УДК 517.547.22

А. І. Бандура (Івано-Франк. нац. техн. ун-т нафти і газу),
О. Б. Скасків (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ І ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

We study relations between the class of entire functions of order ρ and of completely regular growth and the class of entire functions of bounded l-index, where $l(z) = |z|^{\rho-1} + 1$ for $|z| \geq 1$. Possible applications of these functions in the analytic theory of differential equations are considered. We pose three new problems on the existence of functions with given properties which belong to the difference of these classes and, for the fourth problem, we give an affirmative answer. Namely, we suggest sufficient conditions for an infinite product to be an entire function of completely regular growth of order ρ with unbounded l_ρ-index and its zeros do not satisfy known Levin's conditions (C) and (C$'$). We also construct an entire function of completely regular growth of order ρ with unbounded l_ρ-index, whose zeros do not satisfy known Levin's conditions (C) and (C$'$).

Досліджується зв'язок між класом цілих функцій цілком регулярного зростання порядку ρ і класом цілих функцій обмеженого l-індексу, де $l(z) = |z|^{\rho-1} + 1$ для $|z| \geq 1$. Розглядаються можливі застосування цих функцій в аналітичній теорії диференціальних рівнянь. Сформульовано три нові проблеми про існування функцій із заданими властивостями, які належать до різниць цих класів. Отримано ствердну відповідь на проблему 4, а саме наведено достатні умови того, що нескінченний добуток є цілою функцією цілком регулярного зростання порядку ρ, необмеженого l_ρ-індексу, а його нулі не задовольняють відомі умови Левіна (C) та (C$'$). Також побудовано цілу функцію цілком регулярного зростання порядку ρ й обмеженого індексу l_ρ, нулі якої не задовольняють відомі умови Левіна (C) і (C$'$).

На сьогодні властивості цілих функцій цілком регулярного зростання є досить повно вивченими (широку бібліографію про цей клас функцій див. у монографіях [1, 15, 22, 24, 30, 32]). Проте цей розділ комплексного аналізу має багато давніх проблем. Однією з таких цікавих проблем є проблема **Гольдберга – Островського – Петренка** [14] (часто використовується скорочення ГОП-проблема): *Нехай*

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)w^{(n-1)} + \ldots + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0 \tag{1}$$

— задане лінійне диференціальне рівняння, коефіцієнти якого a_j, $0 \leq j \leq n-1$, *— цілі функції цілком регулярного зростання. Чи кожний розв'язок* $w(z)$ *рівняння* (1), *який має скінченний порядок, буде цілком регулярного зростання*?

В. П. Петренко [31] сформулював цю проблему без припущення, що коефіцієнти $a_j(z)$ — цілі функції цілком регулярного зростання. Він також дав ствердну відповідь, якщо $a_j(z)$ — многочлени. Пізніше А. А. Гольдберг [14] спростував цю проблему у формулюванні Петренка. Він показав, що якщо f — довільна ціла функції з нулями порядку щонайбільше $n-1$, то вона задовольняє деяке лінійне диференціальне рівняння порядку n вигляду (1), де a_j, $0 \leq \leq j \leq n-1$, — цілі функції. Тому А. А. Гольдберг і Й. В. Островський уточнили формулювання Петренка, додавши припущення про цілком регулярне зростання коефіцієнтів a_j, $0 \leq j \leq n-1$. Незважаючи на понад 30 років досліджень, ця проблема залишається нерозв'язаною [23].

Водночас зазначимо [33], що кожен цілий розв'язок лінійного диференціального рівняння n-порядку зі сталими коефіцієнтами є функцією обмеженого індексу. А цілі функції обмеженого l-індексу мають властивості, що вказують на їхню подібність до функцій цілком регулярного зростання. Нехай $l\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — задана додатна неперервна функція, де $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [27], якщо існує ціле число m, не залежне від z, таке, що $\dfrac{|f^{(p)}(z)|}{l^p(z)p!} \le \max\left\{\dfrac{|f^{(s)}(z)|}{l^s(z)s!} : 0 \le s \le m\right\}$ для всіх p і кожного $z \in \mathbb{C}$. Найменше таке ціле m називається l-індексом функції f і позначається через $N(f;l)$. Якщо $l(z) \equiv 1$, то функція f називається функцією обмеженого індексу [29].

Зокрема, ці функції мають такі властивості [2, 34]: рівномірний у деякому сенсі розподіл своїх нулів, певну регулярну поведінку розв'язків диференціального рівняння, тощо. Більш того, відомо [26], що кожен цілий розв'язок рівняння (1) з многочленними коефіцієнтами $a_j(z)$ має обмежений l-індекс з $l(z) = |z|^s + 1$, де $s = \max_{j\in\{0,\dots,n-1\}} \dfrac{\deg a_j(z)}{j}$. Також у працях [4, 12, 26] отримано достатні умови обмеженості l-індексу цілих розв'язків рівняння (1), де $a_j(z)$ — цілі трансцендентні функції. Крім того, для цілих функцій обмеженого l-індексу в [27, 34] встановлено такі оцінки їхнього зростання:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\max\{|f(z)| : |z| = r\}}{\int_0^r l(t)dt} \le N(f;l) + 1, \tag{2}$$

де $l = l(|z|)$ задовольняє деякі додаткові умови. Визначимо $l_\rho(z) = |z|^{\rho-1} + 1$. Зважаючи на наведену оцінку зростання, А. А. Гольдберг [16] неявно сформулював таку проблему.

Проблема 1. *Який взаємозв'язок між класом цілих функцій цілком регулярного зростання, скінченного порядку ρ і класом цілих функцій обмеженого l_ρ-індексу*?

Ним встановлено такі факти [16]:

1. Нехай $0 < \rho < \infty$. Функція Міттаг-Леффлера $E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(1 + k/\rho)}$ має порядок ρ, обмежений l_ρ-індекс з $l_\rho(z) = |z|^{\rho-1} + 1$ і цілком регулярне зростання, де Γ — гамма-функція, тобто $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$.

2. Існує ціла функція цілком регулярного зростання і скінченного порядку $\rho \in (0;1)$ така, що вона необмеженого l-індексу для $l(z) = |z|^{\rho-1} + 1$.

Остання функція побудована Гольдбергом так: для $0 < \rho < \infty$ позначимо $k_n = 2^{2^n}$, $q_n = 2^{2^n} - 2^{2^n - n} = k_n(1 - 2^{-n})$, $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [k_n, q_{n+1}]$, $\mathcal{A} = \{k^{1/\rho} : k \in \mathcal{B} \cap \mathbb{N}\}$. Тоді визначимо

$$g(z) = \prod_{a\in\mathcal{A}} (1 - z/a). \tag{3}$$

Зазначимо, що $n(r) = \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ |a|<r}} 1 = (1 + o(1))r^\rho$ при $r \to \infty$ (див. [16]).

Щоб встановити обмеженість l-індексу функції g для деякої функції l, ми скористаємося результатом із [9]. Нехай Q — клас додатних неперервних функцій l на $[0, +\infty)$ таких, що величина

$$\lambda(r) = \sup\left\{\frac{l(t_1)}{l(t_2)} : |t_1 - t_2| < \frac{r}{\min\{l(t_1), l(t_2)\}}\right\}$$

скінченна для всіх $r \ge 0$. Нехай $l_1(r)$, $l_2(r)$ — додатні неперервні функції. Запис $l_1(r) \asymp l_2(r)$ означає, що існують $\theta_1 > 0$ і $\theta_2 > 0$ такі, що $\theta_1 l_1(r) \le l_2(r) \le \theta_2 l_1(r)$ для всіх $r > 0$. Наступне твердження вказує достатні умови обмеженості l-індексу для нескінченного добутку нульового роду.

Твердження 1 [9]. *Нехай* $\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{c_n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|c_n|} < +\infty$, $n(r,\pi) = \sum_{|c_n|<r} 1$ *і* $n^{\gamma}/c_n \searrow 0$ $(n\to\infty)$ *для деякого* $\gamma \in (0,1]$. *Якщо* $\sum_{k=n(r,\pi)}^{\infty}\dfrac{1}{|c_k|} = O(r^{-1}n(r,\pi)\ln n(r,\pi))$, $r\to\infty$, *то функція* $\pi(z)$ *має обмежений* l*-індекс з функцією* $l\in Q$ *такою, що* $l(r)\asymp r^{-1}n(r,\pi)\ln n(r,\pi)$ $(r\to\infty)$.

Також відомі інші результати [10, 37, 38] про обмежений індекс нескінченного добутку нульового роду. З огляду на твердження 1 функція $g(z)$ має обмежений l-індекс з $l(r)\asymp r^{\rho-1}\ln r$.

Щоб розглянути докладніше проблему 1, нам потрібні деякі факти з [30]. Нехай f — ціла функція, c_n — її нулі, $\rho(r)$ — уточнений порядок функції f. Б. Я. Левін [30, с. 107] виділив два підкласи цілих функцій цілком регулярного зростання. Він припустив, що виконується одна з наступних умов:

(C) Існує число $d>0$ таке, що кола радіусів $r_n = d|c_n|^{1-\frac{\rho(|c_n|)}{2}}$ з центрами у точках c_n не перетинаються.

(C$'$) Точки c_n лежать в середині кутів зі спільною вершиною в початку координат, які не мають інших спільних точок і є такими, що якщо після впорядкування за зростанням модулів точки множини $\{c_n\}$ лежать в одному з цих кутів, то всі точки з цього кута задовольняють нерівність $|c_{k+1}|-|c_k| > d|c_k|^{1-\rho(|c_k|)}$ для деякого $d>0$.

Функція $g(z)$, побудована А. А. Гольдбергом, задовольняє умову (C$'$).

Наразі ми не можемо дати вичерпну відповідь на проблему Гольдберга. У цій статті ми розглянемо деякі часткові проблеми, пов'язані з проблемою 1.

У [18] отримано наведені нижче оцінки логарифмічної похідної цілої функції f цілком регулярного зростання, нулі c_n якої задовольняють умову (C).

Твердження 2 [18]. *Нехай* $f(z)$ *— ціла функція порядку* ρ, *цілком регулярного зростання відносно уточненого порядку* $\rho(r)\to\rho$ $(r\to\infty)$, *а її нулі задовольняють умову* (C). *Нехай* $\Delta(\psi)$ *— кутова щільність послідовності нулів функції* $f(z)$, E *— множина точок розриву функції* $\Delta(\psi)$, M *— довільна замкнена множина, а* $M\subset[0,2\pi]\setminus E$, U *визначено вище. Тоді для* $z=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}\setminus U$ *рівномірно щодо* φ, $\varphi\in M$ *справджується рівність*

$$f'(z)/f(z) = \mathcal{H}(\varphi)r^{\rho(r)-1} + o(r^{\rho(r)-1}),\quad r\to\infty, \tag{4}$$

де

$$\mathcal{H}(\varphi) = \begin{cases} -\dfrac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\displaystyle\int_0^{2\pi}\exp\{i[-\psi+(\rho-1)(|\varphi-\psi|-\pi)\mathrm{sgn}(\varphi-\psi)]\}d\Delta(\psi), & \rho\notin\mathbb{Z}_+,\\ \exp(i(\rho-1)\varphi)\left\{\delta + i\displaystyle\int_0^{2\pi}[\varphi-\psi-\pi\mathrm{sgn}(\varphi-\psi)]e^{-i\rho\psi}d\Delta(\psi)\right\}, & \rho\in\mathbb{Z}_+,\end{cases}$$

$$\delta = \lim\nolimits_{r\to\infty} r^{\rho-\delta(r)}\delta(r) \qquad i \qquad \delta(r) = c + \frac{1}{\rho}\sum\nolimits_{|c_k|\le r}|c_n|^{-\rho}.$$

Отже, за твердженням 2 ціла функція $f(z)$ скінченного порядку $\rho>0$ і цілком регулярного зростання з нулями, що задовольняють умову (C), допускає оцінку

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq Pl_\rho(z) \tag{5}$$

для всіх z, що лежать ззовні множини $U = \bigcup_k \{z : |z - c_n| < q|c_n|^{1-\rho/2}\}$.

Нижче у доведенні теореми 1 скористаємося відомим логарифмічним критерієм обмеженості l-індексу. Це твердження 4. Нерівність (5) — необхідна умова обмеженості l_ρ-індексу цілих функцій із твердження 4, якщо вона виконується для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus G_q(f)$, де $G_q(f) = \bigcup_n \left\{z : |z - c_n| < \dfrac{q}{l_\rho(c_n)}\right\}$. Оскільки $\mathbb{C} \setminus U \subset \mathbb{C} \setminus G_q(f)$, це приводить до такого питання.

Проблема 2. *Чи існує ціла функція f порядку ρ і цілком регулярного зростання, нулі якої задовольняють умову* (C) *і такі, що f — функція необмеженого l_ρ-індексу*?

Існують функції обмеженого l_ρ-індексу, порядку ρ і цілком регулярного зростання, нулі яких задовольняють умову (C) (див. приклади у доведенні теореми 4 з [8]).

Зважаючи на описані властивості функції Міттаг-Леффлера і функції $g(z)$, природною виглядає така проблема.

Проблема 3. *Чи існує ціла функція порядку ρ і обмеженого l_ρ-індексу така, що f має не цілком регулярне зростання?*

Зазначимо, що існує ціла функція порядку ρ і обмеженого l_ρ-індексу така, що f має цілком регулярне зростання, а її нулі задовольняють умову (C). Прикладом функції з такими властивостями є σ-функція Вейєрштрасса. Відомо, що це ціла функція порядку 2 з множиною простих нулів на цілочисловій ґратці, а тому вона задовольняє умову (C). Цілком регулярне зростання цієї функції встановлено у [20, 25] (також див. [18]). Натомість обмеженість l-індексу цієї функції з $l(r) = r$ (так звану гіпотезу Шеремети) доведено у статті [6].

Зокрема, умови (C) і (C$'$) не вичерпують усі функції цілком регулярного зростання. Також відомим є великий клас цілих функцій цілком регулярного зростання, нулі яких не задовольняють умови (C) і (C$'$). Тому наступне питання виглядає цікавим.

Проблема 4. *Чи існує ціла функція f порядку ρ, цілком регулярного зростання і обмеженого l_ρ-індексу з простими нулями, які не задовольняють умови* (C) *та* (C$'$)?

Наступне твердження дає ствердну відповідь на питання з проблеми 4.

Твердження 3. *Існує ціла функція з простими нулями, порядку ρ, цілком регулярного зростання і обмеженого l_ρ-індексу, нулі якої не задовольняють умови* (C) *і* (C$'$).

Доведення. Розглянемо функцію

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^{1/\rho}}\right),$$

де $\rho \in (0, 1)$. Ціла функція $g(z)$ (див. [8], теорема 4) має порядок ρ, цілком регулярне зростання і обмежений l_ρ-індекс. Її нулі не задовольняють умову (C) і задовольняють умову (C$'$). Справді, маємо

$$(n+1)^{1/\rho} - n^{1/\rho} > dn^{1/\rho - 1} \Leftrightarrow (1 + 1/n)^{1/\rho} - 1 > \frac{d}{n}.$$

Але $(1 + 1/n)^{1/\rho} - 1 \sim \dfrac{1}{n\rho}$ при $n \to \infty$, тобто для $d < \dfrac{1}{\rho}$ умова (C$'$) справджується.

Подібним чином відстань між нулями поводиться як $(n+1)^{1/\rho} - n^{1/\rho} \sim n^{1/\rho}\dfrac{1}{n\rho} = \dfrac{n^{1/\rho-1}}{\rho}$ при $n \to \infty$. Але для радіуса виконується рівність $(n^{1/\rho})^{1-\rho/2} = n^{1/\rho-1/2}$. Відповідно, радіус більший за відстань між двома колами. Звідси робимо висновок, що нулі функції $g(z)$ не задовольняють умову (C).

Виберемо $a \in (0, \inf_{n\in\mathbb{N}}\{1, (n+1)^{1/\rho} - n^{1/\rho}\})$. Тоді ціла функція $g_1(z) = g(z+a)$ також має порядок ρ, цілком регулярне зростання й обмежений l^*-індекс, де $l^*(z) = |z+a|^{\rho-1} + 1$.

Розглянемо $g_2(z) = g(z)g_1(z) = g(z)g(z+a)$. Функція $g_2(z)$ також ціла функція порядку ρ. Позначимо через $n(r,f)$ число нулів функції f у крузі $|z| < r$. Зважаючи на вибір a, маємо $n(r,g) \le n(r+a,g) \le n(r,g)+1$, тобто $n(r,g_2) = n(r,g) + n(r,g_1) = n(r,g) + n(r+a,g) \le$ $\le 2n(r,g)+1$. Тому за твердженням 5 функція g_2 має цілком регулярне зростання.

Варто зауважити, що $l^*(z) \sim l_\rho(z)$ при $z \to \infty$. Тоді за теоремою 3 з [35] $g_1(z)$ також є функцією обмеженого l_ρ-індексу. Відомо [35] (наслідок 1), що добуток цілих функцій обмеженого l-індексу також функція обмеженого l-індексу. Звідси отримуємо, що функція $g_2(z)$ має обмежений l_ρ-індекс.

Звісно, нулі функції g_2 не задовольняють умову (C), тому що нулі функції g мають подібну властивість. Більш того, відстань між нулями $n^{1/\rho}$ і $n^{/1\rho} - a$ дорівнює a. Але для $\rho \in (0,1)$ справджується $(n^{1/\rho} - a)^{1-\rho} > ((n-1)^{1/\rho})^{1-\rho} = (n-1)^{1/\rho-1} \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Таким чином, умова (C$'$) не виконується.

Твердження 3 доведено.

Позначимо через $n(r,z,1/f) = \sum_{|a_k-z|<r} 1$ лічильну функцію нулів, де $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — послідовність нулів функції f, а z — фіксована точка.

***Зауваження* 1.** Використовуючи ідею доведення твердження 3, ми можемо побудувати цілу функцію f порядку ρ, цілком регулярного зростання і необмеженого l_ρ-індексу з простими нулями, які не задовольняють умови (C) і (C$'$). Досить розглянути функцію $f(z) = g(z)g(z+$ $+a)$, де g — функція, подбудована Гольдбергом у [16] (див. також (3)), а величина a визначена так само, як у доведенні твердження 3. Зазначимо, що функція Гольдберга не задовольняє умову 1 твердження 4 (див. відповідні міркування у [15]), тобто нерівність $|g'(z)|/|g(z)| \le Pl_\rho(|z|)$ не виконується. А це означає, що вона є функцією необмеженого l_ρ-індексу.

За твердженням 4 обмеженість l-індексу означає справедливість деякої оцінки логарифмічної похідної через функцію l_ρ (умова 1 у твердженні 4) і рівномірний розподіл нулів у деякому сенсі (умова 2 у твердженні 4).

Тому цікаво з'ясувати, чи існує ціла функція f порядку ρ, цілком регулярного зростання з простими нулями, які не задовольняють умови (C) і (C$'$) і до того ж $\sup_{z\in\mathbb{C}} n(r,z,1/f) = +\infty$. Іншими словами, функція не повинна задовольняти умову 2 твердження 4. Її нулі повинні лежати досить близько, щоб умови (C), (C$'$) й умова 2 з твердження 4 не справджувалися. З іншого боку, її нулі повинні лежати на такій відстані один від одного, щоб не порушилося цілком регулярне зростання.

Використовуючи приклад з [28, с. 75, 76], ми побудуємо таку функцію.

Далі запис $[a]$ означатиме цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Нехай* $\alpha \geq 1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — *додатна необмежена послідовність, що строго зростає і така, що* $x_{n+1} - x_n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^\alpha}{x_n^p} < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^\alpha}{x_n^{p-1}} = +\infty$ *для деякого* $p \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Нехай $\rho = \inf\left\{\beta \geq 1 \colon \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^\alpha}{x_n^\beta} < \infty\right\}$, $m_1 = 1$, $m_{k+1} = m_k + [k^\alpha]$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{m_k} = x_k$ *і* $\lambda_j = \lambda_{m_k} + \dfrac{j - m_k}{m_{k+1} - m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho}$ *для* $m_k \leq j < m_{k+1}$. *Тоді нескінченний добуток*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^p}{\lambda_k^p}\right) \tag{6}$$

має такі властивості:

1) f — *ціла функція порядку* ρ;

2) *нулі функції* f *не задовольняють умову* (C); *якщо до того ж* $n^{-\alpha}x_n^{1-\rho/2} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то вони не задовольняють умову* (C$'$);

3) f *має необмежений* l_ρ*-індекс*;

4) *якщо* $\alpha = 1$ *і* $x_n = n^\gamma$, $\gamma \in [1, 2]$, *то функція* f *має цілком регулярне зростання.*

Доведення. Зрозуміло, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^p} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1}\frac{1}{\lambda_j^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty}[k^\alpha]\lambda_{m_k}^{-p} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^\alpha}{x_k^p} < +\infty,$$

тобто функція f є цілою. Також для $m_k \leq j < m_{k+1}$ справджується $\lambda_{m_k} \leq \lambda_j \leq \lambda_{m_k} + 1$. Звідси $x_k \leq \lambda_j \leq x_k + 1$ для $m_k \leq j < m_{k+1}$. Підсумовуючи відповідні вирази, отримуємо

$$\frac{[k^\alpha]}{x_k^\beta} \leq \sum_{j=m_k}^{m_{k+1}-1}\frac{1}{\lambda_j^\beta} \leq \frac{[k^\alpha]}{(x_k+1)^\beta}.$$

Тому

$$\rho = \inf\left\{\beta \geq 1 \colon \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^\alpha}{x_k^\beta} < \infty\right\} = \inf\left\{\beta \geq 1 \colon \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^\beta} < \infty\right\}.$$

Отже, функція f має порядок ρ.

Для доведення необмеженості l_ρ-індексу нам потрібне допоміжне твердження.

Твердження 4 [34, 35]. *Нехай* $l \in Q$. *Ціла функція* f *має обмежений* l*-індекс тоді й тільки тоді, коли*:

1) *для будь-якого* $r > 0$ *існує* $P = P(r) > 0$ *таке, що* $|f'(z)/f(z)| \leq Pl(z)$ *для кожного* $z \in \mathbb{C}\setminus G_r$;

2) *для будь-якого* $r > 0$ *знайдеться* $\tilde{n} = \tilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що* $n(r/l(z), z, 1/f) \leq \tilde{n}$ *для всіх* $z \in \mathbb{C}$.

***Зауваження* 2.** Слабші достатні умови обмеженості l-індексу отримано у [3, 5]. Цей критерій дуже зручний для дослідження нескінченних добутків [7–11, 19, 36–38]. Він також застосовний до диференціальних рівнянь [4, 26].

Доведемо, що умова 2 у твердженні 4 не задовольняється. Дійсно,

$$n\left(\frac{1}{\lambda_{m_k}^{\rho-1}}, \lambda_{m_k}, \frac{1}{f}\right) = \sum_{|\lambda_j - \lambda_{m_k}| \le \lambda_{m_k}^{1-\rho}} 1 = m_{k+1} - m_k = [k^\alpha] \to +\infty \ (k \to \infty).$$

Отже, функція f має необмежений l_ρ-індекс.

Тепер перевіримо умову (C$'$). Наприклад, якщо $j = m_k$, то

$$|\lambda_{j+1}| - |\lambda_j| = \left(\lambda_{m_k} + \frac{1}{m_{k+1} - m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho}\right) - \lambda_{m_k} =$$

$$= \frac{1}{m_{k+1} - m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho} = \frac{1}{k^\alpha}\lambda_{m_k}^{1-\rho}. \qquad (7)$$

Через те, що $\dfrac{1}{k^\alpha} \to 0$ при $k \to +\infty$, умова (C$'$) не виконується. Щоб спростувати справедливість умови (C), досить показати, що для $j = m_k$ виконується

$$\lambda_j + d\lambda_j^{1-\rho/2} > \lambda_{j+1} - d\lambda_{j+1}^{1-\rho/2}$$

або

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j < d(\lambda_j^{1-\rho/2} + \lambda_{j+1}^{1-\rho/2}).$$

Але з (7) випливає

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j = \frac{\lambda_{m_k}^{1-\rho/2}}{k^\alpha}\lambda_{m_k}^{1-\rho/2} = \frac{x_k^{1-\rho/2}}{k^\alpha}\lambda_{m_k}^{1-\rho/2}.$$

За припущенням цієї теореми маємо $\dfrac{x_k^{1-\rho/2}}{k^\alpha} \to 0$ при $k \to \infty$. Отже, умова (C) є хибною для нулів функції f.

Щоб довести властивість 4, нам потрібні деякі факти з [30] (гл. 2).

Твердження 5 [30, с. 158]**.** *Для того щоб ціла функція $f(z)$ уточненого порядку $\rho(r)$ була функцією цілком регулярного зростання, необхідно й достатньо, щоб її нулі були регулярно розподілені, тобто для всіх, крім зліченної множини, значень ν і θ $(0 < \nu < \theta < 2\pi)$ існує скінченна границя $\lim_{r\to\infty} \dfrac{n(r,\nu,\theta)}{r^{\rho(r)}}$, а якщо до того ж ρ — ціле число, то існує скінченна границя $\delta_f = \lim_{r\to\infty} \dfrac{\delta_f(r)}{r^{\rho(r)-r}}$ $\left(\delta_f(r) = c_\rho + \dfrac{1}{\rho}\sum_{|a_n|\le r} a_n^{-\rho}\right)$, де c_ρ — коефіцієнт при доданку з найбільшим степенем в експоненціальному множнику на початку канонічного добутку.*

Нехай $\alpha = 1$, $x_n = n^\gamma$, $\gamma \in [1;2]$. Тоді $\rho = \dfrac{2}{\gamma}$, $p = \left[\dfrac{2}{\gamma}\right] + 1$. Звідси $m_{k+1} = m_k + k$, $\lambda_{m_k} = x_k = k^\gamma$ і

$$\lambda_j = \lambda_k + \frac{j - m_k}{m_{k+1} - m_k}\lambda_{m_k}^{1-\rho} = k^\gamma + \frac{j - m_k}{k}\,(k^\gamma)^{1-2/\gamma} = k^\gamma + (j - m_k)k^{\gamma-3}$$

для $m_k \le j < m_{k+1}$.

Нулі функції $f(z) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \dfrac{z^p}{\lambda_k^p}\right)$ симетрично розподілені на p променях. Досить розглянути один промінь. Нехай $n(r,0)$ — число нулів на промені $\arg z = 0$ в середині круга

$|z| < r$. Тоді верхню оцінку кутової щільності можна отримати з рівностей

$$\lambda_{m_{k+1}-1} = k^\gamma + k \cdot k^{\gamma-3} = k^\gamma + k^{\gamma-2} = r,$$
$$n(r,0) = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Звідси

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,0)}{r^\rho} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k^2+k)/2}{(k^\gamma + k^{\gamma-2})^{2/\gamma}} = \frac{1}{2}.$$

Для нижньої оцінки виберемо $\lambda_{m_k} = k^\gamma = r$, тобто $k = r^{1/\gamma}$. Тоді $n(r,0) = 1 + 2 + \ldots + (k - - 2) + k - 1 + 1 = \dfrac{k(k-1)}{2} + 1 = \dfrac{r^{1/\gamma}(r^{1/\gamma}-1)}{2} + 1$. Звідси

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,0)}{r^\rho} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^{1/\gamma}(r^{1/\gamma}-1)/2+1}{r^{2/\gamma}} = \frac{1}{2}.$$

Згідно з твердженням 5 функція f має цілком регулярне зростання, якщо $2/\gamma$ не ціле, а це можливо, якщо $\gamma \notin \{1,2\}$.

Якщо ж $2/\gamma$ — ціле число, то згідно з твердженням 5 нам потрібно довести існування границі $\delta_f = \lim_{r\to\infty} \dfrac{\delta_f(r)}{r^{\rho(r)-r}}$. У цьому випадку $c_\rho = 0$. Для $\rho(r) = \rho \in \{1,2\}$ маємо

$$\delta_f = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_k|<r} \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_k^{-\rho} e^{\frac{2\pi i j}{p}} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_k|<r} \lambda_k^{-\rho} \sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i j}{p}} =$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_k|<r} \lambda_k^{-\rho} \frac{1 - e^{\frac{2\pi i p}{p}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{p}}} = 0.$$

Звідси випливає для $\gamma \in \{1,2\}$ функція f також має цілком регулярне зростання.

Теорему 1 доведено.

Зведемо всі наведені факти в таблицю:

Зростання	Умова	l_ρ	$\cancel{l_\rho}$
ц.р.	(C)	σ-функція Вейєрштрасса [6, 20, 25]	? (проблема 2)
ц.р.	(C′)	функція Міттаг-Леффлера [16] Бордуляк, Шеремета [8]	Гольдберг [16]
ц.р.	$\cancel{(C')}$ $\cancel{(C)}$	Бандура, Скасків (твердження 3)	Бандура, Скасків (зауваження 1, теорема 1)
~~ц.р.~~		? (проблема 3)	тривіально

З огляду на проблему 3, можна сформулювати таке елементарне зауваження.

***Зауваження* 3.** Кожна ціла функція з простими нулями, порядку ρ, цілком регулярного зростання і максимального типу є функцією необмеженого l_ρ-індексу. Це безпосередньо випливає з нерівності (2).

Функції скінченного порядку і не цілком регулярного зростання з [17] мають необмежений l_ρ-індекс. Безпосередніми обчисленнями можна перевірити, що їхні логарифмічні похідні не задовольняють (5). Якщо відповідь на проблему 3 є негативною, то проблема Гольдберга – Островського – Петренка стає розв'язною для диференціального рівняння (1), коефіцієнти якого є функціями обмеженого l_ρ-індексу і задовольняють деякі природні обмеження (див., наприклад, [4, 12, 26]).

Література

1. V. Azarin, *Growth theory of subharmonic functions*, Birkhäuser, Basel (2009).
2. A. Bandura, O. Skaskiv, *Entire functions of several variables of bounded index*, Publisher I. E. Chyzhykov, Lviv (2016).
3. А. Бандура, О. Скасків, *Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком*, Укр. мат. журн., **69**, № 3, 426 – 432 (2017).
4. A. Bandura, O. Skaskiv, P. Filevych, *Properties of entire solutions of some linear PDE's*, J. Appl. Math. and Comput. Mech., **16**, № 2, 17 – 28 (2017).
5. A. I. Bandura, *Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction*, Mat. Stud., **47**, № 1, 27 – 32 (2017).
6. M. T. Bordulyak, *On l-index boundedness of the Weierstrass σ-function*, Bull. Soc. Sci. Lett. Lódź Sér. Rech. Déform., **63**, № 1, 49 – 56 (2013).
7. M. T. Bordulyak, I. E. Chyzhykov, M. M. Sheremeta, *Preservation of l-index boundedness under zero shifts*, Mat. Stud., **19**, № 1, 21 – 30 (2003).
8. M. T. Bordulyak, M. M. Sheremeta, *On the existence of entire functions of bounded l-index and l-regular growth*, Ukr. Math. J., **48**, № 9, 1322 – 1340 (1996).
9. I. E. Chyzhykov, M. M. Sheremeta, *On the boundedness l-index for entire functions of zero genus*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., **7**, 33 – 39 (2003).
10. I. E. Chyzhykov, M. M. Sheremeta, *Boundedness of l-index for entire functions of zero genus*, Mat. Stud., **16**, № 2, 124 – 130 (2001).
11. G. H. Fricke, *Entire functions of locally slow growth*, J. Anal. Math., **28**, № 1, 101 – 122 (1975).
12. G. H. Fricke, S. M. Shah, *On bounded value distribution and bounded index*, Nonlinear Anal., **2**, № 4, 423 – 435 (1978).
13. A. A. Goldberg, M. N. Sheremeta, *Existence of an entire transcendental function of bounded l-index*, Math. Notes, **57**, № 1, 88 – 90 (1995).
14. A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Completely regular growth of entire solutions of linear differential equation*, Linear and Complex Analysis. Problem book 3, Springer-Verlag, Berlin (1994), p. 300.
15. A. A. Goldberg, B. Ya. Levin, I. V. Ostrovskii, *Entire and meromorphic functions*, Complex Analysis: one Variable, Modern Problems of Mathematics, **85**, 5 – 186 (1991).
16. A. A. Goldberg, *An estimate of modulus of logarithmic derivative of Mittag-Leffler function with applications*, Mat. Stud., **5**, 21 – 30 (1996).
17. A. A. Goldberg, S. N. Strochik, *Asymptotic behavior of meromorphic functions of completely regular growth and of their logarithmic derivatives*, Sib. Math. J., **26**, № 6, 802 – 809 (1985).
18. A. A. Goldberg, N. E. Korenkov, *Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of an entire function of completely regular growth*, Ukr. Math. J., **30**, № 1, 17 – 22 (1978).
19. А. А. Гольдберг, М. М. Шеремета, *Про обмеженість l-індексу канонічних добутків*, Укр. мат. вісн., **2**, № 1, 52 – 64 (2005).
20. А. А. Гольдберг, *О распределении значений сигма-функции Вейерштрасса*, Изв. вузов, математика, № 1, 43 – 46 (1966).
21. A. A. Gol'dberg, N. E. Korenkov, *Asymptotic behavior of logarithmic derivative of entire function of completely regular growth*, Sib. Math. J., **21**, № 3, 363 – 375 (1980).
22. N. V. Govorov, *Riemann's boundary problem with infinite index*, Birkhäuser, Basel (1994).

23. J. Heittokangas, I. Laine, K. Tohge, Z.-T. Wen, *Completely regular growth solutions of second order complex linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **40**, 985 – 1003 (2015).
24. А. А. Кондратюк, *Ряды Фурье и мероморфные функции*, Вища шк., Львов (1988).
25. Н. Е. Коренков, *О распределении значений сигма-функции Вейерштрасса*, Мат. сб., Наук. думка, Киев (1976), с. 240 – 242.
26. А. Д. Кузык, М. Н. Шеремета, *О целых функциях, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям*, Дифференц. уравнения, **26**, № 10, 1716 – 1722 (1990).
27. A. D. Kuzyk, M. M. Sheremeta, *Entire functions of bounded l-distribution of values*, Math. Notes, **39**, № 1, 3 – 8 (1986).
28. А. Д. Кузык, *Целые функции ограниченного l-индекса*, дис. ... канд. физ.-мат. наук, Львов (1992).
29. B. Lepson, *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index*, Proc. Sympos. Pure Math., **2**, 298 – 307 (1968).
30. B. Ya. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Transl. Math. Monogr., **5** (1980).
31. В. П. Петренко, *Целые кривые*, Вища шк., Харьков (1984).
32. L. I. Ronkin, *Functions of completely regular growth*, Math. and Appl. Soviet Ser., **81** (1992).
33. S. M. Shah, *Entire functions of bounded index*, Proc. Amer. Math. Soc., **19**, № 5, 1017 – 1022 (1968).
34. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publ., Lviv (1999).
35. M. N. Sheremeta, A. D. Kuzyk, *Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l-index*, Sib. Math. J., **33**, № 2, 304 – 312 (1992).
36. M. M. Sheremeta, M. T. Bordulyak, *Boundedness of the l-index of Laguerre – Polya entire functions*, Ukr. Math. J., **55**, № 1, 112 – 125 (2003).
37. M. M. Sheremeta, *Generalization of the Fricke theorem on entire functions of finite index*, Ukr. Math. J., **48**, № 3, 460 – 466 (1996).
38. Yu. S. Trukhan, M. M. Sheremeta, *On the boundedness of l-index of a canonical product of zero genus and of a Blaschke product*, Mat. Stud., **29**, № 1, 45 – 51 (2008).

Одержано 26.08.19