Обобщение некоторых теорем суммирования

Б. Г. Серебряков

1. Пусть задан числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

где a_n — действительные числа. Составим степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{2}$$

предполагая, что этот ряд сходится при $0 < x < 1$. Исходный ряд (1) называют суммируемым методом Пуассона, если

$$\lim_{x \to 1} f(x) = S, \tag{3}$$

где S — конечное число.

Известно, что метод суммирования Пуассона принадлежит к числу регулярных методов, т. е. если ряд (1) сходится к некоторой сумме S, то он суммируем методом Пуассона к тому же числу S. Обратное предложение, вообще говоря, не имеет места, т. е. существуют числовые ряды, которые расходятся, но суммируются методом Пуассона (например, ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$).

Возникла проблема обращения: если ряд (1) суммируем методом Пуассона, то какие дополнительные условия нужно наложить на этот ряд (например, ограничения на коэфициенты a_n), чтобы этот ряд был сходящимся.

Эта проблема обращения была впервые решена Таубером [1], а затем обобщена Литтльвудом [2] и др. Теорема Таубера состоит в следующем, если ряд (1) суммируется методом Пуассона, т. е. имеет место равенство (3) и, кроме того, коэфициенты ряда удовлетворяют условию

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

тогда, при наличии этих условий, исходный ряд (1) сходится к той же сумме (s).

Теорема Таубера, как показано впоследствии Литтльвудом [2], остается справедливой, если порядок малости коэфициентов удовлетворяет более широкому условию

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Рассмотрим эти вопросы под более широким углом зрения. Для этой цели введем следующие четыре числа:

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = d, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n} a_\nu = D; \\ &(\text{б}) \qquad \underline{\lim}_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = d', \quad \overline{\lim}_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = D', \end{aligned} \tag{6}$$

где d, D, d', D' — конечные числа или бесконечные $(-\infty, +\infty)$.

Между этими четырьмя числами существуют соотношения

$$d \leqslant d' \leqslant D' \leqslant D\text{[1]}. \tag{7}$$

Нас интересует следующая задача: в каких случаях имеют место равенства:

$$d = d', \quad D = D'. \tag{α}$$

Известно, что если взять тауберовскую мажоранту (4): $a_n = 0\left(\frac{1}{n}\right)$, тогда имеют место равенства (α) [2]. Известно также, что для литтльвудовской мажоранты (5) $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ равенства (α), вообще говоря, нарушаются, за исключением того случая, когда

$$d = -\infty, \quad D = +\infty\text{[3]}.$$

Существуют классы рядов промежуточного между тауберовским (4) и литтльвудовским (5) типа; один из этих классов указан М. П. Щегловым [4], мы его и рассмотрим.

Обозначим через a_n^+ неотрицательные члены ряда (1), а через a_n^- отрицательные члены этого же ряда. Рассмотрим ряд (1), удовлетворяющий условию

$$a_n^+ = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n^- = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{R}$$

или

$$a_n^+ = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n^- = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{R'}$$

Относительно этих рядов справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть ряд* (1) *удовлетворяет условию* (R) *или* (R'), *тогда имеют место равенства* (α).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = e^{-\frac{1}{u}}$ степенной ряд (2) можно представить в форме

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{u}}; \tag{8}$$

ряд сходится при $0 < u < \infty$.

---

[1] См. [6], стр. 46—50.

[2] См. [5].

[3] См. [5].

Ряд (8), при помощи преобразования Абеля, представим в виде интеграла

$$\varphi(u) = \frac{1}{u}\int_0^\infty s(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx,$$

где

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ \sum\limits_{n=1}^{[x]} a_n & \text{при } 1 \leqslant x < \infty. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим класс рядов (R). Предположим, что для данного ряда

$$d = 0, \quad 0 < D \leqslant +\infty, \tag{10}$$

и докажем, что $d' = 0$.

Образуем последовательность индексов $n_\nu = (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ такую, что

$$\begin{gathered} s_{n_\nu} \to 0\,[1] \quad \text{при } n_\nu \to \infty, \\ n_\nu < n_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \\ \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} \to \infty \quad \text{при } \nu \to \infty. \end{gathered} \tag{11}$$

Пусть

$$a_n^+ = \frac{\varepsilon_n}{n}, \quad \text{где } 0 \leqslant \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{12}$$

Обозначим

$$\max_{\substack{k \\ (0 \leqslant k \leqslant n_{\nu+1} - n_\nu)}} \varepsilon_{n_\nu + k} = \mu_{n_\nu} \tag{13}$$

Возьмем вспомогательную последовательность $r_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ со свойствами

(а) r_ν — натуральные числа,

(б) $1 < r_\nu < n_{\nu+1} - n_\nu$, (14)

(в) $r_\nu = \left[n_\nu \left(e^{\frac{1}{\sqrt{\mu_{n_\nu}}}} - 1 \right) \right]$.[2)]

Построим вспомогательную функцию $s^*(x)$, где $0 \leqslant x < \infty$, следующим образом:

$$s^*(x) = \begin{cases} s(x) & \text{при } 0 \leqslant x < n_\nu + r_\nu \\ \mu_{n_\nu}\left(\lg \dfrac{x}{n_\nu} + |s'_{n_\nu}| \right) & \text{при } n_\nu + r_\nu \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$|s'_{n_\nu}| = \max_{\substack{r' \\ (0 \leqslant r' \leqslant r_\nu)}} |s_{n_\nu + r'}|.$$

---

[1] s_n — частные суммы данного ряда.

[2)] Квадратные скобки: [ ] — символ антье.

Составим следующий интеграл Абеля—Пуассона:

$$\psi(u)=\frac{1}{u}\int_{0}^{\infty} s^*(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx. \tag{16}$$

Этот интеграл, очевидно, сходится при $0 < u < \infty$.
Из построения следует

$$s(x)\leqslant s^*(x),$$

откуда получаем

$$\varphi(u)\leqslant\psi(u). \tag{17}$$

Мы докажем, что

$$\psi(u)=o(1), \tag{18}$$

где

$$u=n_v+r_v, \quad u\to\infty. \tag{18_1}$$

В самом деле, пусть

$$u=n_v+r_v \tag{19}$$

(v — как угодно большое натуральное число).

Разложим интеграл (16) следующим образом:

$$\psi(u)=\frac{1}{u}\int_{0}^{n_v+r_v} s^*(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx+\frac{1}{u}\int_{n_v+r_v}^{\infty} s^*(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx. \tag{20}$$

Оценим каждый из полученных интегралов

$$\frac{1}{u}\int_{0}^{n_v+r_v} s^*(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx=\frac{1}{u}\int_{0}^{n_v+r_v} s(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{u}\int_{0}^{n_v+r_v}(s(x)+\eta(x))\, dx=\frac{1}{n_v+r_v}\int_{0}^{n_v+r_v} s(x)\, dx+o(1), \tag{21}$$

где функция $\eta(x)$, $0\leqslant x<\infty$, такая что

$$\begin{aligned}
&\text{(а)} && 0<\eta(x)\to 0,\quad x\to\infty \\
&\text{(б)} && s(x)+\eta(x)\geqslant 0
\end{aligned} \tag{21_1}$$

(такая функция, очевидно, существует).

Покажем, что

$$\frac{1}{n_v+r_v}\int_{0}^{n_v+r_v} s(x)\, dx=o(1). \quad n_v\to\infty \tag{22}$$

Введем среднеарифметические суммы

$$\sigma_{n_v+r_v-1}=\frac{1}{n_v+r_v}\sum_{n=0}^{n_v+r_v-1} s_n=\frac{1}{n_v+r_v}\int_{0}^{n_v+r_v} s(x)\, dx. \tag{23}$$

Существует соотношение

$$\sigma_{n_\nu+r_\nu-1}=s_{n_\nu+r_\nu-1}-\frac{1}{n_\nu+r_\nu}\sum_{n=0}^{n_\nu+r_\nu-1} na_n,$$

где

$$a_n=s_n-s_{n-1}. \tag{24}$$

Покажем, что

$$s_{n_\nu+r'}\to 0 \quad \text{при} \quad n_\nu\to\infty, \tag{25}$$

где

$$0\leqslant r'\leqslant r_\nu. \tag{25_1}$$

Имеем

$$s_{n_\nu+r'}=\sum_{n=0}^{n_\nu+r'} a_n\leqslant\sum_{n=0}^{n_\nu}a_n+\sum_{k=1}^{r'}a_{n_\nu+k}^{+}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{r_\nu}\frac{\varepsilon_{n_\nu+k}}{n_\nu+k}+o(1)\leqslant\mu_{n_k}\sum_{k=1}^{r_\nu}\frac{1}{n_\nu+k}+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\mu_{n_\nu}\int\limits_{n_\nu}^{n_\nu+r_\nu}\frac{dx}{x}+o(1)=o(1).$$

Отсюда получаем

$$s_{n_\nu+r'}<o(1), \tag{26}$$

где r' удовлетворяет неравенству (25_1).

Из (26) и (3), очевидно, вытекает соотношение (25).

Возьмем сумму, стоящую в равенстве (24), и представим ее в следующем виде:

$$\frac{1}{n_\nu+r_\nu}\sum_{n=0}^{n_\nu+r_\nu-1} na_n=\frac{1}{n_\nu+r_\nu}\sum_{n=0}^{n_\nu}na_n+\frac{1}{n_\nu+r_\nu}\sum_{n=n_\nu+1}^{n_\nu+r_\nu-1}na_n. \tag{27}$$

Покажем, что каждая сумма, стоящая в правой части равенства (27), стремится к нулю при $n_\nu\to\infty$. Действительно, для первой суммы имеем

$$\frac{n_\nu}{n_\nu+r_\nu}\cdot\frac{1}{n_\nu}\sum_{n=0}^{n_\nu}na_n=o(1) \qquad \text{при } n_\nu\to\infty.$$

Для второй суммы найдем

$$\frac{1}{n_\nu+r_\nu}\left|\sum_{n=n_\nu+1}^{n_\nu+r_\nu-1} na_n\right|\leqslant\frac{1}{n_\nu+r_\nu}\Bigg[(n_\nu+1)\left|s_{n_\nu+r_\nu-1}-s_{n_\nu}\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{r_\nu-2}\left|s_{n_\nu+r_\nu-1}-s_{n_\nu+k}\right|\Bigg]\leqslant$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant r'\leqslant r_\nu}\left|s_{n_\nu+r_\nu-1}-s_{n_\nu+r'}\right|\to 0^{1} \quad \text{при } n_\nu\to\infty.$$

Из полученных результатов и соотношений (23) и (24) вытекает (22).

[1] См. формулу (25).

Переходим к оценке второго интеграла, стоящего в правой части равенства (20).

Имеем

$$0<\frac{1}{u}\int\limits_{n_\nu+r_\nu}^{\infty} s^*(x)e^{-\frac{x}{u}}\,dx=\frac{1}{u}\int\limits_{n_\nu+r_\nu}^{\infty}\mu_{n_\nu}\left(\lg\frac{x}{n_\nu}+|s'_{n_\nu}|\right)e^{-\frac{x}{u}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{u}\int\limits_{n_\nu+r_\nu}^{\infty}\mu_{n_\nu}\lg\frac{x}{n_\nu}e^{-\frac{x}{u}}\,dx+o(1)\leqslant\mu_{n_\nu}\int\limits_{n_\nu+r_\nu}^{\infty}e^{-\frac{x}{u}}\frac{dx}{x}+o(1)= \tag{28}$$

$$=\mu_{n_\nu}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-z}}{z}\,dz+o(1)=o(1)\qquad\text{при } n_\nu\to\infty.$$

Используя (17) и (18), получаем

$$d'=\varlimsup_{u\to\infty}\varphi(u)\leqslant\varlimsup_{u\to\infty}\psi(u)\leqslant 0,$$

или

$$d'\leqslant 0. \tag{29}$$

Принимая во внимание общее соотношение $d\leqslant d'$ и пользуясь соотношениями (3) и (29), получаем искомое равенство

$$d'=0. \tag{30}$$

Нетрудно показать, что если

$$-\infty<d<+\infty,\quad 0<D\leqslant+\infty, \tag{3'}$$

то и в этом случае

$$d'=d. \tag{31}$$

При $d=-\infty$ теорема также справедлива $(d'=-\infty)$ [1].

Аналогичным образом устанавливается также равенство

$$D'=D. \tag{32}$$

Соотношение (α) имеет место и для класса рядов (R'), так как этот класс симметричен классу (R) [получается из него путем умножения на -1 всех рядов, входящих в класс (R)]. Классы (R) и (R'), удовлетворяющие теореме 1, являются максимальными классами, так как можно было бы показать, что справедлива

Теорема 2. *Какова бы ни была функция* ω_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, *как угодно медленно растущая, такая что*

(а) $$0<\omega_n<\omega_{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}\infty,$$

(б) $$\frac{\omega_n}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

можно построить ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, *удовлетворяющий условиям*

$$a_n^+=o\left(\frac{1}{n}\right),\qquad |a_n^-|<\frac{\omega_n}{n}$$

$\left(\text{или } a_n^-=o\left(\frac{1}{n}\right),\ |a_n^+|<\frac{\omega_n}{n}\right)$; *для этого ряда не имеют места равенства* (α).

---

[1] См. [5].

2. Пусть снова задан числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

где a_n — действительные числа.

Составим ряд Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}}; \tag{2}$$

ряд сходится при $0 < u < \infty$, последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, удовлетворяет условиям

(а) $$0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to \infty, \quad n \to \infty \tag{3}$$

(б) $$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant \theta > 1 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Ряды Дирихле, удовлетворяющие условию (3б), обычно называют лакунарными. Харди и Литтльвуд в совместной работе [3] доказали теорему о том, что если лакунарный ряд (2) сходится и имеет конечный предел s при $u \to \infty$, то и ряд (1) есть сходящийся и его сумма равна s.

Недавно М. П. Щегловым была сформулирована новая теорема для лакунарных рядов. Он показал [5], что если коэфициенты ряда (1) удовлетворяют условию

$$a_n = o(1), \tag{4}$$

тогда имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} &\text{(а)} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{n} a_v = \underline{\lim}_{u\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}} \\ &\text{(б)} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{n} a_v = \overline{\lim}_{u\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}} \end{aligned}\right\}. \tag{α}$$

Результат М. П. Щеглова допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Равенства* (α) *всегда имеют место, если коэфициенты ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$a_n^+ = o(1), \quad a_n^- = O(1);$$

или

$$a_n^+ = O(1), \quad a_n^- = o(1),$$

где обозначено

$$a_n^+ \geqslant 0, \quad a_n^- < 0.$$

Эта теорема аналогична теореме 1 из § 1 и доказывается тем же методом. Для лакунарных рядов можно также доказать теорему, аналогичную теореме 2 из § 1.

Замечание. В своей рецензии на нашу работу Б. Коренблюм указал, что оба приведенных выше результата (теорема 1 из § 1 и теорема 1 из § 2) могли бы быть объединены в следующей общей теореме[1]:

[1] Мы полностью сохранили формулировку теоремы, данную Б. Коренблюмом

Пусть $s(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ — *вещественная функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале* $(0,\ N)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\text{(а)} \qquad s(0) = 0,$$

$$\text{(б)} \qquad \inf_{t \leq t' \leq \theta t} (s(t') - s(t)) = o(1) \qquad (t \to \infty),$$

$$\text{(в)} \qquad \sup_{t \leq t' \leq \theta t} (s(t') - s(t)) = O(1) \qquad (t \to \infty),$$

где θ — *некоторое число* > 1. *Тогда справедливы соотношения*

$$\varliminf_{t \to \infty} s(t) = \varliminf_{u \to \infty} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}}\, ds(t),$$

$$\varlimsup_{t \to \infty} s(t) = \varlimsup_{u \to \infty} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}}\, ds(t).$$

Доказательство этой теоремы не требует применения новых методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen Mon. für Math. und Phys. 8, (1897), стр. 273—277.

2. I. Littlewood, The Converse of Abel's Theorem on Power Series., Proc. Lond. Math. Soc. (2), 9, (1911), стр. 434—448.

3. G. Hardy, I. Littlewood, „A further note on the converse of Abel's theorem", Proc. Lond. Math. Soc. (2), 25, (1926), стр. 219—236.

4. М. П. Щеглов, О некоторых равенствах, Изв. АН СССР, 9, 1945, стр. 321—328.

5. М. П. Щеглов, О суммировании Пуассона, Матем. сб., т. 18 (60) : 1, 1946, стр. 41—58.

6. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

Получена 12 декабря 1951 г.

г. Молотов