DOI: 10.37863/umzh.v72i11.1038

УДК 515.12

Т. М. Радул (Університет Казимира Великого в Бидгощі, Польща; Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

РОЗШАРУВАННЯ ІДЕМПОТЕНТНИХ МІР

We prove that the idempotent barycenter map restricted to the points with nontrivial fibers is a trivial fibration with Hilbert cube fibers whenever it is open.

Доведено, що відображення ідемпотентного барицентра, обмежене на точки з невиродженими шарами, є тривіальним розшаруванням з шаром гільбертів куб, якщо воно відкрите.

1. Вступ. Поняття ідемпотентної міри (міри Маслова) широко застосовується в різних галузях математики, математичної фізики та економіки (див., наприклад, оглядову статтю [9] та наведену в ній бібліографію). Топологічні і категорні властивості вивчались у [22]. Хоча ідемпотентні міри, взагалі кажучи, неадитивні, а відповідні функціонали нелінійні, існують певні аналогії між топологічними властивостями просторів імовірнісних мір та просторів ідемпотентних мір (див., наприклад, [13, 22]), які є наслідком існування природної структури еквізв'язності для обох конструкцій.

Проте відмінності з'являються при вивченні топологічних властивостей відображення барицентра. Відкритість відображення барицентра ймовірнісних мір вивчалась в працях [3 – 5, 11, 12]. Зокрема, в [11] було доведено, що відкритість відображення барицентра ймовірнісних мір еквівалентна відкритості відображення $(x, y) \mapsto 1/2(x + y)$, а в [5] доведено, що добуток довільної сім'ї барицентрично відкритих компактів (тобто опуклих компактів, для яких відображення барицентра є відкритим) є барицентрично відкритим. У [14] показано, що для ідемпотентних мір аналогічні твердження не мають місця.

М'якість відображення барицентра ймовірнісних мір вивчалась у працях [5, 15, 16]. Зокрема, в [5] було доведено, що добуток ω_1 барицентрично відкритих опуклих метризовних компактів є барицентрично м'яким. Натомість у [17] доведено, що тихоновський куб ваги ω_1 не є ідемпотентно барицентрично м'яким.

Ці відмінності пояснюються різними властивостями опуклостей, що визначають відображення барицентра: класичною лінійною опуклістю у просторі ймовірнісних мір та ідемпотентною max-plus опуклістю для ідемпотентних мір.

У [4] доведено, що відображення барицентра ймовірнісних мір, обмежене на повний прообраз точок із невиродженими шарами, є тривіальним розшаруванням із шаром гільбертів куб, якщо воно відкрите. Разом з тим, згідно з зауваженням М. В. Зарічного, цей результат не можна узагальнити на вищі ваги (див. [6, 18] для більш повної інформації).

В цій статті ми розглядаємо аналогічну проблему для ідемпотентних мір.

2. Ідемпотентні міри: необхідні поняття. Компактом ми називаємо компактний гаусдорфовий простір. Для компакту X через $C(X)$ ми позначаємо банаховий простір неперервних функцій на X, наділений sup-нормою, а для $c \in \mathbb{R}$ через c_X — сталу функцію, що набуває значення c.

Через $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ позначимо метричний простір з метрикою ϱ, визначеною формулою $\varrho(x, y) = |e^x - e^y|$. Дотримуючись формалізму ідемпотентної математики (більше інформації можна почерпнути, наприклад, у [10]), ми використовуємо позначення $\oplus$ і $\odot$ в $\mathbb{R}$ як альтернативи для $\max$ і $+$ відповідно. Конвенція $-\infty \odot x = -\infty$ дозволяє нам продовжити операції $\odot$ і $\oplus$ на множину $\mathbb{R}_{\max}$.

Max-plus опуклі множини були означені в [24]. Для кардинального числа τ, точок $x, y \in \mathbb{R}^\tau$ і $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ через $y \oplus x$ ми позначаємо покоординатний максимум точок x та y, а через $\lambda \odot x$ — вектор, отриманий додаванням до кожної координати вектора x числа λ. Підмножина A в $\mathbb{R}^\tau$ називається max-plus опуклою, якщо $\alpha \odot a \oplus b \in A$ для всіх $a, b \in A$ і $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$ такого, що $\alpha \leq 0$. Легко переконатись, що A є max-plus опуклою тоді й лише тоді, коли $\oplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in A$ для всіх $x_1, \ldots, x_n \in A$ і $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\max}$ таких, що $\oplus_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Далі під max-plus опуклим компактом ми розуміємо max-plus опуклу компактну підмножину $\mathbb{R}^\tau$.

Через $\odot \colon \mathbb{R} \times C(X) \to C(X)$ позначимо відображення, що діє таким чином: $(\lambda, \varphi) \mapsto$ $\mapsto \lambda_X + \varphi$, а через $\oplus \colon C(X) \times C(X) \to C(X)$ — відображення, що діє так: $(\psi, \varphi) \mapsto \max\{\psi, \varphi\}$.

Означення 1 [22]. *Функціонал $\mu \colon C(X) \to \mathbb{R}$ називається ідемпотентною мірою (мірою Маслова), якщо він задовольняє такі умови*:

(1) $\mu(1_X) = 1$;

(2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ *для кожних* $\lambda \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in C(X)$;

(3) $\mu(\psi \oplus \varphi) = \mu(\psi) \oplus \mu(\varphi)$ *для кожних* ψ, $\varphi \in C(X)$.

Зауважимо, що кожна ідемпотентна міра $\mu \colon C(X) \to \mathbb{R}$ є нерозтягуючим відображенням (ліпшицевим зі сталою 1) відносно sup-метрики на просторі $C(X)$ та природної метрики на $\mathbb{R}$ [22].

Через IX позначимо множину всіх ідемпотентних мір на компакті X. Ми розглядаємо IX як підпростір в $\mathbb{R}^{C(X)}$. У [22] показано, що IX є max-plus опуклою компактною підмножиною в $\mathbb{R}^{C(X)}$. Конструкція I є функторіальною, це означає, що для кожного неперервного відображення між компактами $f \colon X \to Y$ ми можемо знайти неперервне відображення $If \colon IX \to IY$, означене таким чином: $If(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$ для $\mu \in IX$ і $\psi \in C(Y)$. У [22] доведено, що функтор I зберігає топологічні вкладення. Далі для вкладення $i \colon A \to X$, де A — замкнена підмножина компакту X, ми ототожнюємо простір IA і підпростір $Ii(IA) \subset IX$. Оскільки функтор I зберігає перетини, можемо розглянути поняття носія міри $\mu \in IX$: $\mathrm{supp}\mu = \cap\{A \subset X \mid A$ замкнена і $\mu \in IA\}$ [22].

Через δ_x позначимо міру Дірака, зосереджену в точці $x \in X$. Отримаємо відображення $\delta X \colon X \to IX$, означене таким чином: $\delta X(x) = \delta_x$, $x \in X$. Відображення δX є неперервним, більш того, воно є вкладенням [22]. Також у [22] показано, що множина

$$I_\omega X = \left\{ \oplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}, i \in \{1, \ldots, n\}, \oplus_{i=1}^n \lambda_i = 0, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(тобто множина ідемпотентних мір зі скінченними носіями) є скрізь щільною в IX.

Поняття густини ідемпотентної міри введено в [1]. Нехай $\mu \in IX$. Можемо означити функцію $\rho_\mu \colon X \to [-\infty, 0]$ за допомогою формули $\rho_\mu(x) = \inf\{\mu(\varphi) | \varphi \in C(X)$ така, що $\varphi \leq 0$ і $\varphi(x) = 0\}$, $x \in X$. Функція ρ_μ є напівнеперервною зверху і називається густиною міри μ. Навпаки, кожна напівнеперервна зверху функція $f \colon X \to [-\infty, 0]$ така, що $\max f = 0$, визначає ідемпотентну міру ν_f за допомогою формули $\nu_f(\varphi) = \max\{f(x) \odot \varphi(x) | x \in X\}$, де $\varphi \in C(X)$ (існування максимуму випливає з напівнеперервності зверху функції f). Нескладно переконатися, що $\mathrm{supp}\mu = \mathrm{Cl}\{x \in X \mid \rho_\mu(x) > -\infty\}$.

Нехай $A \subset \mathbb{R}^T$ є max-plus опуклою компактною підмножиною. Для кожного $t \in T$ покладемо $f_t = \mathrm{pr}_t|_A \colon A \to \mathbb{R}$, де $\mathrm{pr}_t \colon \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ — природна проекція. Для ідемпотентної міри $\mu \in IA$ точка $\beta_A(\mu) \in \mathbb{R}^T$ визначається умовами $\mathrm{pr}_t(\beta_A(\mu)) = \mu(f_t)$ для кожного $t \in T$. В [22] показано, що $\beta_A(\mu)$ належить A для кожної $\mu \in I(A)$ і відображення $\beta_A : IA \to A$ є неперервним. Відображення β_A називається ідемпотентним відображенням барицентра.

Відображення $f : X \to Y$ між max-plus опуклими компактами X і Y називається max-plus афінним, якщо для довільних $a, b \in X$ і $\alpha \in [-\infty, 0]$ виконується $f(\alpha \odot a \oplus b) = \alpha \odot f(a) \oplus f(b)$. Відображення β_A є max-plus афінним (наслідок 4.2 з [14]).

3. Метрика на max-plus опуклих компактах. Нехай (X, d) — довільний метричний компакт. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathrm{Lip}_n(X, d)$ множину всіх ліпшицевих функцій на (X, d) з константою Ліпшиця n. Для $\nu,\ \mu \in IX$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$d_n(\nu, \mu) = \sup\left\{\frac{|\nu(\varphi) - \mu(\varphi)|}{n} | \varphi \in \mathrm{Lip}_n(X, d)\right\},$$

а також

$$d_I(\nu, \mu) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(\nu, \mu)}{2^n}.$$

У [22] доведено, що метрика d_I породжує на IX топологію підпростору в $\mathbb{R}^{C(X)}$, причому відображення $\delta X : (X, d) \to (IX, d_I)$ є ізометричним вкладенням.

Для метричного простору (X, d) і $\varepsilon > 0$ відображення $h : X \to X$ називається ε-близьким до тотожного, якщо $d(x, h(x)) < \varepsilon$ для довільного $x \in X$.

Лема 1. *Нехай (X, d) — метричний компакт і відображення $h : X \to X$ ε-близьке до тотожного для деякого $\varepsilon > 0$. Тоді відображення $Ih : IX \to IX$ ε-близьке до тотожного в метриці d_I.*

Доведення. Нехай $\mu \in IX$, а $\psi \in \mathrm{Lip}_n(X, d)$. Лема випливає з нерівності

$$\frac{\big|Ih(\mu)(\psi) - \mu(\psi)\big|}{n} \le \frac{\big|\mu(\psi \circ h) - \mu(\psi)\big|}{n} \le \frac{\sup_{x \in X} \big|\psi(h(x)) - \psi(x)\big|}{n} \le \frac{\sup_{x \in X} n d\big(h(x), x\big)}{n}$$

(оскільки μ — нерозтяжне відображення).

4. Основний результат для max-plus опуклих компактів вигляду IX. У цьому пункті ми вивчаємо структуру відображення $\beta_{IX} : I^2X \to IX$ для довільного метризовного компакту X. В [14] доведено, що воно є відкритим.

Для функції $\varphi \in C(X)$ позначимо через $\tilde{\varphi} \in C(IX)$ функцію, означену за допомогою формули $\tilde{\varphi}(\nu) = \nu(\varphi)$ для $\nu \in IX$. Зауважимо, що $\tilde{\varphi} \in C(IX)$ є афінною функцією. Діагональний добуток $(\tilde{\varphi})_{\varphi \in C(X)}$ вкладає IX в $\mathbb{R}^{C(X)}$ як max-plus опуклу підмножину. Легко переконатись, що відображення β_{IX} задовольняє рівність $\beta_{IX}(\mathcal{M})(\varphi) = \mathcal{M}(\tilde{\varphi})$ для довільних $\mathcal{M} \in I^2X = I(IX)$ і $\varphi \in C(X)$. Зокрема, $\beta_{IX} \circ I(\delta X) = \mathrm{id}_{IX}$ для кожного компакту X.

Нехай X — max-plus опуклий компакт. Точка $x \in X$ називається екстремальною, якщо для будь-яких двох точок $y, z \in X$ і для довільного $t \in [-\infty, 0]$ з рівності $x = t \odot y \oplus z$ випливає $x \in \{y, z\}$ [8]. Множину екстремальних точок max-plus опуклого компакту X ми позначаємо через $E(X)$. У [14] доведено, що з відкритості відображення ідемпотентного барицентра випливає замкненість множини $E(X)$.

Лема 2. *Нехай X — довільний компакт. Тоді $E(IX) = \delta X(X) = \{\mu \in IX \mid |\beta_{IX}^{-1}(\mu)| = 1\}$.*

Доведення. Нехай $\mu \in E(IX)$. Припустимо, що існують різні $x_1,\ x_2 \in X$ такі, що $\rho_\mu(x_1) > > -\infty$ і $\rho_\mu(x_2) > -\infty$, де ρ_μ — густина міри μ. Можемо вважати, що $\rho_\mu(x_1) = 0$. Запишемо $X = X_1 \cup X_2$, де X_1 і X_2 — замкнені підмножини компакту X такі, що $x_2 \notin X_1 \ni x_1$ і $x_1 \notin X_2 \ni x_2$. Покладемо $a = \max_{x \in X_2} \rho_\mu(x) \leq 0$ (існування максимуму випливає з напівнеперервності зверху функції ρ_μ). Означимо функції $\rho_1, \rho_2 \colon X \to [-\infty, 0]$ таким чином:

$$\rho_1(x) = \begin{cases} \rho_\mu(x), & x \in X_1, \\ -\infty, & x \notin X_1, \end{cases}$$

і

$$\rho_2(x) = \begin{cases} \rho_\mu(x) - a, & x \in X_2, \\ -\infty, & x \notin X_2. \end{cases}$$

Легко бачити, що функції ρ_1 і ρ_2 напівнеперервні зверху і $\max_{x \in X} \rho_1(x) = \max_{x \in X} \rho_2(x) = 0$. Отже, вони є густинами деяких мір $\mu_1,\ \mu_2 \in IX$, причому $\mu \notin \{\mu_1; \mu_2\}$ і $a \odot \mu_2 \oplus \mu_1 = \mu$. Ми прийшли до суперечності, і $\mu \in \delta X(X)$.

Нехай $x \in X$. Тоді $\delta_x = I(\{x\})$. Згідно з лемою 2.2 з [17] $\beta_{IX}^{-1}(I(\{x\})) \subset I^2(\{x\})$. Отже, $\beta_{IX}^{-1}(\delta_x) = \beta_{IX}^{-1}(I(\{x\})) \subset I^2(\{x\}) = \{\delta_{\delta_x}\}$ і $\delta_x \in \big\{\mu \in IX \mid |\beta_{IX}^{-1}(\mu)| = 1\big\}$.

Тепер нехай $\mu \notin E(IX)$. Тоді існують такі $\mu_1,\ \mu_2 \in IX$ і $a \in [-\infty, 0]$, що $\mu \notin \{\mu_1; \mu_2\}$ і $a \odot \mu_2 \oplus \mu_1 = \mu$. Але тоді множина $\beta_{IX}^{-1}(\mu)$ містить двоточкову підмножину $\{a \odot \delta_{\mu_2} \oplus \delta_{\mu_1}, \delta_\mu\}$ і $\mu \notin \big\{\nu \in IX \mid |\beta_{IX}^{-1}(\nu)| = 1\big\}$.

Лему 2 доведено.

Нагадаємо деякі означення та поняття, необхідні для формулювання та доведення основного результату. Нехай A — підмножина простору X. Неперервне відображення $r \colon X \to A$ називається ретракцією, якщо $r|_A = \mathrm{id}_A$. Простір A називається абсолютним ретрактом (позначаємо AR), якщо для довільного замкненого вкладення $j \colon A \to X$ існує ретракція $r \colon X \to j(A)$.

Лема 3. *Довільний метризовний max-plus опуклий компакт X є абсолютним ретрактом.*

Доведення. Відомо, що IX є абсолютним ретрактом для кожного метричного компакту (див., наприклад, [17] або [2]). Відображення $\delta_X \circ \beta_X \colon IX \to \delta_X(X)$ є ретракцією, тому X також є абсолютним ретрактом.

Неперервне відображення $f \colon X \to Y$ називається м'яким [19], якщо для довільного простору Z, довільної замкненої підмножини A простору Z і неперервних відображень $\Phi \colon A \to X$ і $\Psi \colon Z \to Y$ таких, що $\Psi|A = f \circ \Phi$, існує таке неперервне відображення $G \colon Z \to X$, що $G|A = \Phi$ і $\Psi = f \circ G$. Безпосередньо з означення випливає, що звуження м'якого відображення на повний прообраз є м'яким.

Неперервне відображення $f \colon X \to Y$ називається тривіальним розшаруванням із шаром Z (або тривіальним Z-розшаруванням), де Z — довільний простір, якщо існує такий гомеоморфізм $h \colon X \to Z \times Y$, що $f = \mathrm{pr}_Y \circ h$. Неперервне відображення $f \colon X \to Y$ називається локально тривіальним розшаруванням з шаром Z, якщо для кожної точки $y \in Y$ знайдуться окіл U і гомеоморфізм $h \colon f^{-1}(U) \to Z \times U$ такі, що $f(x) = \mathrm{pr}_Y \circ h(x)$ $x \in X$.

Через Q позначимо гільбертів куб, тобто зліченний нескінченний добуток одиничних замкнених відрізків із топологією добутку. Ми будемо використовувати наступну версію теореми Веста – Торуньчика про топологічну характеризацію Q-розшарувань, яка безпосередньо випливає з твердження 1.6.5 [7].

Теорема 1. *Нехай $f: X \to Y$ — м'яке відображення між компактними AR-ами, а d — метрика на X. Якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують два ε-близькі до тотожного неперервні відображення $h, g: X \to X$ такі, що $h(X) \cap g(X) = \varnothing$ і $f \circ h = f = f \circ g$, то f є тривіальним Q-розшаруванням.*

Покладемо $J = \big\{(t,p) \in [-\infty, 0] \times [-\infty, 0] \mid t \oplus p = 0\big\}$. Нехай X — max-plus опуклий компакт. Означимо відображення $s_X : X \times X \times J \to X$ за допомогою формули $s_X(x,y,t,p) = t \odot x \oplus p \odot y$. Легко перевірити, що відображення s_X неперервне.

Теорема 2. *Нехай X — метричний компакт. Відображення $b_X = \beta_{IX}|_{I^2X \setminus \beta_{IX}^{-1}(E(IX))} : I^2X \setminus \beta_{IX}^{-1}(E(IX)) \to IX \setminus E(IX)$ є тривіальним Q-розшаруванням.*

Доведення. Нехай (X,d) — метричний компакт. На IX та I^2X розглянемо відповідно метрики d_I та $(d_I)_I$, введені у п. 3. Оскільки кожне локально тривіальне Q-розшарування є тривіальним [20], достатньо довести, що відображення b_X є локально тривіальним Q-розшаруванням. Нехай $\nu \in IX$ — довільна точка. Виберемо max-plus опуклий компактний окіл K точки ν такий, що $K \cap E(IX) = \varnothing$. З афінності відображення β_{IX} випливає, що компакт $\beta_{IX}^{-1}(K)$ є max-plus опуклим. Отже, компакти $\beta_X^{-1}(K)$ і K є абсолютними ретрактами згідно з лемою 3.

Через b_K позначимо звуження відображення β_{IX} на $\beta_{IX}^{-1}(K)$. Покажемо, що відображення b_K задовольняє умови теореми 1. Оскільки відображення $\beta_{IX} : I^2X \to IX$ є відкритим і X — метричний компакт, то β_{IX} є м'яким (наслідок 4.2 з [17]). Тоді відображення b_K також є м'яким, як звуження β_{IX} на повний прообраз.

Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення s_{IX} неперервне, IX — компактний простір, а $s_{IX}(\mu, \nu, 0, -\infty) = \mu$ для довільних мір μ, $\nu \in IX$, існує $t \in (-\infty, 0]$ таке, що неперервне відображення $h_\kappa : IX \to IX$, де $\kappa \in K$, означене за допомогою формули $h_\kappa(\mu) = s_{IX}(\mu, \kappa, 0, t)$, є ε-близьким до тотожного. Зауважимо також, що множина $S = \cup_{\kappa \in K} h_\kappa(IX) = s_{IX}(IX, K, 0, t)$ є компактною і такою, що $S \cap E(IX) = \varnothing$.

Означимо відображення $g : \beta_{IX}^{-1}(K) \to I^2X$ за допомогою формули

$$g(\mathcal{M}) = I(h_{\beta_{IX}(\mathcal{M})})(\mathcal{M}).$$

Легко переконатися, що відображення g неперервне, а з леми 1 випливає, що воно ε-близьке до тотожного.

Розглянемо довільні функції $\varphi \in C(X)$ і $\mathcal{M} \in \beta_{IX}^{-1}(K)$. Тоді $\beta_{IX} \circ g(\mathcal{M})(\varphi) = \beta_{IX} \circ I(h_{\beta_{IX}(\mathcal{M})})(\mathcal{M})(\varphi) = \mathcal{M}(\tilde{\varphi} \circ h_{\beta_{IX}(\mathcal{M})})$. Позначимо $\Psi = \tilde{\varphi} \circ h_{\beta_{IX}(\mathcal{M})}$. Виберемо довільну міру $\nu \in IX$. Тоді $\Psi(\nu) = \tilde{\varphi} \circ h_{\beta_{IX}(\mathcal{M})}(\nu) = \tilde{\varphi}(t \odot \beta_{IX}(\mathcal{M}) \oplus \nu) =$ (оскільки $\tilde{\varphi} : IX \to \mathbb{R}$ є афінною функцією) $= t \odot \mathcal{M}(\tilde{\varphi}) \oplus \nu(\varphi) \le \mathcal{M}(\tilde{\varphi}) \oplus \nu(\varphi)$. Таким чином, $\tilde{\varphi} \le \Psi \le \mathcal{M}(\tilde{\varphi})_{IX} \oplus \tilde{\varphi}$. З властивостей ідемпотентної міри випливає, що $\mathcal{M}(\tilde{\varphi}) = \mathcal{M}(\Psi)$ для довільних $\varphi \in C(X)$ і $\mathcal{M} \in \beta_{IX}^{-1}(K)$, тобто $\beta_{IX} \circ g = \beta_{IX}$. Зокрема, $g(\beta_{IX}^{-1}(K)) \subset K$. Також зауважимо, що $\operatorname{supp}(g(\mathcal{M})) \cap E(IX) = \varnothing$ для довільної $\mathcal{M} \in \beta_{IX}^{-1}(K)$.

Оскільки відображення s_{I^2X} неперервне, I^2X — компактний простір, а

$$s_{I^2X}(\mathcal{M}, \mathcal{K}, 0, -\infty) = \mathcal{M}$$

для довільних $\mathcal{M}$, $\mathcal{K} \in I^2X$, існує $t \in (-\infty, 0]$ таке, що неперервне відображення $h : \beta_{IX}^{-1}(K) \to \beta_{IX}^{-1}(K)$, означене за допомогою формули $h(\mathcal{M}) = s_{I^2X}(\mathcal{M}, I(\delta X)(\beta_{IX}(\mathcal{M})), 0, t)$, є ε-близьким до тотожного. З афінності відображення β_{IX} та рівності $\beta_{IX} \circ I(\delta X) = \mathrm{id}_{IX}$ випливає рівність $\beta_{IX} \circ h = \beta_{IX}$. Оскільки $\delta X(X) = E(IX)$, то $I(\delta X)(\beta_{IX}(\mathcal{M})) \in I(E(IX))$, а отже,

$\mathrm{supp}(h(\mathcal{M})) \cap E(IX) \neq \varnothing$ для довільної $\mathcal{M} \in \beta_{IX}^{-1}(K)$. Ми переконалися, що відображення g і h задовольняють умови теореми 1.

Теорему 2 доведено.

5. Загальний випадок: частковий результат і відкрита проблема. В цьому пункті ми досліджуємо структуру відображення ідемпотентного барицентра для довільного метричного max-plus опуклого компакту. Зауважимо, що для ймовірнісних мір множина екстремальних точок довільного опуклого компакту збігається з множиною точок, де відображення барицентра має одноточкові шари [4]. Для ідемпотентних мір це, взагалі кажучи, не так. Легко переконатися, що відображення ідемпотентного барицентра $\beta_{[0,1]} : I\big([0,1]\big) \to [0,1]$ не має одноточкових шарів, хоча max-plus опуклий компакт $[0,1]$ має дві екстремальні точки: 0 і 1.

Для max-plus опуклого компакту X через $B(X)$ позначимо множину точок, де відображення барицентра має одноточкові шари. Легко переконатися, що $B(X) \subset E(X)$.

Лема 4. *Нехай X — довільний max-plus опуклий компакт. Тоді $B(X) = \{x \in X \mid$ для будь-яких двох точок $y, z \in X$ і для довільного $\lambda \in (-\infty, 0]$ з рівності $x = \lambda \odot y \oplus z$ випливає $x = y = z\}$.*

Доведення. Нехай $x \in B(X)$. Припустивши, що існують $t \in (-\infty, 0]$ і не рівні одночасно x точки $y,\ z \in X$ такі, що $x = \lambda \odot y \oplus z$, отримуємо $\beta_X(\lambda \odot \delta_y \oplus \delta_z) = x$ і $\lambda \odot \delta_y \oplus \delta_z \neq \delta_x$ — суперечність.

Тепер розглянемо $x \notin B(X)$. Оскільки $\delta_x \in \beta_X^{-1}(x)$, існує $\mu \in \beta_X^{-1}(x)$, для якої існують різні $x_1,\ x_2 \in X$ такі, що $\rho_\mu(x_1) > -\infty$ і $\rho_\mu(x_2) > -\infty$, де ρ_μ — густина міри μ. Можемо вважати, що $\rho_\mu(x_1) = 0$.

Нагадаємо, що X ми розглядаємо як max-plus опуклу компактну підмножину $\mathbb{R}^T$. Існує таке $t \in T$, що $\mathrm{pr}_t(x_1) \neq \mathrm{pr}_t(x_2)$. Можемо вважати, що $\mathrm{pr}_t(x_1) < \mathrm{pr}_t(x_2)$. Виберемо таке $q \in (\mathrm{pr}_t(x_1), \mathrm{pr}_t(x_2))$, що $\mathrm{pr}_t(x) \neq q$. Запишемо $X = X_1 \cup X_2$, де $X_1 = \{y \in X \mid \mathrm{pr}_t(y) \le q\}$ і $X_2 = \{y \in X \mid \mathrm{pr}_t(y) \ge q\}$ — замкнені max-plus опуклі підмножини компакту X. Покладемо $a = \max_{y \in X_2} \rho_\mu(y) \le 0$ (існування максимуму випливає з напівнеперервності зверху функції ρ_μ). Означимо функції $\rho_1, \rho_2 : X \to [-\infty, 0]$ таким чином:

$$\rho_1(y) = \begin{cases} \rho_\mu(y), & y \in X_1, \\ -\infty, & y \notin X_1, \end{cases}$$

і

$$\rho_2(y) = \begin{cases} \rho_\mu(y) - a, & y \in X_2, \\ -\infty, & y \notin X_2. \end{cases}$$

Легко бачити, що функції ρ_1 і ρ_2 напівнеперервні зверху і

$$\max_{y \in X} \rho_1(y) = \max_{y \in X} \rho_2(y) = 0.$$

Отже, вони є густинами деяких мір $\mu_1,\ \mu_2 \in IX$, причому $a \odot \mu_2 \oplus \mu_1 = \mu$. Покладемо $\beta_X(\mu_1) = z$ і $\beta_X(\mu_2) = y$. Оскільки X_1 і X_2 — max-plus опуклі компакти, $z \in X_1$ і $y \in X_2$, тобто точки y та z не рівні одночасно x. Окрім того, $x = \beta_X(\mu) = \beta_X(a \odot \mu_2 \oplus \mu_1) = a \odot y \oplus z$.

Лему 4 доведено.

Зауважимо, що з леми 2 випливає включення $B(X) \subset E(X)$.

Теорема 3. *Відображення $\beta_{[0,1]}$ є тривіальним Q-розшаруванням.*

Доведення. На $[0,1]$ ми розглядаємо природну метрику d, а на $I\big([0,1]\big)$ — метрику d_I, введену в п. 3.

Як і в доведенні теореми 2, достатньо встановити, що відображення $\beta_{[0,1]}$ є локально тривіальним Q-розшаруванням. Через b_0 позначимо звуження відображення $\beta_{[0,1]}$ на $\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$, а через b_1 — звуження відображення $\beta_{[0,1]}$ на $\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[\dfrac{1}{3},1\right]\right)$. Ми доведемо, що відображення b_0 і b_1 є тривіальними Q-розшаруваннями. З афінності відображення β_{IX} та леми 3 випливає, що компакти $\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[\dfrac{1}{3},1\right]\right)$ та $\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$ є абсолютними ретрактами.

Оскільки відображення $\beta_{[0,1]}$ є відкритим [17], то $\beta_{[0,1]}$ є м'яким (наслідок 4.2 з [17]). Тоді відображення b_0 і b_1 також є м'якими, як звуження $\beta_{[0,1]}$ на повний прообраз.

Розглянемо довільне $\varepsilon>0$. Оскільки відображення $s_{I([0,1])}$ неперервне, $I\big([0,1]\big)$ — компактний простір, а $s_{I([0,1])}(\mu,\nu,0,-\infty)=\mu$ для довільних $\mu,\ \nu\in IX$, існує $t\in(-\infty,-1]$ таке, що неперервне відображення $h_0\colon\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)\to\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$, означене за допомогою формули $h_0(\mu)=s_{IX}(\mu,\delta_1,0,t)$, є ε-близьким до тотожного. Оскільки $t\le-1$, то $b_0\circ h_0=b_0$. Зауважимо також, що $1\in\mathrm{supp}h_0(\mu)$ для довільної $\mu\in\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$.

Означимо функцію

$$l\colon\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\frac{2}{3}\right]\right)\times\left[\frac{2}{3},1\right]\to\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\frac{2}{3}\right]\right)$$

таким чином. Нехай $\nu\in\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$ з густиною ρ_ν і $p\in\left[\dfrac{2}{3},1\right]$. Означимо функцію $\sigma\colon[0,1]\to[-\infty,0]$ за допомогою формули

$$\sigma(t)=\begin{cases}\rho_\nu(t), & t<p,\\ \max_{s\in[p,1]}(1-s)\odot\rho_\nu(s), & t=p,\\ -\infty, & t>p.\end{cases}$$

Легко переконатись, що функція σ коректно визначена, неперервна зверху і $\max_{s\in[0,1]}\sigma(s)=1$. Отже, σ є густиною для певної міри $\mu\in\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$, причому $\beta_{[0,1]}(\mu)=\beta_{[0,1]}(\nu)$. Покладемо $l(\nu,p)=\mu$. Легко переконатись, що відображення l неперервне і $l(\nu,1)=\nu$ для кожної $\nu\in\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$. Тоді існує $\delta\in\left(\dfrac{2}{3},1\right)$ таке, що неперервне відображення $g_0\colon\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)\to\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$, означене за допомогою формули $g_0(\nu)=l(\nu,\delta)$, є ε-близьким до тотожного. Легко переконатись, що $b_0\circ g_0=b_0$. Зауважимо також, що $1\notin\mathrm{supp}g_0(\nu)$ для довільної $\nu\in\beta^{-1}_{[0,1]}\left(\left[0,\dfrac{2}{3}\right]\right)$.

Таким чином, з теореми 1 випливає, що відображення b_0 є тривіальним Q-розшаруванням. Аналогічні міркування, навіть дещо простіші, використовуємо для відображення b_1.

Теорему 3 доведено.

Узагальненням теорем 2 і 3 та об'єднанням їх в одну була б позитивна відповідь на таке питання.

***Задача* 1.** Нехай X — max-plus опуклий метричний компакт, такий, що відображення β_X є відкритим. Чи буде відображення $\beta_X|_{IX\setminus\beta_X^{-1}(B(X))} : IX\setminus\beta_X^{-1}(B(X)) \to X\setminus B(X)$ тривіальним Q-розшаруванням?

Зауважимо, що теореми 2 і 3 описують два полярно протилежні випадки: в теоремі 2 всі екстремальні точки є точками однократності відображення барицентра, натомість в теоремі 3 точок однократності немає взагалі. Бачимо, що ідеї доведення цих теорем різняться. В загальному випадку max-plus опуклий компакт може мати як екстремальні точки, що є точками однократності, так і ті, що не є такими. Тому здається, що для відповіді на вищепоставлене питання потрібно якимось чином зміксувати методи доведення згаданих теорем.

Насамкінець розглянемо проблему, чи можна отримані результати перенести на неметризовні компакти. Почнемо з ваги ω_1. Очевидно, що розшарування мали б бути з шаром $[0,1]^{\omega_1}$ (в [2] доведено, що IX гомеоморфно $[0,1]^{\omega_1}$ для кожного відкритопородженого однорідного за характером компакту X). Аналогічна проблема розглядалася для ймовірнісних мір (див. [6, 18], де отримано негативні результати). Для ідемпотентних мір ситуація є такою самою.

Розглянемо max-plus опуклий компакт $I\big([0,1]^{\omega_1}\big)$ та відповідне відображення барицентра $\beta_{I([0,1]^{\omega_1})}$. Згідно з лемою 2, воно має точки однократності, множина яких збігається з $\delta[0,1]^{\omega_1}\big([0,1]^{\omega_1}\big)$. Разом з тим з леми 2.2 в [17] випливає, що для довільної міри $\nu \in IA$, де A — довільна метризовна підмножина в $[0,1]^{\omega_1}$, шар $\beta^{-1}_{I([0,1]^{\omega_1})}(\nu)$ є метризовним. Отже, нам залишається лише ідемпотентний аналог питання Федорчука, сформульованого для ймовірнісних мір (питання 7.12 з [6]): чи відображення $\beta_{I([0,1]^{\omega_1})}$, обмежене на повний прообраз деякого компакту, елементами якого є тільки міри з неметризовними носіями, є тривіальним розшаруванням з шаром $[0,1]^{\omega_1}$?

Відповідь на це питання є, як і у випадку ймовірнісних мір, негативною і випливає з наступного твердження, що є знову ж таки ідемпотентним аналогом твердження 5.1 з [18]. Зауважимо, що доведення нашого твердження можна отримати формальним перекладом доведення твердження 5.1 на мову ідемпотентної математики з урахуванням категорних властивостей функтора ідемпотентних мір I, досліджених у [22].

Твердження. *Існує міра з неметризовним носієм, $\nu \in I([0,1]^{\omega_1})$, така, що компакт $\beta^{-1}_{I([0,1]^{\omega_1})}(\nu)$ має точку зліченного характеру.*

Література

1. M. Akian, *Densities of idempotent measures and large deviations*, Trans. Amer. Math. Soc., **351**, № 11, 4515 – 4543 (1999).
2. L. Bazylevych, D. Repovs, M. Zarichnyi, *Spaces of idempotent measures of compact metric spaces*, Topology and Appl., **157**, 136 – 144 (2010).
3. L. Q. Eifler, *Openness of convex averaging*, Glas. Mat. Ser. III, **32**, № 1, 67 – 72 (1977).
4. V. V. Fedorchuk, *On a barycentric map of probability measures*, Vestn. Mosk. Univ., Ser. I, № 1, 42 – 47 (1992).
5. V. V. Fedorchuk, *On barycentrically open bicompacta*, Sib. Math. J., **33**, 1135 – 1139 (1992).
6. V. V. Fedorchuk, *Probability measures in topology*, Russian Math. Surveys, **46** , 41 – 80 (1991).
7. V. Fedorchuk, A. Chigogidze, *Absolute retracts and infinitedimensional manifolds*, Nauka, Moskow (1992).
8. S. Gaubert, R. Katz, *Max-plus convex geometry*, Lect. Notes Comput. Sci., **4136**, 192 – 206 (2006).
9. G. L. Litvinov, *The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction*, Contemp. Math., **377**, 1 – 17 (2005).

10. V. P. Maslov, S. N. Samborskii, *Idempotent analysis*, Adv. Soviet Math., Vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence (1992).
11. R. C. O'Brien, *On the openness of the barycentre map*, Math. Ann., **223**, 207 – 212 (1976).
12. S. Papadopoulou, *On the geometry of stable compact convex sets*, Math. Ann., **229**, 193 – 200 (1977).
13. T. Radul, *Absolute retracts and equiconnected monads*, Topology and Appl., **202**, 1 – 6 (2016).
14. T. Radul, *On the openness of the idempotent barycenter map*, Topology and Appl., **265**, Article 106809 (2019), DOI 10.1016/j.topol.2019.07.003.
15. T. Radul, *On the baricentric map of probability measures*, Vestn. Mosk. Univ., Ser. I, № 1, 3 – 6 (1994).
16. T. Radul, *On baricentrically soft compacta*, Fund. Math., **148**, 27 – 33 (1995).
17. T. Radul, *Idempotent measures: absolute retracts and soft maps*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **56**, 161 – 172 (2020).
18. T. N. Radul, M. M. Zarichnyi, *Monads in the category of compacta*, Uspekhi Mat. Nauk., **50**, 83 – 108 (1995).
19. E. V. Shchepin, *Topology of limit spaces of uncountable inverse spectra*, Russian Math. Surveys, **31**, 155 – 191 (1976).
20. H. Torunczyk, J. West, *Fibrations and bundles with Hilbert cube manifold fibers*, Mem. Amer. Math. Soc., **80**, № 406 (1989).
21. M. van de Vel, *Theory of convex strutures*, North-Holland (1993).
22. M. Zarichnyi, *Spaces and mappings of idempotent measures*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **74**, 45 – 64 (2010).
23. M. Zarichnyi, *Michael selection theorem for max-plus compact convex sets*, Topology Proc., **31**, 677 – 681 (2007).
24. K. Zimmermann, *A general separation theorem in extremal algebras*, Ekon.-Mat. Obz., **13**, 179 – 201 (1977).

Одержано 13.08.19