, $D = \left\{x = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$. Неважко переконатися, що в Ω функція

$$g(t, x) = \operatorname{col}\left(-\frac{\sin(t)}{16}x_1 - \frac{1}{8}x_2^2 + \frac{1}{32},\ \frac{1}{5}x_1x_2 - \frac{\sin(2t)}{40}\right)$$

задовольняє умови (12) – (14) зі сталими $M = 0{,}149$, $K = \sqrt{253}/40$.

Послідовні 2π-періодичні наближення до розв'язків системи (29), побудовані за формулою (15), мають вигляд

$$x_{01}(t, \xi) = \xi_1\cos(t) + \xi_2\sin(t),$$

$$x_{02}(t, \xi) = -\xi_1\sin(t) + \xi_2\cos(t),$$

$$\begin{aligned} x_{m1}(t, \xi) &= x_{01}(t,\xi) + \frac{\sin(2t)}{120} + \frac{7\sin(t)}{480} - \\ &- \int_0^t\left\{\frac{\cos(t-s)\sin(s)x_{m-1,1}(s,\xi)}{16} + \frac{\cos(t-s)\,x_{m-1,2}^2(s,\xi)}{8} - \right. \\ &\left. - \frac{\sin(t-s)\,x_{m-1,1}(s,\xi)\,x_{m-1,2}(s,\xi)}{5}\right\}ds - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\cos(t-\sigma)\sin(\sigma)x_{m-1,1}(\sigma,\xi)}{16} + \right. \\ &\left. + \frac{\cos(t-\sigma)\,x_{m-1,2}^2(\sigma,\xi)}{8} + \frac{\sin(t-\sigma)\,x_{m-1,1}(\sigma,\xi)\,x_{m-1,2}(\sigma,\xi)}{5}\right\}d\sigma, \\ x_{m2}(t, \xi) &= x_{02}(t,\xi) + \frac{\cos(2t)}{60} + \frac{7\cos(t)}{480} - \frac{1}{32} + \\ &+ \int_0^t\left\{\frac{\sin(t-s)\sin(s)x_{m-1,1}(s,\xi)}{16} + \frac{\sin(t-s)}{8}x_{m-1,2}^2(s,\xi) + \right. \end{aligned} \tag{30}$$

$$+\ \frac{\cos(t-s)\,x_{m-1,1}(s,\xi)\,x_{m-1,2}(s,\xi)}{5}\Bigg\}ds\ +\ \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg\{\frac{\sin(t-\sigma)\sin(\sigma)\,x_{m-1,1}(\sigma,\xi)}{16}\ +$$

$$+\ \frac{\sin(t-\sigma)\,x_{m-1,2}^2(\sigma,\xi)}{8}\ +\ \frac{\cos(t-\sigma)\,x_{m-1,1}(\sigma,\xi)\,x_{m-1,2}(\sigma,\xi)}{5}\Bigg\}d\sigma.$$

Наближені визначальні функції $\Delta_m(\xi)$, знайдені за формулою (27), мають вигляд

$$\Delta_m(\xi) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^{2\pi}\Bigg\{\frac{\sin(2s)\,x_{m1}(s,\xi)}{32}+\frac{\cos(s)\,x_{m2}^2(s,\xi)}{8}+\frac{\sin(s)\,x_{m1}(s,\xi)\,x_{m2}(s,\xi)}{5}\Bigg\}ds\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\Bigg\{\frac{\sin^2(s)\,x_{m1}(s,\xi)}{16}+\frac{\sin(s)\,x_{m2}^2(s,\xi)}{8}-\frac{\cos(s)\,x_{m1}(s,\xi)\,x_{m2}(s,\xi)}{5}\Bigg\}ds\end{pmatrix}.$$

При $m = 2$ отримуємо два розв'язки рівняння $\Delta_m(\xi) = 0$:

$$\breve{\xi}_2 = (\breve{\xi}_{21}, \breve{\xi}_{22}) = (3{,}4895466056\cdot 10^{-11},\ 0{,}49999999996),$$

$$\bar{\xi}_2 = (\bar{\xi}_{21}, \bar{\xi}_{22}) = (2{,}9438729962\cdot 10^{-11},\ 0{,}0065099448909).$$

Підставляючи їх у (30), одержуємо при $m = 1$ відповідно два перші наближення:

$$\breve{x}_1(t) = x_1(t,\breve{\xi}) = (\breve{x}_{11}(t), \breve{x}_{12}(t)) = (x_{11}(t,\breve{\xi}), x_{12}(t,\breve{\xi}))$$

і

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t,\bar{\xi}) = (\bar{x}_{11}(t), \bar{x}_{12}(t)) = (x_{11}(t,\bar{\xi}), x_{12}(t,\bar{\xi})),$$

а при $m = 2$ — два другі наближення:

$$\breve{x}_2(t) = x_2(t,\breve{\xi}) = (\breve{x}_{21}(t), \breve{x}_{22}(t)) = (x_{21}(t,\breve{\xi}), x_{22}(t,\breve{\xi}))$$

і

$$\bar{x}_2(t) = x_2(t,\bar{\xi}) = (\bar{x}_{21}(t), \bar{x}_{22}(t)) = (x_{21}(t,\bar{\xi}), x_{22}(t,\bar{\xi})).$$

При $m = 3$ наближене визначальне рівняння $\Delta_m(\xi) = 0$ також має два розв'язки:

$$\breve{\xi}_3 = (\breve{\xi}_{31}, \breve{\xi}_{32}) = (1{,}25074999659\cdot 10^{-11},\ 0{,}499999999999),$$

$$\bar{\xi}_3 = (\bar{\xi}_{31}, \bar{\xi}_{32}) = (-2{,}2087970574\cdot 10^{-11},\ 0{,}00918646967816).$$

Обчислюючи співвідношення (30) при $m = 3$ і підставляючи в них значення $\breve{\xi}_3$ і $\bar{\xi}_3$, отримуємо відповідні їм треті наближення:

$$\breve{x}_3(t) = x_3(t,\breve{\xi}) = (\breve{x}_{31}(t), \breve{x}_{32}(t)) = (x_{31}(t,\breve{\xi}), x_{32}(t,\breve{\xi}))$$

і

$$\bar{x}_3(t) = x_3(t,\bar{\xi}) = (\bar{x}_{31}(t), \bar{x}_{32}(t)) = (x_{31}(t,\bar{\xi}), x_{32}(t,\bar{\xi}))$$

до 2π-періодичного розв'язку системи (29).

Підставивши одержані наближення у систему (29), одержимо, що відхилення для $\breve{x}_1(t)$, $\breve{x}_2(t)$, $\breve{x}_3(t)$ не перевищує $7\cdot 10^{-10}$, тобто похибку обчислень, а для $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$, $\bar{x}_3(t)$ не перевищує відповідно $1{,}307\cdot 10^{-3}$, $8{,}005\cdot 10^{-5}$, $3{,}291\cdot 10^{-6}$.

Зауважимо, що $x^*(t) = (\sin(t)/2,\ \cos(t)/2)$ є точним розв'язком системи

(29). Йому відповідають послідовні наближення $\breve{x}_1(t)$, $\breve{x}_2(t)$, $\breve{x}_3(t)$, і при цьому їх покоординатні відхилення не перевищують $3 \cdot 10^{-11}$.

3. Системи з малим параметром. Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) + \varepsilon g(t, x), \tag{31}$$

де ε — малий додатний параметр, $(t, x) \in \Omega$, $P(t)$ — матриця вигляду (2), (4), функції $f(t)$, $g(t, x)$ неперервні за своїми змінними, ω-періодичні по t, $f(t)$ задовольняє умову ортогональності (5), а для $g(t, x)$ виконуються умови (12), (13).

Побудуємо послідовність ω-періодичних функцій

$$\hat{x}_m(t, \xi) = \hat{x}_0(t, \xi) + \varepsilon \int_0^t X(t, s) \left\{ g(s, \hat{x}_{m-1}(s, \xi)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega X(s, \tau) g(\tau, \hat{x}_{m-1}(\tau, \xi)) d\tau \right\} ds, \tag{32}$$

$$\hat{x}_0(t, \xi) = X(t)\xi + \int_0^t X(t, s) f(s), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

При достатньо малих ε для системи (31) виконуються оцінки

$$\varepsilon M \le \frac{R - r}{\omega}, \qquad \varepsilon q K < 1,$$

а тому теореми 1 і 2 можуть бути перенесені на систему (31), і при цьому нерівності (19) і (28) матимуть вигляд

$$\left\| \hat{x}^*(t, \xi) - \hat{x}_m(t, \xi) \right\| \le \frac{(\varepsilon q K)^m}{1 - \varepsilon q K} \varepsilon M r_1(t),$$

$$\inf_{\xi \in \partial D_1} \left\| \hat{\Delta}_m(\xi) \right\| > \frac{(\varepsilon q K)^{m+1} M}{1 - \varepsilon q K}, \tag{33}$$

де

$$\hat{x}^*(t, \xi) = \lim_{m \to \infty} \hat{x}_m(t, \xi), \qquad \hat{\Delta}_m(\xi) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega X^{-1}(s) g(s, \hat{x}_m(s, \xi)) ds.$$

Крім того, для цієї системи має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай система* (31) *задовольняє наведені вище умови і відображення*

$$\hat{\Delta}_0(\xi) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega X^{-1}(s) g(s, \hat{x}_0(s, \xi)) ds$$

має в області D_0 *ізольовану особливу точку* $\xi = \xi_0$ *ненульового індексу.*

Тоді існує таке ε_0, *що при всіх* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система* (31) *має* ω-*періодичний розв'язок.*

Доведення. Для послідовності (32) за індукцією можемо одержати оцінки, аналогічні до (24):

$$\left\| \hat{x}_m(t, \xi) - \hat{x}_0(t, \xi) \right\| \le \varepsilon M r_1(t),$$

а тому, переходячи до границі при $m \to \infty$, маємо

$$\left\| \hat{x}^*(t,\xi) - \hat{x}_0(t,\xi) \right\| \le \varepsilon M r_1(t).$$

Таким чином, при $m = 0$ замінюємо (33) на нерівність

$$\inf_{\xi \in \partial D_1} \left\| \hat{\Delta}_0(\xi) \right\| > \varepsilon q K M. \tag{34}$$

Візьмемо в якості області D_1 коло радіуса ρ з центром у точці ξ_0. Оскільки ξ_0 є ізольованою особливою точкою, то при достатньо малому ρ в D_1 немає інших особливих точок водображення $\hat{\Delta}_0(\xi)$ і

$$\inf_{\|\xi - \xi_0\| = \rho} \left\| \hat{\Delta}_0(\xi) \right\| = \eta > 0.$$

Тоді нерівність (34) запишеться так:

$$\inf_{\|\xi - \xi_0\| = \rho} \left\| \hat{\Delta}_0(\xi) \right\| = \eta > \varepsilon q K M.$$

Отже, при

$$\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{\eta}{qKM}$$

існує ω-періодичний розв'язок $\hat{x}(t,\xi)$ системи (31).

4. *n*-Вимірні системи. Одержані вище результати можна узагальнити на системи

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + F(t), \tag{35}$$

де $F(t)$ — неперервна ω-періодична вектор-функція, $F \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ є неперервною ω-періодичною кососиметричною $(n \times n)$-матрицею і задовольняє умову Лаппо – Данилевського:

$$A(t) \cdot \int_0^t A(s)ds = \int_0^t A(s)ds \cdot A(t).$$

Відомо [11, с. 117], що при цьому матрицант $Y(t)$ відповідної однорідної системи

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{36}$$

має вигляд

$$Y(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}. \tag{37}$$

Очевидно, що матриця

$$A_0 = \int_0^\omega A(s)ds$$

теж є кососиметричною, а тому [12, с. 118] існує така дійсна ортогональна матриця S $(S = (S^\top)^{-1} = \bar{S})$, що

$$A_0 = SZS^{-1}, \qquad Z = \operatorname{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ -p_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & p_d \\ -p_d & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0 \right\}.$$

Отже, дійсна частина всіх власних значень λ_j матриці A_0 дорівнює нулю:

$$\lambda_j = i\gamma_j, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \gamma_j = \begin{cases} \pm p_j, & j = \overline{1, d}, \\ 0, & 2d+1 \le j \le n. \end{cases}$$

При цьому матриця монодромії $Y(\omega)$ має вигляд

$$Y(\omega) = Se^Z S^{-1},$$

$$e^Z = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} \cos(p_1) & \sin(p_1) \\ -\sin(p_1) & \cos(p_1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos(p_d) & \sin(p_d) \\ -\sin(p_d) & \cos(p_d) \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right\},$$

а мультиплікаторами є $\rho_j = \cos\gamma_j + i\sin\gamma_j$, $j = \overline{1, n}$.

Очевидно, що кожному $\lambda_j = i2\pi l_j$, де l_j — деякі цілі числа, відповідає ω-періодичний розв'язок $\psi_j(t)$ системи (35). Таким чином, можемо сформулювати наступні твердження.

Лема 5. *Нехай $A(t)$ — неперервна ω-періодична кососиметрична $(n \times n)$-матриця, що задовольняє умову Лаппо – Данилевського.*

Тоді всі власні значення λ_j матриці A_0 мають нульову дійсну частину. Крім того,

1) *якщо при всіх $j = \overline{1, n}$*

$$\operatorname{Im}(\lambda_j) \ne 2\pi l,$$

де l — ціле, то система (35) *має єдиний ω-періодичний розв'язок*;

2) *якщо для $j = \overline{1, \nu}$, $\nu \le n$, маємо*

$$\operatorname{Im}(\lambda_j) = 2\pi l_j, \tag{38}$$

де l_j — деякі цілі числа, то лінійна однорідна система (36) *має ν лінійно незалежних ω-періодичних розв'язків $\psi_1(t), \ldots, \psi_\nu(t)$, а відповідна неоднорідна система* (35) *має ω-періодичні розв'язки тоді і тільки тоді, коли*

$$\int_0^\omega \langle \psi_j(s), F(s) \rangle ds = 0, \quad j = \overline{1, \nu},$$

і при цьому вони утворюють ν-параметричну сім'ю.

Лема 6. *Нехай виконується умова* (38). *Тоді для системи* (35) *завжди існує ω-періодична функція $\Theta(t)$ така, що система*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + F(t) - \Theta(t)$$

має ν-параметричну сім'ю ω-періодичних розв'язків.

Доводяться останні два твердження аналогічно до лем 1 і 2. Зокрема, за функцію $\Theta(t)$ можемо взяти

$$\Theta(t) = \frac{1}{\omega} Y_\nu(t) \int_0^\omega Y_\nu^\top(s) F(s) ds,$$

де $Y_\nu(t)$ — $(n \times \nu)$-матриця, стовпцями якої є лінійно незалежні ω-періодичні розв'язки $\psi_1(t), \ldots, \psi_\nu(t)$ системи (36).

Крім того, розглянемо нелінійні n-вимірні ω-періодичні системи

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + G(t, y). \tag{39}$$

Якщо всі мультиплікатори дорівнюють одиниці, то наведені вище теореми залишаються справедливими і для системи (39). При цьому її ω-періодичний розв'язок шукається як границя $y^*(t) = y^*(t, \xi^*)$ послідовності

$$y_m(t,\xi) = y_0(t,\xi) + \int_0^t Y(t,s)\left\{G(s, y_{m-1}(s,\xi)) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} Y(s,\tau)G(\tau, y_{m-1}(\tau,\xi))\,d\tau\right\}ds,$$

$$y_0(t,\xi) = Y(t)\xi, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

де $Y(t)$ знаходиться згідно з (37), $Y(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s)$, а початкове значення $y^*(0) = \xi^*$ є розв'язком системи рівнянь

$$\int_0^{\omega} Y^{-1}(s)G(s, y^*(s,\xi))\,ds = 0.$$

Висновки. У роботі досліджено питання існування, єдиності періодичних розв'язків одного класу як лінійних неоднорідних, так і нелінійних систем диференціальних рівнянь. Розроблено алгоритми наближеної побудови періодичних розв'язків відповідних нелінійних систем, встановлено необхідні і достатні умови існування розв'язку, знайдено оцінки збіжності послідовних наближень.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – 4-е изд. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Гребеников Е. А., Митропольский Ю. А., Рябов Ю. А.* Введение в резонансную аналитическую динамику. – М.: Янус-К, 1999. – 320 с.
3. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
4. *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н., Кенжебаев К. К.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных задач // Труды Ин-та математики НАН Украины. – 1999. – **29**. – 220 с.
5. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. 1 // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 16–23.
6. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. 2 // Там же. – 1966. – **18**, № 2. – С. 9–18.
7. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
9. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 226 с.
10. *Перестюк Н. А.* О периодических решениях некоторых систем дифференциальных уравнений // Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УРСР, 1971. – С. 136–146.
11. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Одержано 05.04.2004