УДК 517.5

Ф. Г. Абдуллаєв (Киргиз.-Тур. ун-т „Манас”, Бішкек; Мерсін. ун-т, Туреччина),
Ю. І. Харкевич (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ БІГАРМОНІЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

We study the problem of approximation of (ψ,β)-differentiable (in Stepanets' sense) functions whose (ψ,β)-derivative belongs to the class H^{α} by biharmonic Poisson integrals in the uniform metric.

Досліджується питання наближення (ψ,β)-диференційовних у розумінні О. І. Степанця функцій, (ψ,β)-похідна яких належить класу H^{α}, бігармонічними інтегралами Пуассона в рівномірній метриці.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_{t} |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(t)\big|\, dt.$

Нехай, далі, функція $f \in L$ і $S[f] = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big)$ — її ряд Фур'є.

Якщо $\psi(k)$ — фіксована послідовність дійсних чисел і β — деяке дійсне число, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f)\cos\!\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f)\sin\!\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right) \tag{1}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то функцію φ, згідно з О. І. Степанцем (див. [1, с. 132]), називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають f^{ψ}_{β}. Множину сумовних функцій f, для яких існує (ψ,β)-похідна, позначають через L^{ψ}_{β}, а підмножину неперервних функцій із L^{ψ}_{β} — через C^{ψ}_{β}.

Якщо $f \in C^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $f^{\psi}_{\beta} \in H^{\alpha}$, $0 \le \alpha < 1$, тобто

$$\big|f^{\psi}_{\beta}(x+h) - f^{\psi}_{\beta}(x)\big| \le |h|^{\alpha}, \quad x, h \in [0, 2\pi],$$

то кажуть, що f належить класу $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$.

Зазначимо, що якщо $\psi(k) = k^{-r},\ r > 0$, то $C^{\psi}_{\beta} = W^{r}_{\beta}$ і $f^{\psi}_{\beta} = f^{(r)}_{\beta}$ — (r,β)-похідна в сенсі Вейля – Надя.

Послідовності $\psi(k)$, які входять в означення (ψ,β)-похідних, взагалі кажучи, можуть бути довільними. Але, як показав О. І. Степанець [1], у багатьох випадках можна обмежитися, без істотних втрат загальності, лише додатними опуклими донизу послідовностями $\psi(k)$, які задовольняють умову $\lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0$.

Будемо вважати, що послідовність $\psi(k)$ є звуженням на множину натуральних чисел функцій неперервного аргумента $t \ge 1$ з множини

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi(t) : \psi(t) > 0,\ \psi(t_1) - 2\psi\big((t_1+t_2)/2\big) + \psi(t_2) \ge 0\ \ \forall t_1, t_2 \in [1,\infty),\ \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\Big\}.$$

Як показано в [1], будь-яка сумовна (неперервна) функція f обов'язково має (ψ, β)-похідну, яка також є сумовною (неперервною), і при цьому ψ належить $\mathfrak{M}$.

Із множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K \ \ \forall t \geq 1\right\},$$

де $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\psi(t)\right)$, а K — деяка стала, яка, можливо, залежить від ψ.

Нехай $U(\rho; x) = U_n(\rho; f; x)$ — полігармонічна функція порядку n в одиничному крузі $|z| < 1$ $(z = \rho e^{ix})$, тобто є розв'язком рівняння

$$\Delta^n U(\rho; x) = 0, \tag{2}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор Лапласа в полярних координатах.

Розв'язок рівняння (2) із заданими граничними умовами

$$U(\rho; x)\Big|_{\rho=1} = f(x), \qquad \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} U(\rho; x)\Big|_{\rho=1} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

де f — сумовна 2π-періодична функція, далі будемо позначати так: $P_n(\rho; f; x) = U_n(\rho; f; x)$, $n \in \mathbb{N}$. Згідно з формулою (3.127.5) із монографії М. П. Тімана [2], розв'язок крайової задачі (2), (3) можна записати у вигляді

$$P_n(\rho; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\rho; n)\left(a_i \cos ix + b_i \sin ix\right), \quad 0 \leq \rho < 1,$$

де $a_i,\ b_i$ — коефіцієнти Фур'є функції f,

$$\lambda_i(\rho; n) = \rho^i \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \rho^2\right)^k Q(k; i),$$

$$Q(k; i) = \frac{i(i+2)(i+4)\ldots(i+2k-2)}{k! 2^k}, \qquad i = 0, 1, \ldots, \quad Q(k; 0) = 1.$$

Поклавши $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, $\delta > 0$, величину $P_n(\rho; f; x)$ запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} P_n(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\delta; n)\left(a_i \cos ix + b_i \sin ix\right), \\ \lambda_i\left(\delta; n\right) = e^{-\frac{i}{\delta}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^k Q(k; i). \end{gathered} \tag{4}$$

При $n = 1, 2$ з формули (4) отримуємо величини

$$P_1(\delta; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$P_2(\delta;f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\big(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\big)\right)e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

які називають відповідно інтегралом Пуассона та бігармонічним інтегралом Пуассона функції f.

Для класів $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ будемо розглядати величину

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha};B_\delta\big)_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}}\big\|f(\cdot)-B_\delta(f;\cdot)\big\|_C.$$

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta)$ є такою, що $\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha};B_\delta\big)_C=\varphi(\delta)+ o\big(\varphi(\delta)\big)$ при $\delta\to\infty$, то говорять (див., наприклад, [3, с. 8]), що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для методу $B_\delta(f;x)$ на класі $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ в метриці простору C.

Вивченню апроксимативних властивостей інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій присвячено роботи [4 – 13], зокрема на класах $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ — роботу [14].

Початок досліджень апроксимативних властивостей бігармонічних інтегралів Пуассона було покладено в роботі С. Канієва [15]. Далі дослідження в даному напрямку були продовжені в роботах [16 – 22]. Що ж стосується питання про апроксимативні властивості бігармонічних інтегралів Пуассона на класах $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$ з точки зору задачі Колмогорова – Нікольського, то воно до цього часу залишалось відкритим. Тому мета даної роботи полягає в отриманні асимптотичних рівностей для величини $\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha};B_\delta\big)_C$ при $\delta\to\infty$.

Справджуються такі твердження.

Теорема 1. *Нехай ψ належить $\mathfrak{M}_0$, функція $g(u)=g(\psi;u):=u^2\psi(u)$ опукла донизу на $[b,\infty)$, $b\ge 1$, $\int_1^{\infty}\frac{g(u)}{u}\,du<\infty$, $0\le\alpha<1$ і $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді при $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha};B_\delta\big)_C=\frac{1}{\delta^2}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}}\left\|\frac{f_0^{(2)}}{2}+f_0^{(1)}\right\|_C+$$

$$+O(1)\left(\frac{1}{\delta^3}\int_1^{\delta}u^{2-\alpha}\psi(u)\,du+\frac{1}{\delta^{2+\alpha}}\int_{\delta}^{\infty}u\psi(u)\,du\right), \tag{5}$$

де $f_0^{(1)}$ і $f_0^{(2)}$ — відповідно (1,0)- і (2,0)-похідна в сенсі Вейля – Надя функції f, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по β і δ.

Доведення. Для довільної функції τ через $\widehat{\tau}(t)$ позначимо її перетворення Фур'є вигляду

$$\widehat{\tau}(t)=\widehat{\tau}(\beta;t):=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right),du,\quad \beta\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

а через $A_\alpha(\tau)$, $0\le\alpha<1$, — величину

$$A_\alpha(\tau)=A_\alpha(\tau;\beta):=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{\alpha}\left|\int_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Для бігармонічного інтеграла Пуассона, аналогічно до формули (6) роботи [21], розглянемо підсумовуючу функцію

$$\tau(u)=\tau(\psi;\delta;u):=\begin{cases}\left(1-(1+\gamma u)\,e^{-u}\right)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le \dfrac{1}{\delta},\\[2mm] \left(1-(1+\gamma u)\,e^{-u}\right)\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge \dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{8}$$

де $\gamma := \dfrac{1}{2}\big(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\big)\delta$. Перетворення Фур'є $\widehat{\tau}(t)$ функції (8) сумовне на всій числовій осі (див. [19]).

Застосовуючи метод доведення леми із роботи [14], можна показати, що якщо функцію (8) подано у вигляді $\tau(u)=\varphi(u)+\nu(u)$, перетворення Фур'є $\widehat{\varphi}(t)$ і $\widehat{\nu}(t)$ вигляду (6) сумовні на всій дійсній осі, інтеграли $A_\alpha(\varphi)$ і $A_\alpha(\nu)$ вигляду (7) збігаються і $A_\alpha(\nu)=o\big(A_\alpha(\varphi)\big)$, $\delta\to\infty$, то при $0\le\alpha<1$ і $\delta\to\infty$ справджується асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha};B_\delta)_C=\psi(\delta)\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}}\|f_\varphi\|_C+O\bigg(\frac{\psi(\delta)}{\delta^{\alpha}}A_\alpha(\nu)\bigg), \tag{9}$$

де $f_\varphi(x):=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\bigg(f^{\psi}_{\beta}\Big(x+\frac{t}{\delta}\Big)-f^{\psi}_{\beta}(x)\bigg)\widehat{\varphi}(t)\,dt.$

Аналогічно до доведення теореми 2.1 із роботи [23], запишемо функцію $\tau(u)$, задану за допомогою співвідношення (8), у вигляді $\tau(u)=\varphi(u)+\nu(u)$, де

$$\varphi(u)=\varphi(\psi;\delta;u):=\begin{cases}\left(\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u}{\delta}\right)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le\dfrac{1}{\delta},\\[2mm] \left(\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u}{\delta}\right)\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{10}$$

$$\nu(u)=\nu(\psi;\delta;u):=\begin{cases}\left(1-(1+\gamma u)e^{-u}-\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{u}{\delta}\right)\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0\le u\le\dfrac{1}{\delta},\\[2mm] \left(1-(1+\gamma u)e^{-u}-\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{u}{\delta}\right)\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u\ge\dfrac{1}{\delta},\end{cases} \tag{11}$$

а $\gamma=\gamma(\delta)=\dfrac{1}{2}\big(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\big)\delta$. Перетворення Фур'є $\widehat{\varphi}(t)$ і $\widehat{\nu}(t)$ функцій (10) і (11) сумовні на всій числовій осі (цей факт встановлено в роботі [19]).

Доведемо збіжність інтеграла $A_\alpha(\varphi)$. Для цього, згідно з теоремою 1 із роботи [24], необхідно і достатньо показати збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{\frac12}u^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big|,\qquad \int\limits_{\frac12}^{\frac32}|u-1|^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big|,\qquad \int\limits_{\frac32}^{\infty}(u-1)\big|d\varphi'(u)\big|,$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\varphi(u)|}{u^{1+\alpha}}\,du,\qquad \int\limits_0^{1}\frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big| \le \frac{\psi(1)}{(2-\alpha)\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)} + \delta^{\alpha}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u\big|d\varphi'(u)\big|,$$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big| \le 2^{\alpha}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u\big|d\varphi'(u)\big|, \qquad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\big|d\varphi'(u)\big| \le \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u\big|d\varphi'(u)\big|,$$

то, повторюючи метод оцінювання інтеграла (21) із роботи [17], оцінюємо інтеграл $\int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} u\big|d\varphi'(u)\big|$ на кожному з проміжків $\left[\frac{1}{\delta}, \frac{b}{\delta}\right]$ і $\left[\frac{b}{\delta}, \infty\right)$ (при $\delta > 2b$).

Враховуючи формули (23), (27) із роботи [17] і опуклість донизу функції $g(u)$, отримуємо співвідношення

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{b}{\delta}} u\big|d\varphi'(u)\big| = \frac{O(1)}{\delta^2\psi(\delta)}, \qquad \int\limits_{\frac{b}{\delta}}^{\infty} u\big|d\varphi'(u)\big| = \frac{O(1)}{\delta^2\psi(\delta)}.$$

Тоді при $\delta \to \infty$ справедливими є оцінки

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big| = \frac{O(1)}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big| = \frac{O(1)}{\delta^2\psi(\delta)}, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\big|d\varphi'(u)\big| = \frac{O(1)}{\delta^2\psi(\delta)}. \tag{13}$$

Далі, враховуючи (10) і те, що $\int_1^{\infty} u\psi(u)\,du < \infty$, маємо

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\big|\varphi(u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du = \frac{5\psi(1)}{4(1-\alpha)\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)} + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{\delta}\right)\frac{\psi(\delta u)}{u^{\alpha}}\,du = \frac{O(1)}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}. \tag{14}$$

Щод оцінити інтеграл $\int_0^1 \frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du$, запишемо його у вигляді суми двох інтегралів

$$\int\limits_0^1 \frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du = \left(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} + \int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\right)\frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du. \tag{15}$$

Введемо функцію $\mu(u) = \dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u}{\delta}$ й оцінимо перший доданок із правої частини (15), додаючи і віднімаючи під знаком модуля в підінтегральній функції величину $\mu(1-u)-\mu(1+u)$. В результаті отримаємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du = \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\big|\mu(1-u)-\mu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du+$$

$$+O(1)\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)-\mu(1-u)+\mu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du. \qquad (16)$$

Із співвідношення (10) випливає, що при $u\in[0,1-1/\delta]$

$$\mu(1-u)=\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1-u)\big)}\varphi(1-u), \qquad \mu(1+u)=\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}\varphi(1+u),$$

тоді

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)-\mu(1-u)+\mu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du \le$$

$$\le \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \big|\varphi(1-u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1-u)\big)}\right| \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \big|\varphi(1+u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}\right| \frac{du}{u^{1+\alpha}}. \qquad (17)$$

З огляду на (12) і (13), на основі леми 1 із роботи Л. І. Баусова [24, с. 4] отримуємо нерівність

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \big|\varphi(1-u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1-u)\big)}\right| \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \big|\varphi(1+u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}\right| \frac{du}{u^{1+\alpha}} \le$$

$$\le KH(\alpha;\varphi)\left(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1-u)\big)}\right| \frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}} \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}\right| \frac{du}{u^{1+\alpha}}\right), \qquad (18)$$

$$H(\alpha;\varphi)=|\varphi(0)|+|\varphi(1)|+\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\big|d\varphi'(u)\big| + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\big|d\varphi'(u)\big|. \qquad (19)$$

Тут і далі через $K, K_i,\ i=1,2,\dots,$ позначено сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Оскільки, згідно з теоремою 3.12.1 із роботи [1, с. 161],

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\dfrac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1-u)\big)}}{u} = \frac{|\psi'(\delta)|\delta}{\psi(\delta)} \le K_1, \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}-1}{u} = \frac{|\psi'(\delta)|\delta}{\psi(\delta)} \le K_1,$$

то функції $\dfrac{1-\psi(\delta)/\psi\big(\delta(1-u)\big)}{u}$ і $\dfrac{\psi(\delta)/\psi\big(\delta(1+u)\big)-1}{u}$ обмежені при всіх $u\in[0,1-1/\delta]$. Тому з (16) – (18) випливає, що

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}}\frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du=\int\limits_0^{1-\frac{1}{\delta}}\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}\,du+O(1)H(\alpha;\varphi). \tag{20}$$

Розглянемо тепер другий доданок із правої частини (15). Очевидно, що

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du=\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{\big|\mu(1-u)-\mu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du+$$

$$+O(1)\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)-\mu(1-u)+\mu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du. \tag{21}$$

З (10) при $u\in\left[1-\dfrac{1}{\delta};1\right]$ маємо

$$\mu(1-u)=\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\varphi(1-u),\qquad \mu(1+u)=\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}\varphi(1+u),$$

тоді, аналогічно до (17) і (18), отримуємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du\le$$

$$\le KH(\alpha;\varphi)\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\right|\frac{du}{u^{1+\alpha}}+\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}\right|\frac{du}{u^{1+\alpha}}\right). \tag{22}$$

Оскільки функції $1-\dfrac{\psi(\delta)}{\psi(1)}$ і $\dfrac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}-1$ обмежені при всіх $u\in\left[1-\dfrac{1}{\delta},1\right]$, $\delta>1$, то

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\left(1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}+\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\left(\frac{\psi(\delta)}{\psi\big(\delta(1+u)\big)}-1\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}=O(1). \tag{23}$$

На підставі співвідношень (21) і (23) одержуємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du=\int\limits_{1-\frac{1}{\delta}}^{1}\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}\,du+O(1)H(\alpha;\varphi). \tag{24}$$

Об'єднуючи формули (20) і (24), приходимо до рівності

$$\int\limits_0^1 \frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du = \int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}\,du + O(1)H(\alpha;\varphi). \tag{25}$$

Враховуючи, що $\int_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}\,du = \int_0^1 \frac{2u+\dfrac{u}{\delta}}{u^{1+\alpha}} = O(1)$, а також той факт, що на основі (10), (12), (13) і (19) справедливою є оцінка

$$H(\alpha;\varphi) = O(1)\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}\right), \tag{26}$$

остаточно отримуємо

$$\int\limits_0^1 \frac{\big|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du = O(1)\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}\right). \tag{27}$$

Таким чином, встановлено збіжність інтеграла $A_\alpha(\varphi)$, а отже, згідно з теоремою 1 із роботи [24], з урахуванням формул (10), (12), (14) і (27), оцінку

$$A_\alpha(\varphi) = O(1)\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}\right).$$

Оцінимо тепер інтеграл $A_\alpha(\nu)$. Для цього, згідно з теоремою 1 із роботи [24], достатньо оцінити інтеграли

$$\int\limits_0^{\frac12} u^{1-\alpha}\big|d\nu'(u)\big|, \qquad \int\limits_{\frac12}^{\frac32} |u-1|^{1-\alpha}|d\nu'(u)|, \qquad \int\limits_{\frac32}^{\infty} (u-1)\big|d\nu'(u)\big|, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\nu(u)|}{u^{1+\alpha}}\,du, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\big|\nu(1-u)-\nu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du. \tag{29}$$

Розглянемо функцію

$$\phi(u) = \phi(\delta;u) := 1-e^{-u}-\gamma u e^{-u} - \frac{u^2}{2} - \frac{u}{\delta}. \tag{30}$$

Неважко переконатись, що

$$\phi(u)\le 0, \qquad \phi'(u)<0, \qquad \phi''(u)<0, \qquad u\ge 0. \tag{31}$$

Для першого інтеграла з (28) маємо

$$\int\limits_0^{\frac12} u^{1-\alpha}\big|d\nu'(u)\big| = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac1\delta} u^{1-\alpha}|\phi''(u)|\,du + \int\limits_{\frac1\delta}^{\frac12} u^{1-\alpha}\big|d\nu'(u)\big|.$$

Оскільки

$$\left|d\nu'(u)\right| \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\Big(\left|\phi''(u)\right|\psi(\delta u) + 2\left|\phi'(u)\right|\left|\psi'(\delta u)\right|\delta + |\phi(u)|\psi''(\delta u)\delta^2\Big)\,du, \tag{32}$$

то дослідимо функції $\phi(u)$, $\phi'(u)$ і $\phi''(u)$ при невеликих значеннях $u > 0$.

Враховуючи (32) і те, що

$$e^{-u} \leq 1 - u + \frac{u^2}{2}, \qquad e^{-u} \geq 1 - u, \tag{33}$$

отримуємо

$$|\phi(u)| = \frac{u^2}{2} + \frac{u}{\delta} - 1 + e^{-u} + \gamma u e^{-u} \leq \left(-1 + \gamma + \frac{1}{\delta}\right)u + (1-\gamma)\,u^2 + \gamma\frac{u^3}{2},$$

$$\left|\phi'(u)\right| = u + \frac{1}{\delta} - e^{-u} + \gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} \leq \left(-1 + \gamma + \frac{1}{\delta}\right) + 2(1-\gamma)u + \frac{3}{2}\gamma u^2,$$

$$\left|\phi''(u)\right| = e^{-u} - 2\gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} + 1 \leq (2 - 2\gamma) + 3\gamma u.$$

Звідси, внаслідок нерівностей

$$\gamma < 1, \qquad 1 - \gamma < \frac{1}{\delta}, \qquad -1 + \gamma + \frac{1}{\delta} < \frac{2}{3\delta^2}, \tag{34}$$

випливає, що

$$\left|\phi(u)\right| < \frac{2}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{u^3}{2}, \qquad \left|\phi'(u)\right| < \frac{2}{3\delta^2} + \frac{2}{\delta}u + \frac{3}{2}u^2, \qquad \left|\phi''(u)\right| < \frac{2}{\delta} + 3u. \tag{35}$$

Застосування останньої нерівності з (35) дозволяє записати оцінку

$$\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}|\phi''(u)|\,du \leq \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u^{1-\alpha}\left(\frac{2}{\delta} + 3u\right)du = \frac{K}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}. \tag{36}$$

Враховуючи (32) і (35), маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\nu'(u)\right| \leq \frac{5}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{2-\alpha}\psi(\delta u)\,du +$$

$$+\frac{25\delta}{3\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{3-\alpha}|\psi'(\delta u)|\,du + \frac{13\delta^2}{6\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{4-\alpha}\psi''(\delta u)\,du. \tag{37}$$

Інтегруючи частинами останній інтеграл із (37) і застосовуючи теореми 3.16.1 [1, с. 175] і 3.12.1 [1, с. 161], одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\nu'(u)\right| < \frac{13\delta\left|\psi'\left(\frac{\delta}{2}\right)\right|}{6\cdot 2^{4-\alpha}\psi(\delta)} + \frac{13\,|\psi'(1)|}{6\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)} + \frac{5}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{2-\alpha}\psi(\delta u)\,du +$$

$$+\frac{(102-4\alpha)\delta}{6\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{3-\alpha}|\psi'(\delta u)|\,du \le K_1+\frac{K_2}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}+\frac{K_3}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u^{2-\alpha}\psi(\delta u)\,du. \tag{38}$$

Отже, з (36) і (38) маємо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\nu'(u)\right| = O(1)\left(1+\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}+\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du\right). \tag{39}$$

Оцінимо тепер другий і третій інтеграли з (28). Для цього знайдемо оцінки зверху величин $\left|\phi(u)\right|$, $\left|\phi'(u)\right|$ і $\left|\phi''(u)\right|$, які зручно застосовувати при великих значеннях u. З урахуванням (31), перших нерівностей з (33), (34) і нерівності $e^{-u}\le 1,\ u\ge 0,$ отримуємо

$$|\phi(u)| = -1+e^{-u}+\gamma u e^{-u}+\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\le u^2+\frac{u}{\delta}. \tag{40}$$

Аналогічно, з урахуванням (31) і нерівності $\gamma<1$ знаходимо

$$\left|\phi'(u)\right| = -e^{-u}+\gamma e^{-u}-\gamma u e^{-u}+u+\frac{1}{\delta}\le u+\frac{1}{\delta}, \tag{41}$$

а з допомогою (31) і нерівності $ue^{-u}\le 1,\ u\ge 0,$ маємо

$$\left|\phi''(u)\right| = e^{-u}(1-2\gamma+\gamma u)+1\le 3. \tag{42}$$

Легко бачити, що

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\left|d\nu'(u)\right| \le 2^{\alpha}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} u\left|d\nu'(u)\right|, \qquad \int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\nu'(u)\right|\le 2^{\alpha}\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} u\left|d\nu'(u)\right|. \tag{43}$$

З (32) і (40) – (42) випливає оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\left|d\nu'(u)\right| \le \frac{3}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi(\delta u)\,du+\frac{4\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^2|\psi'(\delta u)|\,du+\frac{2\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^3\psi''(\delta u)\,du. \tag{44}$$

Застосовуючи метод інтегрування частинами до останнього інтеграла з (44) і теореми 3.16.1 [1, с. 175] і 3.12.1 [1, с. 161], одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\left|d\nu'(u)\right| \le \frac{2\left|\psi'\left(\dfrac{\delta}{2}\right)\right|}{4\psi(\delta)}+\frac{3}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi(\delta u)\,du+\frac{10\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u^2\left|\psi'(\delta u)\right|du\le$$

$$\le K_1+\frac{K_2}{\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u\psi(\delta u)\,du\le K_3+\frac{K_2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty} u\psi(\delta u)\,du. \tag{45}$$

На основі (43) і (45) робимо висновок, що

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha} \big|d\nu'(u)\big| = O(1)\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty} u\psi(u)\,du\right), \tag{46}$$

$$\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\big|d\nu'(u)\big| = O(1)\left(1+\frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty} u\psi(u)\,du\right). \tag{47}$$

Використавши схему оцінювання першого інтеграла з (56) із роботи [11], знайдемо оцінки інтеграла $\int_0^{\infty} \frac{|\nu(u)|}{u^{1+\alpha}}\,du$ на проміжках $\left[0;\frac{1}{\delta}\right]$, $\left[\frac{1}{\delta};1\right]$ і $[1;\infty)$. Враховуючи першу нерівність з (35) і (40), маємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\nu(u)|}{u^{1+\alpha}}\,du \le \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{2}u^3\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}} = \frac{K_1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)},$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} \frac{|\nu(u)|}{u^{1+\alpha}}\,du \le \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1}\left(\frac{2}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{2}u^3\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\frac{du}{u^{1+\alpha}} \le$$

$$\le \frac{13}{6\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{1} u^{2-\alpha}\psi(\delta u)\,du = \frac{K_2}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du,$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{|\nu(u)|}{u^{1+\alpha}}\,du \le \int\limits_1^{\infty}\left(u^2+\frac{u}{\delta}\right)\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\frac{du}{u^{1+\alpha}} \le$$

$$\le \frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_1^{\infty} u^{1-\alpha}\psi(\delta u)\,du = \frac{K_3}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty} u^{1-\alpha}\psi(u)\,du.$$

Звідси

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\big|\nu(u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du =$$

$$= O(1)\left(\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}+\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du+\frac{1}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty} u^{1-\alpha}\psi(u)\,du\right). \tag{48}$$

Можна показати, що для другого інтеграла з (29) має місце співвідношення, аналогічне до (25), тобто

$$\int\limits_0^{1} \frac{\big|\nu(1-u)-\nu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du = \int\limits_0^{1} \frac{\big|\phi(1-u)-\phi(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du + O(1)H(\alpha;\nu), \tag{49}$$

де величина $H(\alpha;\nu)$ визначена рівністю (19).

Виконуючи елементарні перетворення, приходимо до рівності

$$\big|\phi(1+u)-\phi(1-u)\big| = \Big(e^{-(1+u)}-e^{-(1-u)}\Big)(1+\gamma)+u\left(e^{-(1+u)}+e^{-(1-u)}+2+\frac{2}{\delta}\right). \quad (50)$$

Оскільки $\lim_{u\to 0}\dfrac{e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}}{u}=\dfrac{2}{e}$, то функція $\dfrac{e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}}{u}$ обмежена при всіх $u\geq 0$. Тому згідно з (49), (50) маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{\big|\nu(1-u)-\nu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du = O(1)\big(1+H(\alpha;\nu)\big). \quad (51)$$

З (39), (46), (47) і (51) робимо висновок, що

$$\int\limits_0^1 \frac{\big|\nu(1-u)-\nu(1+u)\big|}{u^{1+\alpha}}\,du =$$

$$= O(1)\left(1+\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}+\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du+\frac{1}{\delta^{2}\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty} u\psi(u)\,du\right). \quad (52)$$

З теореми 1 роботи [24], враховуючи (39), (46)–(48), (52) і те, що

$$\lim_{\delta\to\infty}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du \geq \lim_{\delta\to\infty}\int\limits_1^{\delta} u\psi(u)\,du = K_1,$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du \geq \lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}\delta^2\psi(\delta)\int\limits_1^{\delta} u^{-\alpha}\,du = K_2,$$

отримуємо

$$A_\alpha(\nu) = O(1)\left(\frac{1}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du+\frac{1}{\delta^{2}\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty} u\psi(u)\,du\right). \quad (53)$$

Отже, ми переконались у збіжності інтегралів $A_\alpha(\varphi)$, $A_\alpha(\nu)$, $0\leq\alpha<1$, а також у тому, що $A_\alpha(\nu)=o\big(A_\alpha(\varphi)\big)$, $\delta\to\infty$, тобто в справедливості рівності (9).

Згідно з (9) і оцінкою (53) справджується рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha};B_\delta)_C = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}}\left\|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)-f^{\psi}_{\beta}(x)\right)\widehat{\varphi}(t)\,dt\right\|_C +$$

$$+O(1)\left(\frac{1}{\delta^{3}}\int\limits_1^{\delta} u^{2-\alpha}\psi(u)\,du+\frac{1}{\delta^{2+\alpha}}\int\limits_{\delta}^{\infty} u\psi(u)\,du\right), \quad \delta\to\infty. \quad (54)$$

Як і при доведенні рівності (98) з [25], можна показати, що ряд Фур'є функції $f_\varphi(x)$ має вигляд

$$S[f_\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{2\delta^2\psi(\delta)} + \frac{k}{\delta^2\psi(\delta)} \right) (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),$$

де $a_k(f),\ b_k(f),\ k \in \mathbb{N}$, — коефіцієнти Фур'є функції f.

З останньої рівності і формули (1) маємо

$$f_\varphi(x) = \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)} \left(\frac{f_0^{(2)}(x)}{2} + f_0^{(1)}(x) \right). \tag{55}$$

Підставляючи (55) в (54), отримуємо (5).

Теорему 1 доведено.

Прикладом функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких справедливою є теорема 1, є функції вигляду $\psi(u) = u^{-r},\ \psi(u) = u^{-r}\ln^{\varepsilon}(u+K),\ \psi(u) = u^{-r}\operatorname{arctg} u,\ \psi(u) = (K+e^{-u})u^{-r},\ u \geq 1,\ r > 2,$ $\varepsilon < -1,\ K > 0.$

Наведемо наслідок з теореми 1 для функцій $\psi(u) = u^{-r},\ r > 2$.

Наслідок. *Нехай $r > 2,\ 0 \leq \alpha < 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(W_\beta^r H^\alpha; B_\delta\big)_C = \frac{1}{\delta^2} \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| \frac{f_0^{(2)}}{2} + f_0^{(1)} \right\|_C + O(1)\Upsilon(r,\alpha), \tag{56}$$

де

$$\Upsilon(r,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^{r+\alpha}}, & r+\alpha < 3, \\ \dfrac{\ln\delta}{\delta^3}, & r+\alpha = 3, \\ \dfrac{1}{\delta^3}, & r+\alpha > 3, \end{cases}$$

$f_0^{(1)}(x)$ і $f_0^{(2)}(x)$ — відповідно (1,0)- і (2,0)-похідні в сенсі Вейля–Надя, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по β і δ.

Теорема 2. *Нехай ψ належить $\mathfrak{M}$, функція $g(u) = u^2\psi(u)$ опукла донизу на $[b,\infty),\ b \geq 1,$*

$$\int_1^\infty u^3\psi(u)\,du < \infty, \tag{57}$$

$0 \leq \alpha < 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C_\beta^\psi H^\alpha; B_\delta)_C = \frac{1}{\delta^2} \sup_{f \in C_\beta^\psi H^\alpha} \left\| \frac{f_0^{(2)}}{2} + f_0^{(1)} \right\|_C + \frac{O(1)}{\delta^3}, \tag{58}$$

де $f_0^{(1)}$ і $f_0^{(2)}$ — відповідно (1,0)- і (2,0)-похідні в сенсі Вейля–Надя функції f, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по α, β і δ.

Доведення. Покажемо, що інтеграл $A_\alpha(\tau)$ вигляду (7) збігається. Для цього запишемо функцію $\tau(u)$ вигляду (8) як суму функцій $\varphi(u)$ і $\nu(u)$, які визначаються відповідно формулами (10) і (11). Тоді дослідимо на збіжність інтеграл $A_\alpha(\varphi)$ вигляду (7). Для цього поділимо множину $(-\infty,\infty)$ на дві підмножини: $(-\infty,-\delta)\cup(\delta,+\infty)$ і $[-\delta,\delta]$.

З [18, c. 1101] отримуємо

$$\int\limits_{|t|\geq\delta}|t|^{\alpha}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt\leq\frac{2K_1}{(1-\alpha)\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}. \tag{59}$$

Знайдемо оцінку інтеграла $A_\alpha(\varphi)$ на проміжку $[-\delta,\delta]$. Оскільки має місце умова (57), то

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}|t|^{\alpha}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt\leq\frac{2\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}\big|\varphi(u)\big|\,du=$$

$$=\frac{4\psi(1)}{3\psi(\delta)\delta^{2-\alpha}}\frac{1}{1+\alpha}+\frac{2\delta^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\psi(\delta)}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\delta}\right)\psi(\delta u)\,du\leq\frac{K_2}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}. \tag{60}$$

Із співвідношень (59), (60) при $\delta\to\infty$ випливає оцінка

$$A_\alpha(\varphi)=\frac{O(1)}{\delta^{2-\alpha}\psi(\delta)}.$$

Отже, інтеграл $A_\alpha(\varphi)$ збігається на всій числовій осі.

Далі покажемо збіжність інтеграла $A_\alpha(\nu)$, який визначається за допомогою формули (7). Для цього поділимо множину $(-\infty,\infty)$ на дві частини: $[-\delta,\delta]$ і $(-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty)$ так, що

$$A_\alpha(\nu)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}|t|^{\alpha}\,|\widehat{\nu}(t)|\,dt+\int\limits_{|t|>\delta}|t|^{\alpha}\,|\widehat{\nu}(t)|\,dt=I_1(\delta)+I_2(\delta), \tag{61}$$

$$I_1(\delta)=I_1(\psi;\alpha;\delta):=\int\limits_{-\delta}^{\delta}|t|^{\alpha}\,|\widehat{\nu}(t)|\,dt,\qquad I_2(\delta)=I_2(\psi;\alpha;\delta):=\int\limits_{|t|>\delta}|t|^{\alpha}\,|\widehat{\nu}(t)|\,dt.$$

Врахувавши першу нерівність із (35) і те, що $\int_1^{\infty}u^3\psi(u)\,du<\infty$, знайдемо оцінку інтеграла $I_1(\delta)$:

$$I_1(\delta)\leq\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|t|^{\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}|\nu(u)|\,du\,dt=\frac{2\delta^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\pi}\int\limits_{0}^{\infty}|\nu(u)|\,du=$$

$$=\frac{2\delta^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}}|\phi(u)|\frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\,du+\frac{2\delta^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\pi}\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty}|\phi(u)|\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\,du\leq$$

$$\leq \frac{2\delta^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\pi} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{u^3}{2}\right) \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\, du +$$

$$+\frac{2\delta^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\pi} \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{2}{3\delta^2}u + \frac{1}{\delta}u^2 + \frac{u^3}{2}\right) \frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\, du \leq \frac{K_3}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}. \tag{62}$$

Оцінимо інтеграл $I_2(\delta)$. Оскільки, згідно з [18, с. 1105],

$$\left| \int\limits_{0}^{\infty} \nu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| \leq \frac{K_4}{t^2\delta^2\psi(\delta)},$$

то при $\delta \to \infty$ отримуємо

$$I_2(\delta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>\delta} |t|^\alpha \left| \int\limits_{0}^{\infty} \nu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \leq \frac{K_5}{(1-\alpha)\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}. \tag{63}$$

Об'єднуючи формули (61) – (63), записуємо оцінку

$$A_\alpha(\nu) = \frac{O(1)}{\delta^{3-\alpha}\psi(\delta)}. \tag{64}$$

Отже, інтеграли $A_\alpha(\varphi)$ й $A_\alpha(\nu)$ вигляду (7) збігаються і $A_\alpha(\nu) = o\left(A_\alpha(\varphi)\right)$. Тому на основі (9), враховуючи оцінку (64), отримуємо (58).

Теорему 2 доведено.

Прикладом функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких виконуються умови теореми 2, але не виконуються умови теореми 1, є функції $\psi(t) = e^{-\gamma t^r}$, $\gamma \in \mathbb{R},\ r > 0$.

Зауваження. При виконанні умов теорем 1 і 2 рівності (5) і (58) дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для бігармонічного інтеграла Пуассона на класах $C^\psi_\beta H^\alpha$ в рівномірній метриці.

Література

1. А. И. Степанец, *Методы теории приближения*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (2002), ч. 1.
2. М. Ф. Тиман, *Аппроксимация и свойства периодических функций*, Наук. думка, Киев (2009).
3. А. И. Степанец, *Классификация и приближение периодических функций*, Наук. думка, Киев (1987).
4. И. П. Натансон, *О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона*, Докл. АН СССР, **72**, № 1, 11 – 14 (1950).
5. А. Ф. Тиман, *Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона*, Докл. АН СССР, **74**, № 1, 17 – 20 (1950).
6. B. Nagy, *Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **1**, 183 – 188 (1950).
7. Э. Л. Штарк, *Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из* Lip 1 *от их сингулярного интеграла Абеля – Пуассона*, Мат. заметки, **13**, № 1, 21 – 28 (1973).
8. В. А. Баскаков, *О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона*, Мат. заметки, **17**, № 2, 169 – 180 (1975).
9. I. V. Kal'chuk, Yu. I. Kharkevych, *Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22**, № 1, 23 – 36 (2018).

10. Yu. I. Kharkevych, K. V. Pozharska, *Asymptotics of approximation of conjugate functions by Poisson integrals*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22**, № 2, 235 – 243 (2018).
11. Yu. I. Kharkevych, T. V. Zhyhallo, *Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel – Poisson operators*, Ukr. Math. J., **57**, № 8, 1297 – 1315 (2005).
12. K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel – Poisson integrals*, Ukr. Math. J., **61**, № 1, 86 – 98 (2009).
13. T. V. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson integrals in the uniform metric*, Ukr. Math. J., **61**, № 12, 1893 – 1914 (2009).
14. Ю. И. Харкевич, Т. А. Степанюк, *Аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах $C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}$*, Мат. заметки, **96**, № 6, 939 – 952 (2014).
15. С. Каниев, *Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений*, Докл. АН СССР, **153**, № 5, 995 – 998 (1963).
16. S. B. Hembars'ka, K. M. Zhyhallo, *Approximative properties of biharmonic Poisson integrals on Hölder classes*, Ukr. Math. J., **69**, № 7, 1075 – 1084 (2017).
17. T. V. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of function from class $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric*, Ukr. Math. J., **60**, № 5, 769 – 798 (2008).
18. K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals*, Ukr. Math. J., **63**, № 7, 1083 – 1107 (2011).
19. K. M. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of (ψ,β)-differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals*, Ukr. Math. J., **63**, № 12, 1820 – 1844 (2012).
20. T. V. Zhyhallo, Yu. I. Kharkevych, *Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$*, Ukr. Math. J., **69**, № 5, 757 – 765 (2017).
21. I. V. Kal'chuk, Yu. I. Kharkevych, *Approximating properties of biharmonic Poisson integrals in the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$*, Ukr. Math. J., **68**, № 11, 1727 – 1740 (2017).
22. U. Z. Hrabova, I. V. Kal'chuk, T. A. Stepaniuk, *On the approximation of the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$ by biharmonic Poisson integrals*, Ukr. Math. J., **70**, № 5, 719 – 729 (2018).
23. U. Z. Hrabova, I. V. Kal'chuk, T. A. Stepaniuk, *Approximative properties of the Weierstrass integrals on the classes $W^{r}_{\beta}H^{\alpha}$*, J. Math. Sci. (N.Y.), **231**, № 1, 41 – 47 (2018).
24. Л. И. Баусов, *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II*, Изв. вузов, **55**, № 6, 3 – 17 (1966).
25. Yu. I. Kharkevych, I. V. Kal'chuk, *Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals*, Ukr. Math. J., **59**, № 7, 1059 – 1087 (2007).

Одержано 16.07.19