Об одном классе поверхностей проективно-диференциальной геометрии

Н. И. Кованцов

Предметом нашего внимания будут поверхности, для которых имеет место равенство

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}\,. \tag{1}$$

Здесь β, γ — коэфициенты кубической формы Фубини $\beta\,du^3+\gamma\,dv^3$. Назовем такие поверхности для краткости каноническими. Причина выбора такого названия будет выяснена в дальнейшем.

Будем предполагать поверхность отнесенной к асимптотическим линиям u, v, причем все исследования будем вести в нормальном тетраэдре проф. С. П. Финикова (см. С. П. Фиников, Проективно-диференциальная геометрия, 1937)[1]. На исследуемых поверхностях известные в проективно-диференциальной геометрии образы получают специальные свойства, описанию которых мы и посвятим настоящую работу.

§ 1. Обобщенная конструкция Грина. Напомним описание классической конструкции Грина. Проектируя асимптотические линии s_1 и s_2 на касательную плоскость из произвольной точки прямой l, проходящей через точку M поверхности, находят в касательной плоскости два пучка кривых второго порядка a_1^2 и a_2^2, имеющих с проекциями касания третьего порядка. Если прямая P_1P_2, проходящая через полосы P_1, P_2 асимптотических касательных t_1, t_2 относительно пучков a_2^2, a_1^2, полярно сопряжена прямой l относительно пучка поверхностей второго порядка Дарбу, то l — есть первое ребро Грина, прямая P_1P_2 — второе.

Обобщая эту конструкцию, возьмем вместо асимптотических u, v некоторые кривые $u=u(v)$ и $v=v(u)$, имеющие с асимптотическими касания второго порядка, т. е.

$$u'=u''=0,\quad v'=v''=0,\quad u'''=h'\neq 0,\quad v'''=h\neq 0.$$

Далее поступаем, как в классической конструкции. Примем за центр проектирования вершину M_3 подвижного тетраэдра. Пусть уравнениями кривой второго порядка в сокращенной записи будут уравнения:

$$\sum PP=0,\qquad (MM_1M_2P)=0.$$

Подставляя в первое уравнение вместо P текущие координаты точки кри-

[1] В дальнейшем везде мы ссылаемся на эту работу С. П. Финикова.

вой $v=v(u)$ и отбрасывая каждый раз координату M_3, продиференцируем его три раза по u. Мы получим четыре уравнения для определения параметров кривой

$$\sum MM=0, \quad \sum MM'=0, \quad \sum(M'M'+MM'')=0, \quad \sum(3M'M''+MM''')=0.$$

На основании равенств $v'=v''=0$, $v'''=h$ найдем

$$M'=M_u, \quad M''=M_{uu}, \quad M'''=M_{uuu}+M_v h.$$

Предыдущие равенства принимают вид

$$\sum MM=0, \quad \sum MM_u=0, \quad \sum(M_uM_u+MM_{uu})=0,$$

$$\sum(3M_uM_{uu}+MM_{uuu}+MM_vh)=0$$

Пользуясь таблицей компонент нормального тетраэдра (С. П. Фиников, стр. 78), перепишем эти равенства в виде

$$\sum MM=0, \quad \sum MM_1=0, \quad \sum(M_1M_1+\beta MM_2)=0,$$

$$\sum M_2\left[3M_1+M\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}\right)\right]=0.$$

Считая, что наш тетраэдр нормальный, найдем коэфициенты уравнения кривой второго порядка из уравнений

$$c_{00}=0, \quad c_{01}=0, \quad c_{11}+\beta c_{02}=0, \quad 3c_{12}+c_{02}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}\right)=0.$$

Уравнение этой кривой в неоднородных координатах $\left(\frac{x_1}{x_0}=x,\ \frac{x_2}{x_0}=y,\ \frac{x_3}{x_0}=z\right)$ имеет вид

$$3\beta x^2+2\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}\right)xy-6y+c_{22}y^2=0.$$

Это — целый пучок кривых с параметром $c_{22}=\nu$.

Полюс асимптотической касательной $x=0$ относительно этого пучка имеет координаты

$$\bar{x}_1=\frac{3}{\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}}, \quad \bar{y}_1=0.$$

Поступая аналогично с кривой $u=u(v)$, найдем координаты другого полюса:

$$\bar{x}_2=0, \ \bar{y}_2=\frac{3}{\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b+\frac{h'}{\gamma}}.$$

Пользуясь формулами преобразования проективных координат (С. П. Фиников, стр. 98), получим координаты тех же полюсов в том случае, если центр проекции находится на прямой, имеющей направляющие параметры $l=\frac{x}{z}$, $m=\frac{y}{z}$ относительно подвижного тетраэдра

$$x_1=\frac{3}{\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}-m}, \quad y_1=0; \quad x_2=0, \quad y_2=\frac{3}{\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b+\frac{h'}{\gamma}-l}.$$

Потребуем, чтобы прямая, проходящая через эти полюсы, совпадала с прямой

$$mx+ly-1=0,$$

полярно сопряженной прямой l, m относительно пучка поверхностей Дарбу. Это даст равенства

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}-m\right)=m, \quad \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b+\frac{h'}{\gamma}-l\right)=l,$$

откуда

$$l=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b+\frac{h'}{\gamma}\right), \quad m=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}\right). \tag{a}$$

Нетрудно проверить, что найденная связь между третьими производными кривых и определяемыми ими направляющими параметрами обобщенного ребра Грина не нарушается при параметрических преобразованиях поверхности вида $u=u(\bar{u})$, $v=v(\bar{v})$. Действительно, если $x_0:x_1:x_2:x_3$ — координаты точки относительно подвижного тетраэдра, то ее координаты относительно неподвижного суть

$$P=x_0M+x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3.$$

После параметрического преобразования точка не изменит своего положения в пространстве, т. е. $\bar{P}=\theta P$, где θ — некоторая функция от u, v. Таким образом,

$$\bar{x}_0\bar{M}+\bar{x}_1\bar{M}_1+\bar{x}_2\bar{M}_2+\bar{x}_3\bar{M}_3=\theta(x_0M+x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3).$$

Подставляя сюда вместо $\bar{M}$, $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{M}_3$ их значения по формулам (III_1) (С. П. Фиников, стр. 43) и сравнивая коэфициенты, например при M_1 и M_3, получим

$$\bar{x}_1\varepsilon\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\frac{du}{d\bar{u}}\frac{d\bar{v}}{dv}}=\theta x_1, \quad \bar{x}_3\varepsilon\varepsilon'\sqrt{\varepsilon\varepsilon'\frac{du}{d\bar{u}}\frac{dv}{d\bar{v}}}=\theta x_3$$

(в силу неравенства $(MM_1M_2M_3)\neq 0$ это сравнение возможно).

Поделив первое равенство на второе, получим

$$\bar{l}\varepsilon'\sqrt{\left(\frac{d\bar{v}}{dv}\right)^2}=l \quad \text{или} \quad \bar{l}=\varepsilon'\left|\frac{dv}{d\bar{v}}\right|l.$$

Так как $\varepsilon'\frac{dv}{d\bar{v}}>0$, то можно написать

$$\bar{l}=\frac{dv}{d\bar{v}}l.$$

Найдем формулу преобразования для h'. Пусть $u = f(v)$ — уравнение некоторой кривой на поверхности, имеющей с асимптотической кривой $u = \text{const}$ касание второго порядка, т. е. $f' = f'' = 0$, $f''' = h' \neq 0$. Пусть $\bar{u} = \bar{f}(\bar{v})$ — уравнение той же кривой в преобразованной системе координат. Это уравнение получается, очевидно, из уравнения $u(\bar{u}) = f[v(\bar{v})]$. Диференцируем это последнее три раза по $\bar{v}$:

$$\frac{du}{d\bar{u}}\bar{f}' = f'\frac{dv}{d\bar{v}}, \quad \frac{d^2u}{d\bar{u}^2}\bar{f}'^2 + \frac{du}{d\bar{u}}\bar{f}'' = f''\left(\frac{dv}{d\bar{v}}\right)^2 + f'\frac{d^2v}{d\bar{v}^2},$$

$$\frac{d^3u}{d\bar{u}^3}\bar{f}'^3 + 3\frac{d^2u}{d\bar{u}^2}\bar{f}'\bar{f}'' + \frac{du}{d\bar{u}}\bar{f}''' = f'''\left(\frac{dv}{d\bar{v}}\right)^3 + 3f''\frac{dv}{d\bar{v}}\frac{d^2v}{d\bar{v}^2} + f'\frac{d^3v}{d\bar{v}^3}.$$

Мы имеем, очевидно, $\bar{f}' = \bar{f}'' = 0$, ибо равенство нулю двух первоначальных производных $f' = f'' = 0$ означает, что кривая имеет с соответствующей асимптотической три общих точки, а этот чисто геометрический факт не имеет никакого отношения к координатной системе. Полагая $\bar{f}''' = \bar{h}'$, будем иметь

$$\bar{h}' = h'\frac{d\bar{u}}{du}\left(\frac{dv}{d\bar{v}}\right)^3.$$

Из формулы преобразования γ

$$\bar{\gamma} = \gamma\frac{d\bar{u}}{du}\left(\frac{dv}{d\bar{v}}\right)^2$$

(С. П. Фиников, стр. 43) будем иметь

$$\frac{\bar{h}'}{\bar{\gamma}} = \frac{h'}{\gamma}\frac{dv}{d\bar{v}} \tag{*}$$

Мы видим, что $\dfrac{h'}{\gamma}$ преобразуется точно так же, как l. Этим доказана инвариантность зависимости параметра l от h' при внутренних преобразованиях параметра. Аналогично можно доказать инвариантность зависимости m от h.

Теперь достаточно взять вместо h' какую-нибудь функцию от точки поверхности, преобразующуюся по формуле (*). Сохраним при построении обобщенных ребер Грина ту окрестность на поверхности, при помощи которой были построены прямые канонического пучка, т. е. окрестность, определяемую лишь функциями β, γ и их производными первого порядка. Следовательно, будем иметь функцию $f(\beta, \gamma, \beta_u, \beta_v, \gamma_u, \gamma_v)$, преобразующуюся так же, как например, $\dfrac{h}{\beta}$, т. е.

$$f\left(\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{u}}, \frac{\partial\bar{\beta}}{\partial\bar{v}}, \frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\bar{u}}, \frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\bar{v}}\right) = f\left(\beta, \gamma, \frac{\partial\beta}{\partial u}, \frac{\partial\beta}{\partial v}, \frac{\partial\gamma}{\partial u}, \frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\frac{du}{d\bar{u}}. \tag{**}$$

На основании формул (III_2) (С. П. Фиников, стр. 43) будем иметь

$$\frac{\partial\bar\beta}{\partial\bar u}=\frac{\partial\beta}{\partial u}\left(\frac{du}{d\bar u}\right)^3\frac{d\bar v}{dv}+2\beta\frac{du}{d\bar u}\frac{d\bar v}{dv}\frac{d^2u}{d\bar u^2},$$

$$\frac{\partial\bar\beta}{\partial\bar v}=\frac{\partial\beta}{\partial v}\left(\frac{du}{d\bar u}\right)^2-\beta\left(\frac{du}{d\bar u}\right)^2\left(\frac{d\bar v}{dv}\right)^2\frac{d^2v}{d\bar v^2},$$

$$\frac{\partial\bar\gamma}{\partial\bar u}=\frac{\partial\gamma}{\partial u}\left(\frac{dv}{d\bar v}\right)^2-\gamma\left(\frac{dv}{d\bar v}\right)^2\left(\frac{d\bar u}{du}\right)^2\frac{d^2u}{d\bar u^2},$$

$$\frac{\partial\bar\gamma}{\partial\bar v}=\frac{\partial\gamma}{\partial v}\left(\frac{dv}{d\bar v}\right)^3\frac{d\bar u}{du}+2\gamma\frac{dv}{d\bar v}\frac{d\bar u}{du}\frac{d^2v}{d\bar v^2}.$$

Введем обозначения

$$\beta=a,\quad \gamma=b,\quad \frac{du}{d\bar u}=t,\quad \frac{dv}{d\bar v}=x,\quad \frac{d^2u}{d\bar u^2}=y,\quad \frac{d^2v}{d\bar v^2}=z,$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}=c,\quad \frac{\partial\beta}{\partial v}=\alpha,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial u}=e,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial v}=g.$$

Имеет место тождество по всем аргументам

$$f\left(a\frac{t^2}{x},\ b\frac{x^2}{t},\ c\frac{t^3}{x}+2a\frac{t}{x}y,\ \alpha t^2-a\frac{t^2}{x^2}z,\ ex^2-b\frac{x^2}{t^2}y,\ g\frac{x^3}{t}+2b\frac{x}{t}z\right)\equiv$$

$$\equiv f(a,\ b,\ c,\ \alpha,\ e,\ g)\,t.$$

Продиференцируем его по t, x, y, z, положив после диференцирования $t=x=1$, $y=z=0$:

$$2af_a-bf_b+3cf_c+2\alpha f_\alpha-gf_g=f, \qquad 1)$$

$$-af_a+2bf_b-cf_c+2ef_e+3gf_g=0, \qquad 2)$$

$$2af_c-bf_e=0, \qquad 3)$$

$$-af_\alpha+2bf_g=0. \qquad 4)$$

Решим эту систему линейных уравнений в частных производных первого порядка. Возьмем уравнение 2). Решение его эквивалентно решению соответствующей ему системы обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка.

$$\frac{da}{-a}=\frac{db}{2b}=\frac{dc}{-c}=\frac{de}{2e}=\frac{dg}{3g}.$$

Система первых интегралов суть

$$c_1=a^2b,\quad c_2=\frac{a}{c},\quad c_3=a^2e,\quad c_4=a^3g.$$

Общим решением уравнения 2) будет произвольная функция аргументов c_1, c_2, c_3, c_4, в которую в качестве параметра может входить переменное α, т. е.

$$f(a,\ b,\ c,\ \alpha,\ e,\ g)=\Phi(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \alpha).$$

Подставляем в уравнение 1)

$$2a\left(\Phi_{c_1}2ab+\Phi_{c_2}\frac{1}{c}+\Phi_{c_3}2ae+\Phi_{c_4}3a^2g\right)-$$

$$-b\Phi_{c_1}a^2-3c\Phi_{c_2}\frac{a}{c^2}+2\alpha\Phi_\alpha-g\Phi_{c_4}a^3=\Phi$$

или

$$3c_1\Phi_{c_1}-c_2\Phi_{c_2}+4c_3\Phi_{c_3}+5c_4\Phi_{c_4}+2\alpha\Phi_\alpha=\Phi.$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь

$$\Phi=c_1^{\frac{1}{3}}\psi(p_1, p_2, p_3, p_4),$$

где ψ — произвольная диференцируемая функция аргументов

$$p_1=c_1c_2^3,\quad p_2=\frac{c_3^3}{c_1^4},\quad p_3=\frac{c_4^3}{c_1^5},\quad p_4=\frac{\alpha}{c_1^2}.$$

Подставим найденное решение в уравнение 3):

$$-2a\psi_{p_1}3c_1c_2^2\frac{a}{c^2}-b\psi_{p_2}3\frac{c_3^2}{c_1^4}a^2=0$$

или

$$2p_1^{\frac{4}{3}}\psi_{p_1}+p_2^{\frac{2}{3}}\psi_{p_2}=0.$$

Интегрируя это уравнение, получим ψ, а следовательно, и Φ

$$\Phi=c_1^{\frac{1}{3}}R\left(p_1^{-\frac{1}{3}}+2p_2^{\frac{1}{3}},\ p_3, p_4\right)$$

(переменные p_3, p_4 введены в качестве параметров).

Подставляя, наконец, Φ в уравнение 4), получим

$$-aR_{p_4}\frac{3a^2}{c_1^2}+2bR_{p_3}\frac{3c_4^2}{c_1^5}a^3=0$$

или

$$-p_4^{\frac{5}{3}}R_{p_4}+2p_3^{\frac{2}{3}}R_{p_3}=0.$$

Интегрируя, находим окончательно

$$f=c_1^{\frac{1}{3}}F\left(p_1^{-\frac{1}{3}}+2p_2^{\frac{1}{3}},\ p_3^{\frac{1}{3}}+2p_4^{\frac{1}{3}}\right)$$

(переменное $p_1^{-\frac{1}{3}}+2p_2^{\frac{1}{3}}$ введено в качестве параметра).

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим

$$f=\frac{h}{\beta}=\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u},\ \frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v}\right).\qquad (***)$$

Аналогично можно составить выражение для h'.

Таким образом, каждой паре кривых, соприкасающихся с асимптотическими линиями, соответствует некоторое обобщенное ребро Грина. Потребуем, чтобы это соответствие носило чисто геометрический характер, т. е. не зависело от того, какую асимптотическую линию мы назовем линией u, а какую — линией v. Меняя обозначения асимптотических u на v, мы должны, очевидно, заменить β на γ и h на h'. Но в таком случае для того, чтобы кривая, третью производную которой можно было бы найти по формуле (***), оставалась неизменной, мы должны положить

$$\frac{h'}{\gamma}=\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}\right). \tag{****}$$

Следовательно, для каждой кривой с некоторой функцией F, соприкасающейся с одной из асимптотических, вторая кривая получается вполне определенной.

Аргументами функции F являются, как нетрудно проверить, инварианты внутреннего преобразования параметров (следовательно, сама функция также инвариантна). На исследуемых канонических поверхностях эти инварианты равны (см. равенство (1)), а потому функции F, отвечающие двум кривым, также равны.

Из равенства (1) следуют равенства

$$\sqrt[3]{\beta\gamma^2}=\theta\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v},\quad \sqrt[3]{\gamma\beta^2}=\theta\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}, \tag{2}$$

где θ — некоторая функция от u, v, инвариантная при внутреннем преобразовании параметров.

Равенства (***) и (****) принимают вид

$$\frac{h}{\beta}=\theta F\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u},\ \frac{h'}{\gamma}=\theta F\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v}.$$

Подставляя эти значения в формулы (а), найдем

$$l=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\ln\gamma}{\partial v}+4b+\theta F\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v}\right),\quad m=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a+\theta F\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}\right)$$

или (С. П. Фиников, сноска на стр. 106)

$$l=\frac{1}{2}\left[\frac{a_1^0-a_3^2}{\beta}+\frac{1}{2}(1+\theta F)\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v}\right],\quad m=\frac{1}{2}\left[\frac{b_2^0-b_3^1}{\gamma}+\frac{1}{2}(1+\theta F)\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}\right]. \tag{в}$$

Но это — некоторая прямая каноническая плоскости [С. П. Фиников, стр. 106, (31)]. При $\theta F=\text{const}$ получается та или иная прямая канонического пучка.

Таким образом, *на канонических поверхностях обобщенная конструкция Грина приводит лишь к прямым канонической плоскости.*

В силу этого обстоятельства мы и назвали наши поверхности каноническими.

§ 2. Переписывая равенство (1) в виде

$$\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}:\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v}=\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},$$

мы видим, что на канонических поверхностях каноническая касательная совпадает с касательной к действительной линии Сегре. Так как соприкасающаяся плоскость линии Сегре проходит через касательную Сегре (совпадающую в данном случае с канонической касательной) и ось Чеха (по теореме Чеха) и так как каноническая плоскость проходит через эти же прямые, то *на канонических поверхностях каноническая плоскость является соприкасающейся плоскостью линии Сегре.* Это легко проверить и аналитически.

§ 3. Пусть $v = v(u)$ — уравнение некоторой линии на поверхности. Три бесконечно близких касательных к асимптотической v вдоль этой линии определят некоторую поверхность второго порядка (конструкция Бомпиани—Клобучека). Уравнение этой поверхности в нормальном тетраэдре, построенном на директрисах Вильчинского (назовем такой тетраэдр для краткости тетраэдром (A)), имеет вид

$$xy - z - v'\gamma yz + v'^2\gamma xz = \frac{1}{2} z^2 \left(v'\gamma_u + v'^2\gamma \frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial u} + v'^3\gamma^2 + v''\gamma \right) \tag{3}$$

(С. П. Фиников, стр. 83).

Аналогично, беря линию $u = u(v)$ и три бесконечно близких касательных вдоль нее к асимптотической u, получим вторую поверхность второго порядка:

$$xy - z - u'\beta xz + u'^2\beta yz = \frac{1}{2} z^2 \left(u'\beta_v + u'^2\beta \frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v} + u'^3\beta^2 + u''\beta \right). \tag{4}$$

Потребуем, чтобы поверхности (3) и (4) совпадали. Сравнивая коэфициенты при xz и yz, находим

$$-v'\gamma = u'^2\beta, \quad -u'\beta = v'^2\gamma.$$

Эти уравнения дают четыре пары решений

$$u' = 0, \quad v' = 0; \quad u' = -\varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}, \quad v' = -\varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},$$

где ε — кубический корень из единицы.

Первые два решения дают асимптотические направления, а следовательно, и известный нам пучок поверхностей Дарбу. Остановимся на второй паре решений. Оба эти решения дают одно и то же направление — то или иное направление Дарбу. Для этих направлений

$$v'' = -\frac{1}{3}\varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} + \frac{1}{3}\varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}} \frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial v}.$$

Следовательно, коэфициент при $\frac{1}{2} z^2$ в уравнении (3) имеет вид

$$-\varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \gamma_u + \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}} \gamma \frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v} - \frac{\beta}{\gamma} \gamma^2 - \frac{1}{3}\varepsilon\gamma \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} + \frac{1}{3}\varepsilon^2\gamma \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}} \frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial v} =$$

$$= -\frac{1}{3}\varepsilon \sqrt[3]{\beta\gamma^2} \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} + \frac{2}{3}\varepsilon^2 \sqrt[3]{\gamma\beta^2} \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v} - \beta\gamma.$$

Аналогично напишется коэфициент при $\frac{1}{2} z^2$ в уравнении (4)

$$-\frac{1}{3}\varepsilon^2 \sqrt[3]{\gamma\beta^2} \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v} + \frac{2}{3}\varepsilon \sqrt[3]{\beta\gamma^2} \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} - \beta\gamma.$$

Чтобы эти коэфициенты были равны, необходимо равенство

$$\varepsilon \sqrt[3]{\gamma\beta^2} \frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v} = \sqrt[3]{\beta\gamma^2} \frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}.$$

Равенство может быть выполнено лишь в том случае, если $\varepsilon = 1$. Однако тогда мы будем иметь лишь иначе записанное равенство (1), справедливое для канонических поверхностей. Таким образом, лишь на канонических поверхностях и лишь вдоль действительной линии Дарбу конструкция Бомпиани и Клобучека приводит к одной и той же поверхности второго порядка, независимо от того, какая из асимптотических касательных берется для ее построения. Уравнение этой поверхности в тетраэдре (A) (заметим, что этот тетраэдр автополярен относительно поверхности Ли) имеет вид

$$xy - z + \sqrt[3]{\beta\gamma^2}\, yz + \sqrt[3]{\gamma\beta^2}\, xz - \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} - \beta\gamma\right) = 0. \tag{5}$$

Назовем такую поверхность поверхностью $Д$.

§ 4. Пучок поверхностей Дарбу в тетраэдре (A) имеет уравнение

$$xy - z - \frac{1}{2}\nu z^2 = 0.$$

Вычитая это уравнение из уравнения (5), получим поверхность, проходящую через линию пересечения двух данных поверхностей

$$\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\, yz + \sqrt[3]{\gamma\beta^2}\, xz - \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} - \beta\gamma - \nu\right) = 0.$$

Эта поверхность распадается на пару плоскостей:

1. $z = 0$, т. е. касательную плоскость. В ней лежит общая обеим поверхностям пара асимптотических касательных.

2. $$\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\, y + \sqrt[3]{\gamma\beta^2}\, x - \frac{1}{2} z \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u} - \beta\gamma - \nu\right) = 0.$$

Это — пучок плоскостей, параметром которого является коэфициент при z. Все эти плоскости проходят через прямую

$$z = 0, \quad \frac{y}{z} = -\frac{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}} = -\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Но это — касательная Дарбу. Следовательно, пучок поверхностей Дарбу пересекает поверхность $Д$ по плоским кривым, плоскости которых проходят через касательную Дарбу.

§ 5. Произвольная прямая канонической плоскости в тетраэдре (A) имеет направляющие параметры

$$l = \frac{1}{4}(1 + \theta F)\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}, \quad m = \frac{1}{4}(1 + \theta F)\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}. \tag{b'}$$

Этой прямой в полярном соответствии относительно пучка поверхностей Дарбу соответствует прямая

$$\frac{1}{4}(1 + \theta F)\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}\, x + \frac{1}{4}(1 + \theta F)\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}\, y - 1 = 0. \tag{c}$$

Произвольной прямой l, m в полярном соответствии относительно поверхности $Д$ соответствует прямая

$$(m+\sqrt[3]{\gamma\beta^2})\,x + (l+\sqrt[3]{\beta\gamma^2})\,y-1=0. \tag{6}$$

В частности, для канонической прямой в силу равенств (2) и (b′)

$$\left[\frac{1}{4}(1+\theta F)+\theta\right]\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}x+\left[\frac{1}{4}(1+\theta F)+\theta\right]\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}y-1=0. \tag{d}$$

Мы видим, что пучки прямых (c) и (d) совпадают. Следовательно, канонической плоскости соответствует одна и та же точка касательной плоскости в полярном соответствии как относительно пучка поверхностей Дарбу, так и относительно поверхности Д.

§ 6. Прямая полюсов в обобщенной конструкции Грина имеет уравнение на касательной плоскости

$$\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}-m\right)x+\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b+\frac{h'}{\gamma}-l\right)y-3=0$$

или для тетраэдра (A) и канонических поверхностей

$$\left[(1+\theta F)\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}-m\right]x+\left[(1+\theta F)\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}-l\right]y-3=0. \tag{7}$$

Потребуем, чтобы прямые (6) и (7) совпадали. Это приведет к равенствам

$$\frac{(1+\theta F)\dfrac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}-m}{m+\theta\dfrac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}}=\frac{(1+\theta F)\dfrac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}-l}{l+\theta\dfrac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}}=3.$$

Отсюда

$$l=\frac{1}{4}(1+\theta F-3\theta)\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u},\quad m=\frac{1}{4}(1+\theta F-3\theta)\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}.$$

Но это — прямая канонической плоскости. Таким образом, обобщенная конструкция Грина приводит лишь к прямым, лежащим в канонической плоскости не только в полярном соответствии относительно пучка поверхностей Дарбу, но и относительно поверхности $Д$.

§ 7. Если рассматривать пару прямых, находящихся в полярном соответствии относительно пучка поверхностей Дарбу, то, как известно, единственной парой прямых, развертывающиеся поверхности конгруэнций которых отвечают одной и той же системе линий на поверхности, является пара директрис Вильчинского (С. П. Фиников, стр. 95). Рассмотрим тот же вопрос для прямых, находящихся в полярном соответствии относительно поверхности $Д$.

Развертывающиеся поверхности конгруэнции прямой l, m пересекают данную поверхность по двум системам линий, диференциальное уравнение которых суть

$$(m_u+\beta l+2am-m^2+a_3^2)\,du^2-(l_v+2bl+\gamma m-l^2+b_3')\,dv^2+$$
$$+(m_v-l_u+b_3^2-a_3')\,du\,dv=0 \tag{A}$$

(С. П. Фиников, стр. 93).

Пусть некоторая прямая касательной плоскости проходит через точки

$$N_1=\theta_1 M+M_1, \quad N_2=\theta_2 M+M_2,$$

где θ_1, θ_2 — некоторые функции от u, v.

Диференциальное уравнение линий на данной поверхности, отвечающих развертывающимся поверхностям конгруэнции прямой N_1N_2, имеет вид

$$[N_1, N_2, N_{1u}\,du+N_{1v}\,dv, \quad N_{2u}\,du+N_{2v}\,dv]=0 \tag{8}$$

(С. П. Фиников, стр. 115).

Найдя производные N_{1u}, N_{1v} и т. д., мы по таблице компонент нормального тетраэдра получим

$$[\theta_1 M+M_1,\ \theta_2 M+M_2,\ (\theta_{1u}\,du+\theta_{1v}\,dv)M+$$
$$+\sum_k[(\theta_1 a_0^k+a_1^k)\,du+(\theta_1 b_0^k+b_1^k)\,dv]M_k,$$
$$(\theta_{2u}\,du+\theta_{2v}\,dv)M+\sum_k[(\theta_2 a_0^k+a_2^k)\,du+(\theta_2 b_0^k+b_2^k)\,dv]M_k]=0.$$

Развертывая левую часть этого уравнения, после сокращения на $(MM_1M_2M_3)$ получим

$$(\theta_{1u}-\beta\theta_2+2a\theta_1-\theta_1^2+a_1^0)\,du^2-(\theta_{2v}-\gamma\theta_1+2b\theta_2-\theta_2^2+b_2^0)\,dv^2+$$
$$+(\theta_{1v}-\theta_{2u}+b_1^0-a_2^0)\,du\,dv=0. \tag{B}$$

Уравнение прямой, полярно сопряженной прямой l, m относительно поверхности $Д$, имеет вид

$$(m+\sqrt[3]{\gamma\beta^2})\,x+(l+\sqrt[3]{\beta\gamma^2})\,y-1=0.$$

Так как θ_1 и θ_2 суть величины, обратные соответственно абсциссе и ординате тех точек, в которых прямая N_1N_2 пересекает оси ox и oy, то в данном случае

$$\theta_1=m+\sqrt[3]{\gamma\beta^2}, \quad \theta_2=l+\sqrt[3]{\beta\gamma^2}.$$

Проверим, совпадают ли коэфициенты при $du\,dv$ в уравнениях (A) и (B). Действительно, так как $a_2^0-a_3^1=b_1^0-b_3^2$ (в силу условий совместности для компонент нормального тетраэдра), то для совпадения коэфициентов должно иметь место равенство

$$m_v-l_u=\theta_{1v}-\theta_{2u}$$

или

$$m_v-l_u=(m+\sqrt[3]{\gamma\beta^2})_v-(l+\sqrt[3]{\beta\gamma^2})_u,$$

откуда

$$(\sqrt[3]{\gamma\beta^2})_v-(\sqrt[3]{\beta\gamma^2})_u=0$$

или

$$\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\,\frac{\partial \ln\gamma\beta^2}{\partial v}=\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u}.$$

Но это — равенство (1). Следовательно, для совпадения уравнений (A) и (B) необходимо, чтобы коэфициенты при квадратах диференциалов были равны. Сравниваем коэфициенты при du^2:

$$m_u+\beta l+2am-m^2+a_3^2=\theta_{1u}+a_1^0-\theta_1^2+2a\theta_1-\beta\theta_2$$

или

$$m_u+\beta l+2am-m^2+a_3^2=(m+\sqrt[3]{\gamma\beta^2})_u+$$
$$+a_1^0-(m+\sqrt[3]{\gamma\beta^2})^2+2a(m+\sqrt[3]{\gamma\beta^2})-\beta(l+\sqrt[3]{\beta\gamma^2}).$$

Приводя подобные члены и учитывая, что для тетраэдра (А) $a_3^2=a_1^0$, $b_2^1=b_2^0$, получим

$$\beta l+\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\,m+\beta\sqrt[3]{\beta\gamma^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial v}\sqrt[3]{\gamma\beta^2}-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\gamma\beta^2})_u=0.$$

Это — одно уравнение для двух неизвестных l, m. Другое уравнение получим, сравнивая коэфициенты при dv^2:

$$\gamma m+\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,l+\gamma\sqrt[3]{\gamma\beta^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}\sqrt[3]{\beta\gamma^2}-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{\beta\gamma^2})_v=0.$$

Покажем, что эти уравнения совпадают. Для этого разделим первое на β, второе — на $\sqrt[3]{\beta\gamma^2}$

$$l+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}\,m+\sqrt[3]{\beta\gamma^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}-\frac{1}{2}\frac{(\sqrt[3]{\gamma\beta^2})_u}{\beta}=0,$$
$$l+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}\,m+\sqrt[3]{\beta\gamma^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{(\sqrt[3]{\beta\gamma^2})_v}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}=0.$$

Для совпадения этих уравнений необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial\ln\gamma}{\partial u}\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}+\frac{(\sqrt[3]{\gamma\beta^2})_u}{\beta}=\frac{\partial\ln\beta}{\partial v}+\frac{(\sqrt[3]{\beta\gamma^2})_v}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}$$

или

$$\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}\,\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}=\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v}.$$

Но это — лишь иначе написанное равенство (1). Следовательно, имеем лишь одно уравнение, которое определит некоторую плоскость. Записывая ее уравнение в виде

$$\sqrt[3]{\beta}\,x+\sqrt[3]{\gamma}\,y+\left(\sqrt[3]{\beta^2\gamma^2}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\gamma}\,\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}\right)z=0,$$

легко усмотреть, что эта плоскость является соприкасающейся плоскостью линии Дарбу. Таким образом, конструкция, приводящая в случае поверхностей Дарбу лишь к директрисе Вильчинского, в случае поверхности *Д* приводит к произвольной прямой, лежащей в плоскости, соприкасающейся с линией Дарбу.

В силу того, что коэфициенты при $du\,dv$ в уравнениях (А) и (В) совпадают, при обращении в нуль одного обращается в нуль также и другой. А это означает, что если конгруэнция некоторой прямой сопряжена поверхности, то конгруэнция прямой, полярно сопряженной с ней относительно поверхности *Д*, гармонична поверхности.

§ 8. Как известно, конгруэнция прямой l, m сопряжена с поверхностью, если выполнено равенство

$$m_v+\frac{1}{2}\beta\gamma-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln\gamma}{\partial u\,\partial v}=l_u+\frac{1}{2}\beta\gamma-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln\beta}{\partial u\,\partial v}$$

или

$$m_v-l_u=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial u\,\partial v}. \tag{9}$$

В случае прямой канонической плоскости

$$m=\bar\theta\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u},\quad l=\bar\theta\frac{\partial \ln\gamma\beta^2}{\partial v},$$

где

$$\bar\theta=\frac{1}{4}(1+\theta F)=\bar\theta\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u}\right)=\bar\theta\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial \ln\gamma\beta^2}{\partial v}\right).$$

Здесь в скобках записаны аргументы функции, равные между собой, причем для m мы воспользуемся аргументом в первой форме, для l — во второй. Мы имеем

$$m_v=\bar\theta'\cdot\left[-\frac{(\sqrt[3]{\gamma\beta^2})_v}{(\sqrt[3]{\gamma\beta^2})^2}\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial^2 \ln\beta\gamma^2}{\partial u\,\partial v}\right]\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u}+\bar\theta\cdot\frac{\partial^2 \ln\beta\gamma^2}{\partial u\,\partial v},$$

$$l_u=\theta'\cdot\left[-\frac{(\sqrt[3]{\beta\gamma^2})_u}{(\sqrt[3]{\beta\gamma^2})^2}\frac{\partial \ln\gamma\beta^2}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial^2 \ln\gamma\beta^2}{\partial u\,\partial v}\right]\frac{\partial \ln\gamma\beta^2}{\partial v}+\bar\theta\cdot\frac{\partial^2 \ln\gamma\beta^2}{\partial u\,\partial v}.$$

Следовательно, учитывая равенство (1), получим

$$m_v-l_u=\bar\theta'\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u}\frac{\partial^2 \ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial u\,\partial v}+\bar\theta\frac{\partial^2 \ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial u\,\partial v}.$$

Равенство (9) примет вид

$$\left(\bar\theta'+\bar\theta-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 \ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial u\,\partial v}=0. \tag{10}$$

Равенство будет выполнено, если

$$\bar\theta'+\bar\theta-\frac{1}{2}=0.$$

Решая это диференциальное уравнение, получим

$$\bar\theta=ce^{-x}+\frac{1}{2}\qquad\left(x=\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u}\right),$$

где c — произвольное постоянное.

При $c=0$ мы получаем $\bar\theta=\frac{1}{2}$, т. е. нормаль Фубини. Таким образом, прямые канонической плоскости, конгруэнции которых сопряжены поверхности, имеют направляющие параметры

$$l=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln\gamma\beta^2}{\partial v}+c\sqrt[3]{\beta\gamma^2},\quad m=\frac{1}{2}\frac{\partial \ln\beta\gamma^2}{\partial u}+c\sqrt[3]{\gamma\beta^2}.$$

Эти прямые образуют пучок с параметром c.

Если

$$\frac{\partial^2 \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

то равенство (10) выполнится для всех прямых канонической плоскости. При надлежащем выборе параметров можно получить $\beta = \gamma$. Равенство (1) примет вид $\beta_u = \beta_v$, т. е. $\beta = f(u+v)$. Оценим класс исследуемых поверхностей. Подставляя функцию f в уравнения $(\mathrm{II}_1)-(\mathrm{II}_3)$ (С. П. Фиников, стр. 42), найдем

$$\frac{\partial A}{\partial u} = p(u+v), \quad \frac{\partial B}{\partial v} = p(u+v),$$

где

$$p(u+v) = \frac{1}{2}\left[(f^2)' - (\ln f)'''\right] + \frac{1}{2}(\ln f)'\left[f^2 - (\ln f)''\right],$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} f + 2Af' = \frac{\partial B}{\partial u} f + 2Bf'.$$

Положим

$$\frac{\partial A}{\partial v} f + 2Af' = \eta.$$

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\eta}{f} - 2A(\ln f)', \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\eta}{f} - 2B(\ln f)'.$$

Условия совместности для A и B имеет вид

$$p' = \left(\frac{\eta}{f}\right)_u - 2A_u(\ln f)' - 2A(\ln f)'' = \left(\frac{\eta}{f}\right)_u - 2p(\ln f)' - 2A(\ln f)'',$$

$$p' = \left(\frac{\eta}{f}\right)_v - 2p(\ln f)' - 2B(\ln f)''.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\eta}{f}\right)_u = p' + 2p(\ln f)' + 2A(\ln f)'', \quad \left(\frac{\eta}{f}\right)_v = p' + 2p(\ln f)' + 2B(\ln f)''.$$

Условие совместности этих уравнений дает

$$p'' + [2p(\ln f)']' + 2A(\ln f)''' + 2A_v(\ln f)'' =$$
$$= p'' + [2p(\ln f)']' + 2B(\ln f)''' + 2B_u(\ln f)'',$$

или

$$A(\ln f)''' + (\ln f)''\left[\frac{\eta}{f} - 2A(\ln f)'\right] = B(\ln f)''' + (\ln f)''\left[\frac{\eta}{f} - 2B(\ln f)'\right]$$

или

$$(A-B)\left[(\ln f)''' - 2(\ln f)'(\ln f)''\right] = 0.$$

Если f — произвольная функция, то $A = B$. Но тогда $A_u = A_v$, т. е. $A = \psi(u+v)$. Функция ψ определится из уравнения

$$\psi' = \frac{1}{2}\left[2ff' - (\ln f)''' + ff' - (\ln f)'(\ln f)''\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(f^2)' - (\ln f)''' - \frac{1}{2}\left((\ln f)'^2\right)'\right].$$

Интегрируя, найдем

$$\psi=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}f^2-(\ln f)''-\frac{1}{2}(\ln f)'^2\right]+c,$$

где c — произвольная постоянная.

Таким образом, класс исследуемых поверхностей зависит от одной функции одного аргумента.

Исследуем случай, когда

$$(\ln f)'''-2(\ln f)'(\ln f)''=0. \tag{P}$$

Интегрируя, найдем

$$\ln f=-\ln(\alpha_2e^{-\alpha x}-\alpha_1e^{\alpha x}),$$

где $x=u+v$; α_1, α_2, α_3 — произвольные постоянные.

В этом случае

$$\frac{\partial A}{\partial u}=\frac{\partial B}{\partial v}=\frac{3}{2}[ff'-(\ln f)'(\ln f)''].$$

Интегрируя, найдем

$$A=\frac{3}{4}[f^2-(\ln f)'^2]+\varphi(v),\quad B=\frac{3}{4}[f^2-(\ln f)'^2]+\lambda(u),$$

$\varphi(v)$, $\lambda(u)$ — произвольные функции.

В таком случае

$$\left(\frac{\eta}{f}\right)_u=\frac{3}{4}\{(f^2)''-[(\ln f)'^2]''\}+2(\ln f)'\frac{3}{4}\{(f^2)'-[(\ln f)'^2]'\}+$$

$$+2(\ln f)''\left\{\frac{3}{4}[(f^2)-(\ln f)'^2]+\varphi(v)\right\}.$$

Интегрируя, найдем

$$\frac{\eta}{f}=\frac{3}{4}\{(f^2)'-[(\ln f)'^2]'\}+\frac{3}{2}(\ln f)'[f^2-(\ln f)'^2]+2\varphi(v)(\ln f)'+\chi(v), \tag{α}$$

где $\chi(v)$ — произвольная функция.

Аналогично получим

$$\frac{\eta}{f}=\frac{3}{4}\{(f^2)'-[(\ln f)'^2]'\}+\frac{3}{2}(\ln f)'[f^2-(\ln f)'^2]+2\lambda(u)(\ln f)'+k(u), \tag{β}$$

где $k(u)$ — произвольная функция.

Сравнивая (α) и (β), находим

$$2\varphi(v)(\ln f)'+\chi(v)=2\lambda(u)(\ln f)'+k(u). \tag{I}$$

Подставляя в уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial v}=\frac{\eta}{f}-2A(\ln f)'$$

вместо A, η найденные значения, получим

$$\varphi'(v)=\chi(v). \tag{II}$$

Аналогично

$$\lambda'(u)=k(u). \tag{III}$$

В силу (II) и (III) равенство (I) примет вид

$$2\varphi(v)(\ln f)' + \varphi'(v) = 2\lambda(u)(\ln f)' + \lambda'(u) \tag{I'}$$

Продиференцируем это равенство два раза по v

$$2\varphi'(\ln f)' + 2\varphi(\ln f)'' + \varphi'' = 2\lambda(\ln f)'', \tag{I''}$$

$$2\varphi''(\ln f)' + 4\varphi'(\ln f)'' + 2\varphi(\ln f)''' + \varphi''' = 2\lambda(\ln f)'''.$$

Исключая отсюда λ, получим

$$2\varphi'[(\ln f)'(\ln f)''' - 2(\ln f)''^2] - \varphi'''(\ln f)'' = 0. \tag{IV}$$

При этом мы учли равенство (P).

Мы имеем

$$(\ln f)' = \alpha\frac{\alpha_2 e^{-\alpha x} + \alpha_1 e^{\alpha x}}{\alpha_2 e^{-\alpha x} - \alpha_1 e^{\alpha x}}, \quad (\ln f)'' = \frac{4\alpha_1\alpha_2\alpha^2}{(\alpha_2 e^{-\alpha x} - \alpha_1 e^{\alpha x})^2},$$

$$(\ln f)''' = \frac{8\alpha_1\alpha_2\alpha^3(\alpha_2 e^{-\alpha x} + \alpha_1 e^{\alpha x})}{(\alpha_2 e^{-\alpha x} - \alpha_1 e^{\alpha x})^3}.$$

Полученные выражения подставляем в равенство (IV). После сокращения на $\dfrac{4\alpha_1\alpha_2\alpha^2}{(\alpha_2 e^{-\alpha x} - \alpha_1 e^{\alpha x})^2} = (\ln f)''$ получим

$$4\alpha^2\varphi' - \varphi''' = 0.$$

Решая это диференциальное уравнение, найдем

$$\varphi(v) = c_2 e^{-2\alpha v} + c_1 e^{2\alpha v} + c,$$

где c, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Подставляя в уравнение (I''), найдем

$$\lambda(u) = \frac{c_2\alpha_1}{\alpha_2} e^{2\alpha u} + \frac{c_1\alpha_2}{\alpha_1} e^{-2\alpha u} + c.$$

Нетрудно проверить, что найденные функции $\varphi(v)$ и $\lambda(u)$ удовлетворяют уравнению (I').

Последние рассуждения теряют свою силу, если $(\ln f)'' = 0$. В этом случае уравнение (I'') принимает вид

$$2\varphi'(\ln f)' + \varphi'' = 0.$$

Но из равенства $(\ln f)'' = 0$ следует, что $(\ln f)' = -\dfrac{c}{2} = \text{const}$. Следовательно,

$$\varphi'' = c\varphi'.$$

Интегрируя, находим

$$\varphi(v) = \frac{1}{c} e^{cv} + c_1.$$

Если $c = 0$, т. е. $f = \text{const}$, то $\varphi'' = 0$, откуда $\varphi(v) = cu + c_1$. В силу равенства (I') будем иметь $\lambda(u) = cu + c_2$ (c, c_1, c_2 — произвольные постоянные).

Следовательно,

$$A = cv + C_1, \quad B = cu + C_2, \quad \beta = \gamma = \text{const}.$$

Это как раз тот случай, который рассматривает С. П. Фиников на стр. 108. На соответствующих поверхностях все прямые канонического пучка совпадают.

§ 9. Каноническое разложение Вильчинского имеет вид

$$z=xy-\frac{x^3+y^3}{3}+Ix^4+Jy^4+\ldots, \tag{r}$$

где I, J — инварианты Вильчинского (С. П. Фиников, стр. 89). Найдем значения этих инвариантов. Диференцируя (r) по x, y, u, найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-x^2+4Ix^3+\ldots,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-y^2+4Jy^3+\ldots,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial I}{\partial u}x^4+\frac{\partial J}{\partial u}y^4+\ldots$$

Подставим эти производные в последнее тождество (13) (С. П. Фиников, стр. 77). Туда же подставим вместо z его значение по формуле (r) и вместо производных $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ и λ — их значения, найденные из тех же формул (13). Мы будем иметь

$$(y-x^2+4Ix^3+\ldots)\Big[-a_0^1+x(a_0^0-a_1^1)-ya_2^1+x^2a_1^0+xya_2^0-$$
$$-(a_3^1-xa_3^0)\Big(xy-\frac{x^3+y^3}{3}+Ix^4+Jy^4+\ldots\Big)\Big]+$$
$$+(x-y^2+4Jy^3+\ldots)\Big[-a_0^2-xa_1^2+y(a_0^0-a_2^2)+xya_1^0+y^2a_2^0-$$
$$-(a_3^2-ya_3^0)\Big(xy-\frac{x^3+y^3}{3}+Ix^4+Jy^4+\ldots\Big)\Big]+$$
$$+\frac{\partial I}{\partial u}x^4+\frac{\partial J}{\partial u}y^4+\ldots+a_0^3+xa_1^3+ya_2^3=\Big[-a_3^3+a_0^0+xa_1^0+ya_2^0+$$
$$+a_3^0\Big(xy-\frac{x^3+y^3}{3}+Ix^4+Jy^4+\ldots\Big)\Big]\Big(xy-\frac{x^3+y^3}{3}+Ix^4+Jy^4+\ldots\Big).$$

Сравниваем коэфициенты

$$\begin{array}{lll}
\text{при } y & -a_0^1+a_2^3=0, & \text{отсюда } a_0^1=a_2^3,\\
\text{при } x & -a_0^2+a_1^3=0, & \text{отсюда } a_0^2=a_1^3,\\
\text{при } x^2 & a_0^1-a_1^2=0, & \text{отсюда } a_0^1=a_1^2,\\
\text{при } y^2 & -a_2^1+a_0^2=0, & \text{отсюда } a_0^2=a_2^1,\\
\text{при } x^3 & -4a_0^1I-(a_0^0-a_1^1)=-\frac{1}{3}(a_0^0-a_3^3), & \\
\text{при } x^2y & a_1^0+a_2^1+a_1^0-a_3^2=a_1^0. &
\end{array} \tag{e}$$

Так как $a_2^1=0$ (см. ниже), то $a_1^0=a_3^2$.

Диференцируя разложение (r) по v, аналогично получим равенства

$$b_0^2=b_1^3,\quad b_0^1=b_2^3,\quad b_0^2=b_2^1,\quad b_0^1=b_1^2,\quad b_2^0=b_3^1.$$

Из разложения (r) видно, что вершины M_1, M_2 подвижного тетраэдра лежат на касательных к асимптотическим u, v. Следовательно,

$$a_0^2=a_0^3=b_0^1=b_0^3=a_1^3=b_2^3=a_2^1=b_1^2=0$$

(С. П. Фиников, стр. 33—34).

Полагая $a_0^1 = a$, $b_0^2 = b$, будем иметь

$$a_2^3 = a_1^2 = a, \quad b_1^3 = b_2^1 = b.$$

В таком случае условия совместности (С. П. Фиников, стр. 31) для $i=1$, $k=3$; $i=0$, $k=2$; $i=2$, $k=1$ дадут соответственно

$$\frac{\partial \ln b}{\partial u} = a_1^1 - a_3^3, \quad \frac{\partial \ln b}{\partial u} = a_0^0 - a_2^2, \quad \frac{\partial \ln b}{\partial u} = a_2^2 - a_1^1.$$

Отсюда

$$a_0^0 - a_1^1 = 2\frac{\partial \ln b}{\partial u}, \quad a_0^0 - a_3^3 = 3\frac{\partial \ln b}{\partial u}.$$

Из равенства (е) найдем

$$I = -\frac{1}{4a}\frac{\partial \ln b}{\partial u}.$$

По формулам (40) (С. П. Фиников, стр. 46) получим

$$\beta = \frac{a^2}{b}, \quad \gamma = \frac{b^2}{a}, \quad \text{отсюда } b = \sqrt[3]{\beta\gamma^2}, \quad a = \sqrt[3]{\gamma\beta^2}.$$

Следовательно,

$$I = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}.$$

Аналогично найдем

$$J = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}.$$

Таким образом, найденные ранее инварианты поверхности $\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}$ лишь постоянным множителем $-\frac{1}{12}$ отличаются от соответствующих инвариантов Вильчинского I, J. Следовательно, на канонических поверхностях инварианты Вильчинского равны. Как известно, такие поверхности допускают проективные преобразования (оставляющие неизменными члены четвертого порядка в разложении Вильчинского), при которых единственными неподвижными прямыми оказываются прямые канонического пучка (С. П. Фиников, стр. 89—90).

Получена 26 ноября 1951 г.
Запорожье