DOI: 10.37863/umzh.v72i6.1052

УДК 517.988.6

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ДИХОТОМІЧНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

We obtain the necessary and sufficient conditions for the exponential dichotomy of solutions of linear difference equations with piecewise constant operator coefficients.

Отримано необхідні і достатні умови експоненціальної дихотомії розв'язків лінійних різницевих рівнянь із кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

1. Постановка основної задачі. Нехай $E_n,\ n \in \mathbb{Z},$ — банахові простори, $\|\cdot\|_{E_n}$ — норма в $E_n,\ 0_n$ — нульовий елемент у просторі E_n і $\mathfrak{M}$ — банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)$, для кожної з яких $x_n \in E_n,\ n \in \mathbb{Z}$, з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n}$ і нульовим елементом $\mathbf{0} = (0_n)$.

Позначимо через $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)$, для кожної з яких x_n є елементом банахового простору $E,\ n \in \mathbb{Z}$, з нормою $\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E$. Очевидно, що $l_\infty(\mathbb{Z}, E) = \mathfrak{M}$, якщо $E_n = E$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Нехай $L(E_k, E_l)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A\colon E_k \to E_l$ з нормою $\|A\|_{L(E_k,E_l)} = \sup_{\|x\|_{E_k}=1} \|Ax\|_{E_l}$.

Розглянемо оператори $A_n \in L(E_n, E_{n+1}),\ n \in \mathbb{Z}$, для яких $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E_n,E_{n+1})} < +\infty$, і лінійні різницеві рівняння

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1} + f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x_n \in E_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $\mathbf{f} = (f_n) \in \mathfrak{M}$.

Важливою для теорії різницевих рівнянь є задача про умови існування та єдиності розв'язків рівняння (2) для кожної послідовності $\mathbf{f} \in \mathfrak{M}$, тобто задача про умови оборотності оператора

$$(\mathfrak{A}y)_n = y_n - A_{n-1}y_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

що діє в просторі $\mathfrak{M}$.

Цю задачу розв'язано в [1] із використанням означення експоненціальної дихотомії розв'язків рівняння (1).

Означення 1. *Для рівняння* (1) *має місце експоненціальна дихотомія на* $\mathbb{Z}$ *(рівняння e-дихотомічне), якщо для кожного* $m \in \mathbb{Z}$ *простір* E_m *зображується у вигляді прямої суми замкнених підпросторів* $E_m = E_m^+ \oplus E_m^-$ *і виконуються такі умови*:

а) *проектори* P_m^+ *і* P_m^- *на підпростори* E_m^+ *і* E_m^- *рівномірно обмежені, тобто*

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \left(\|P_m^+\|_{L(E_m,E_m)} + \|P_m^-\|_{L(E_m,E_m)}\right) < +\infty; \tag{3}$$

б) *для кожного* $z \in E_m^+$ *розв'язок* y_n *задачі*

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n \geq m, \quad y_m = z \tag{4}$$

задовольняє нерівність $\|y_n\|_{E_n} \leq N_1(q_1)^{n-m}\|z\|_{E_m}$ *для всіх* $n \geq m$ *з деякими* $N_1 > 0$ *і* $q_1 \in (0,1)$, *не залежними від* n *і* m;

в) *для кожного* $z \in E_m^-$ *розв'язок* y_n *задачі*

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n < m, \quad y_m = z \tag{5}$$

задовольняє нерівність $\|y_n\|_{E_n} \leq N_2(q_2)^{m-n}\|z\|_{E_m}$ *для всіх* $n \leq m$ *з деякими* $N_2 > 0$ *і* $q_2 \in (0,1)$, *не залежними від* n *і* m.

Ми будемо досліджувати рівняння (1), (2) та окремі випадки цих рівнянь у загальному випадку, вважаючи, що жоден із просторів E_m^+ і E_m^- не є нульовим. Якщо ця вимога не виконується, то всі розв'язки рівняння (1) задовольняють співвідношення (4) (випадок $E_m^+ = E_m$) або співвідношення (5) (випадок $E_m^- = E_m$) і дослідження рівнянь суттєво спрощується.

В [1] показано, що справджуються такі твердження.

Теорема 1. *Рівняння* (1) *е-дихотомічне тоді і тільки тоді, коли оператор* $\mathfrak{A}$ *має неперервний обернений.*

Теорема 2. *Якщо оператор* $\mathfrak{A}$ *має неперервний обернений, то існує операторна функція* $G_{n,m}$ ($G_{n,m} \in L(E_m, E_n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$), *для якої*:

1) *справджуються рівності*

$$G_{n,m} - A_{n-1}G_{n-1,m} = \begin{cases} I_m, & \textit{якщо } n = m, \\ O_n, & \textit{якщо } n \neq m, \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

де I_m *і* O_n — *одиничний і нульовий елементи просторів* $L(E_m, E_m)$ *і* $L(E_n, E_n)$ *відповідно*;

2) *для деяких чисел* $q \in (0,1)$ *і* $N > 0$

$$\|G_{n,m}\|_{L(E_m,E_n)} \leq Nq^{|n-m|}, \quad m, n \in \mathbb{Z}; \tag{7}$$

3) *для кожної послідовності* $\mathbf{f} = (f_n) \in \mathfrak{M}$ *обмежений розв'язок рівняння* (2) *має вигляд*

$$x_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} f_m, \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{8}$$

4) *проектори* P_m^+ *і* P_m^- *записуються за допомогою рівностей*

$$P_m^+ = G_{m,m} \ \textit{ і } \ P_m^- = -A_{m-1}G_{m-1,m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Основним об'єктом досліджень у статті є різницеві рівняння

$$x_n = B_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

і

$$x_n = B_{n-1}x_{n-1} + f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

в яких

$$B_n = \begin{cases} D, & \text{якщо} \quad n < n_1, \\ A_n, & \text{якщо} \quad n_1 \le n < n_2, \\ C, & \text{якщо} \quad n \ge n_2, \end{cases} \tag{12}$$

де n_1 і n_2 — довільні цілі числа, для яких $n_1 < n_2$, $C\colon E \to E$, $D\colon E \to E$, $A_n\colon E \to E$ — лінійні неперервні оператори і $\mathbf{f} = (f_n) \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Очевидно, що рівняння (10) є окремим випадком рівняння (1), а B_n — *кусково-сталою* операторною функцією.

Метою статті є встановлення умов експоненціальної дихотомії розв'язків рівняння (10), а отже, встановлення умов оборотності оператора $\mathfrak{B}\colon l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, що визначається співвідношенням

$$(\mathfrak{B}\mathbf{x})_n = x_n - B_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

та знаходження зображення оберненого оператора $\mathfrak{B}^{-1}$ і обмежених розв'язків рівняння (11).

2. Допоміжні твердження. Для подальшого нам потрібні деякі властивості операторних коефіцієнтів різницевих рівнянь (1) і (10) та оператора $\mathfrak{B}$.

***2.1. Властивості операторних коефіцієнтів e-дихотомічного рівняння* (1).** Використаємо означення e-дихотомічності рівняння (1), зображення $E_m = E_m^+ \oplus E_m^-$ простору E_m та проектори P_m^+ і P_m^- на підпростори E_m^+ і E_m^-.

Теорема 3. *Нехай рівняння* (1) *e-дихотомічне. Тоді для кожного* $m \in \mathbb{Z}$:

1) $A_m E_m^+ \subset E_{m+1}^+$;

2) $A_m E_m^- = E_{m+1}^-$ *і оператор* $P_{m+1}^- A_m P_m^-\colon E_m^- \to E_{m+1}^-$ *має неперервний обернений* $\left(P_{m+1}^- A_m P_m^-\right)^{-1}$.

Доведення. Спочатку обґрунтуємо правильність першої частини твердження теореми.

Зафіксуємо довільні $m \in \mathbb{Z}$ і $a \in E_m^+$. Покажемо, що $A_m a \in E_{m+1}^+$.

Припустимо, що $A_m a = b^+ + b^-$, де $b^+ = P_m^+ A_m a$ і $b^- = P_m^- A_m a$, причому $b^- \ne 0_{m+1}$. Розглянемо величини y_n, z_n, z_n^+ і z_n^-, для яких

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n \ge m, \quad y_m = a,$$

$$z_{n+1} = A_n z_n, \quad n \ge m+1, \quad z_{m+1} = b^+ + b^-,$$

$$z_{n+1}^+ = A_n z_n^+, \quad n \ge m+1, \quad z_{m+1}^+ = b^+,$$

і

$$z_{n+1}^- = A_n z_n^-,\ n \ge m+1,\ z_{m+1}^- = b^-.$$

Очевидно, що

$$y_n = z_n \ \text{ для всіх } \ n \ge m+1 \tag{13}$$

і

$$z_n = z_n^+ + z_n^- \ \text{ для всіх } \ n \ge m+1. \tag{14}$$

Згідно з означенням e-дихотомічності рівняння (1) справджуються співвідношення

$$\|y_n\|_{E_n} \leq N_1(q_1)^{n-m}\|a\|_{E_m} \ \text{ для всіх } \ n \geq m$$

і

$$\|z_n^+\|_{E_n} \leq N_1(q_1)^{n-m-1}\|b^+\|_{E_{m+1}} \ \text{ для всіх } \ n \geq m+1$$

з деякими $N_1 > 0$ і $q_1 \in (0,1)$. Тому на підставі (13) і (14)

$$\|z_n^-\|_{E_n} \leq 2N_1(q_1)^{n-m-1}\|b^-\|_{E_{m+1}} \ \text{ для всіх } \ n \geq m+1. \tag{15}$$

Розглянемо задачу

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \leq m, \quad x_{m+1} = b^-. \tag{16}$$

Оскільки $b^- \in E_{m+1}^- \setminus \{0_{m+1}\}$, то згідно з означенням е-дихотомічності рівняння (1) для розв'язку u_n задачі (16) справджується співвідношення

$$\|u_n\|_{E_n} \leq N_2(q_2)^{|n-m-1|}\|b^-\|_{E_{m+1}} \ \text{ для всіх } \ n \leq m+1 \tag{17}$$

з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in (0,1)$.

Із наведених міркувань випливає, що обмежена на підставі (15) і (17) послідовність $\mathbf{v} = (v_n)$, яка визначається формулою

$$v_n = \begin{cases} z_n^-, & \text{якщо} \quad n \geq m+2, \\ b^-, & \text{якщо} \quad n = m+1, \\ u_n, & \text{якщо} \quad n \leq m, \end{cases}$$

є ненульовим обмеженим розв'язком рівняння (16). Проте е-дихотомічне рівняння (1) має лише тривіальний обмежений розв'язок. Тому припущення про виконання співвідношення $b^- \neq 0_{m+1}$ є хибним.

Таким чином, включення $A_m a \in E_{m+1}^+$ є правильним. Оскільки a — довільний елемент простору E_m^+, то обґрунтування першої частини твердження теореми завершено.

Перейдемо до обґрунтування правильності другої частини твердження теореми.

Зафіксуємо довільні $m \in \mathbb{Z}$ і $a \in E_m^-$. Згідно з означенням е-дихотомічності рівняння (1) задача

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n < m, \quad x_m = a \tag{18}$$

має розв'язок y_n, для якого виконується співвідношення

$$\|y_n\|_{E_n} \leq N_2(q_2)^{|n-m|}\|a\|_{E_m} \ \text{ для всіх } \ n \leq m \tag{19}$$

з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in (0,1)$.

Покажемо, що цей розв'язок єдиний.

Припустимо, що задача (18) також має розв'язок $\hat{y}_n \not\equiv y_n$, для якого виконується співвідношення, аналогічне (19). Тоді

$$\omega_n = \begin{cases} y_n - \hat{y}_n, & \text{якщо} \quad n \leq m, \\ 0_n, & \text{якщо} \quad n > m, \end{cases}$$

буде обмеженим ненульовим розв'язком рівняння (1). Оскільки e-дихотомічне рівняння (1) має лише нульовий обмежений розв'язок, то розв'язок y_n задачі (18) єдиний.

Покажемо, що

$$y_{m-1} \in E^-_{m-1}. \tag{20}$$

Зазначимо, що згідно з (1)

$$A_{m-1} y_{m-1} = y_m.$$

Припустимо, що $y_{m-1} \notin E^-_{m-1}$. Тоді y_{m-1} можна записати у вигляді $y_{m-1} = c^- + c^+$, де $c^- \in E^-_{m-1}$ і $c^+ \in E^+_{m-1}$, до того ж

$$c^+ \neq 0_{m-1}. \tag{21}$$

Розглянемо задачу

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n < m-1, \quad x_{m-1} = c^-.$$

Згідно з e-дихотомічністю рівняння (1) для розв'язку v_n цієї задачі виконується співвідношення

$$\|v_n\|_{E_n} \leq N_2 (q_2)^{|n-m+1|} \|c^-\|_{E_{m-1}} \text{ для всіх } n < m-1. \tag{22}$$

З урахуванням (19) і (22) отримуємо, що для деякого числа $M > 1$ виконується співвідношення

$$\|y_n - v_n\|_{E_n} \leq M (q_2)^{|n-m+1|} \|c^+\|_{E_{m-1}} \text{ для всіх } n < m-1. \tag{23}$$

Далі використаємо задачу

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \geq m-1, \quad x_{m-1} = c^+.$$

Завдяки e-дихотомічності рівняння (1) для розв'язку z_n цієї задачі виконується співвідношення

$$\|z_n\|_{E_n} \leq N_1 (q_1)^{|n-m+1|} \|c^+\|_{E_{m-1}} \text{ для всіх } n \geq m-1. \tag{24}$$

Легко перевірити, що згідно з (23) і (24) обмежена послідовність $\mathbf{g} = (g_n)$, яка визначається співвідношенням

$$g_n = \begin{cases} y_n - v_n, & \text{якщо } n > m-1, \\ c^+, & \text{якщо } n = m-1, \\ z_n, & \text{якщо } n < m-1, \end{cases}$$

є ненульовим розв'язком рівняння (1). Проте e-дихотомічне рівняння (1) має лише тривіальний обмежений розв'язок. Тому співвідношення (21) є хибним. Отже, співвідношення (20) є правильним.

Із наведених міркувань випливає, що для кожного $y_m \in E^-_m$ рівняння $y_m = A_{m-1} y_{m-1}$ має єдиний розв'язок $y_{m-1} \in E^-_{m-1}$.

Покажемо, що

$$A_{m-1} E^-_{m-1} = E^-_m.$$

Припустимо, що $A_{m-1} c \notin E^-_m$ для деякого вектора $c \in E^-_{m-1}$. Тоді вектор $A_{m-1} c$ можна записати у вигляді

$$A_{m-1}c = d^+ + d^-,$$

де $d^+ \in E_m^+$ і $d^- \in E_m^-$. Нехай c^- — вектор простору E_{m-1}^-, для якого $A_{m-1}c^- = d^-$. Згідно з попередніми міркуваннями такий вектор існує і єдиний. Розглянемо вектор $c - c^- \in E_{m-1}^-$. Для нього $A_{m-1}(c - c^-) = d^+$.

Розглянемо задачі

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \geq m, \quad x_m = d^+$$

і

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \leq m-2, \quad x_{m-1} = c - c^-,$$

розв'язки $\hat{z}_n$ і $\hat{\hat{z}}_n$ яких відповідно обмежені на підставі е-дихотомічності рівняння (1).

Очевидно, що

$$\xi_n = \begin{cases} \hat{z}_n, & \text{якщо} \quad n \geq m+1, \\ d^+, & \text{якщо} \quad n = m, \\ c - c^-, & \text{якщо} \quad n = m-1, \\ \hat{\hat{z}}_n, & \text{якщо} \quad n \leq m-2, \end{cases}$$

є обмеженим розв'язком рівняння (1). Оскільки для е-дихотомічного рівняння (1) обмеженим є лише нульовий розв'язок, то $d^+ = 0_m$ і, отже, $c - c^- = 0_{m-1}$.

Звідси та з того, що для кожного $y_m \in E_m^-$ рівняння $y_m = A_{m-1}y_{m-1}$ має єдиний розв'язок $y_{m-1} \in E_{m-1}^-$, випливає рівність $A_{m-1}E_{m-1}^- = E_m^-$. Тоді на підставі теореми Банаха про обернений оператор [2] оператор $P_m^- A_{m-1} P_{m-1}^- : E_{m-1}^- \to E_m^-$ має неперервний обернений оператор $\left(P_m^- A_{m-1} P_{m-1}^-\right)^{-1}$. Звідси та з довільності вибору числа $m \in \mathbb{Z}$ випливає правильність другої частини твердження теореми.

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 1.** У першій частині твердження теореми 3 включення $A_m E_m^+ \subset E_{m+1}^+$ не можна замінити рівністю

$$A_m E_m^+ = E_{m+1}^+, \tag{25}$$

що підтверджується таким прикладом.

***Приклад* 1.** Розглянемо скалярне рівняння $x_n = 0$, що є окремим випадком рівняння (1). Це рівняння отримується з (1) при $A_{n-1} \equiv 0$ і є е-дихотомічним. Очевидно, що $E_n = E_n^+ = \mathbb{R}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і (25) не виконується.

***Зауваження* 2.** Оскільки за теоремою 3 оператор $P_{m+1}^- A_m P_m^- : E_m^- \to E_{m+1}^-$ для кожного $m \in \mathbb{Z}$ має неперервний обернений $\left(P_{m+1}^- A_m P_m^-\right)^{-1}$, то на підставі умови в) означення е-дихотомічності рівняння (1) елементи підпростору $E_m^- \subset E_m$ додатково мають таку властивість: для кожного $x \in E_m^-$ розв'язок задачі

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \geq m, \quad x_m = x$$

задовольняє співвідношення $\|x_n\|_{E_n} \geq N_2^{-1} \left(q_2^{-1}\right)^{n-m} \|x\|_{E_m}, \ n \geq m.$

Зазначимо, що завдяки теоремі 3 означення 1 е-дихотомічності рівняння (1) рівносильне такому означенню е-дихотомічності цього рівняння.

Означення 2. *Для рівняння* (1) *має місце експоненціальна дихотомія на* $\mathbb{Z}$ (*рівняння е-дихотомічне*), *якщо для кожного* $m \in \mathbb{Z}$ *простір* E_m *зображується у вигляді прямої суми замкнених підпросторів* $E_m = E_m^+ \oplus E_m^-$ *і виконуються такі умови*:

а) *проектори* P_m^+ *і* P_m^- *на підпростори* E_m^+ *і* E_m^- *рівномірно обмежені, тобто виконується співвідношення* (3);

б) *для кожного* $z \in E_m^+$ *розв'язок* y_n *задачі* (4) *для всіх* $n \geq m$ *задовольняє співвідношення* $y_n \in E_n^+$ *і* $\|y_n\|_{E_n} \leq N_1(q_1)^{n-m}\|z\|_{E_m}$ *з деякими* $N_1 > 0$ *і* $q_1 \in (0,1)$, *не залежними від* n *і* m;

в) *для кожного* $z \in E_m^-$ *розв'язок* y_n *задачі* (5) *для всіх* $n \leq m$ *задовольняє співвідношення* $y_n \in E_n^-$ *і* $\|y_n\|_{E_n} \leq N_2(q_2)^{m-n}\|z\|_{E_m}$ *з деякими* $N_2 > 0$ *і* $q_2 \in (0,1)$, *не залежними від* n *і* m.

2.2. Властивості оператора $\mathfrak{B}$**.** Розглянемо лінійні неперервні оператори $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, S_m, $m \in \mathbb{Z}$, що діють у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, і оператор $Q_{\varepsilon,\tau}$ $((\varepsilon,\tau) \in (0,1] \times \mathbb{R})$, що діє у просторі $\mathfrak{M}$, зокрема в $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, та неперервну функцію $q\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, які визначаються рівностями

$$
\begin{gathered}
(\mathfrak{C}\mathbf{y})_n = y_n - Cy_{n-1}, \ n \in \mathbb{Z}, \\
(\mathfrak{D}\mathbf{y})_n = y_n - Dy_{n-1}, \ n \in \mathbb{Z}, \\
(S_m\mathbf{y})_n = y_{n+m}, \ n \in \mathbb{Z}, \\
(Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{x})_n = q(\varepsilon(n-\tau))x_n, \ \ n \in \mathbb{Z},
\end{gathered}
\tag{26}
$$

і

$$
q(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{якщо} \quad |t| \leq 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| > 1. \end{cases}
$$

Очевидно, що

$$
|q(t_1) - q(t_2)| \leq |t_1 - t_2| \quad \text{для всіх} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{27}
$$

Важливими для встановлення необхідних і достатніх умов e-дихотомічності рівняння (10) є такі три твердження.

Лема 1. *Нехай* $\mathfrak{P}$ — *довільна множина лінійних неперервних операторів* $\mathfrak{S} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, *кожен з яких визначається формулою*

$$
(\mathfrak{S}\mathbf{x})_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}x_m, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{28}
$$

де $S_{n,m} \in L(E_m, E_n)$, *і*

$$
\sup_{\mathfrak{S}\in\mathfrak{P}} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|S_{n,m}\|_{L(E_m,E_n)}|n-m| < +\infty. \tag{29}
$$

Тоді для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ *виконується співвідношення*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\mathfrak{S}\in\mathfrak{P}} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|Q_{\varepsilon,\tau}\mathfrak{S}\mathbf{x} - \mathfrak{S}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = 0. \tag{30}
$$

Доведення. Позначимо через M ліву частину нерівності (29). Завдяки (27)–(29) для всіх $\mathfrak{S} \in \mathfrak{P}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0,1)$ і $\tau \in \mathbb{R}$ справджуються співвідношення

$$
\left\|(Q_{\varepsilon,\tau}\mathfrak{S}\mathbf{x})_n - (\mathfrak{S}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{x})_n\right\|_{E_n} = \left\| q(\varepsilon(n-\tau)) \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}x_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}q(\varepsilon(m-\tau))x_m \right\|_{E_n} =
$$

$$= \left\| \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}(q(\varepsilon(n-\tau)) - q(\varepsilon(m-\tau)))x_m \right\|_{E_n} \leq$$

$$\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|S_{n,m}\|_{L(E_n,E_m)} |q(\varepsilon(n-\tau)) - q(\varepsilon(m-\tau))| \, \|x\|_{E_m} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|S_{n,m}\|_{L(E_n,E_m)} |n-m| \right) \varepsilon \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} \leq M\varepsilon \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}},$$

з яких випливає (30).

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай оператор* $\mathfrak{B}$ *має неперервний обернений. Тоді для кожних* $\mathbf{f} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ *і* $n \in \mathbb{Z}$ *існують границі*

$$\lim_{k\to+\infty} \left(S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \mathbf{f} \right)_n \tag{31}$$

і

$$\lim_{k\to-\infty} \left(S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \mathbf{f} \right)_n . \tag{32}$$

Доведення. Очевидно, що завдяки (26) для кожного $k \in \mathbb{Z}$

$$\|S_k\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} = 1 \tag{33}$$

і

$$\left\| S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} = \left\| \mathfrak{B}^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} . \tag{34}$$

Припустимо, що твердження щодо існування границі (31) є хибним, тобто для деяких $\mathbf{f} = (f_n) \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і $\hat{n} \in \mathbb{Z}$ послідовність векторів $(S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \mathbf{f})_{\hat{n}}$, $k \geq 1$, є розбіжною. Очевидно, що $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$. Розглянемо елемент $\mathbf{g}_k = (g_{k,n}) \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, де $g_{k,n} = (S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \mathbf{f})_n$. На підставі (34)

$$\sup_{k\geq 1} \|\mathbf{g}_k\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = \sup_{k\geq 1} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left\| (S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \mathbf{f})_n \right\|_E \leq \left\| \mathfrak{B}^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} \|\mathbf{f}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)}. \tag{35}$$

Згідно з припущенням та (35) для деяких числа $a > 0$ і строго зростаючої послідовності (k_i) натуральних чисел

$$2 \left\| \mathfrak{B}^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} \|\mathbf{f}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \geq \left\| g_{k_i,\hat{n}} - g_{k_j,\hat{n}} \right\|_E \geq a, \quad \text{якщо} \quad i \neq j. \tag{36}$$

Зазначимо, що

$$((S_k \mathfrak{B} S_{-k}) \mathbf{g}_k)_n = g_{k,n} - B_{n-1+k} g_{k,n-1} = f_n \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 1, \tag{37}$$

і

$$B_{n-1+k} = C, \quad \text{якщо} \quad n - 1 + k \geq n_2. \tag{38}$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in (0, 1)$. Завдяки (37) і (38)

$$((S_k \mathfrak{B} S_{-k})\mathbf{g}_k)_n = g_{k,n} - C g_{k,n-1} = f_n,$$

якщо

$$\hat{n} - 1 + k > n_2 \quad \text{і} \quad \varepsilon |n - \hat{n}| \le 1.$$

Звідси випливає, що

$$(g_{k_i,n} - C g_{k_i,n-1}) - (g_{k_{i+1},n} - C g_{k_{i+1},n-1}) = 0,$$

якщо

$$\hat{n} - 1 + k_i > n_2, \quad \varepsilon |n - \hat{n}| \le 1,$$

і, отже, на підставі означення функції $q(t)$ у випадку $\hat{n} - 1 + k_i > n_2$

$$q(\varepsilon(n - \hat{n}))\big((g_{k_i,n} - C g_{k_i,n-1}) - (g_{k_{i+1},n} - C g_{k_{i+1},n-1})\big) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

тобто з урахуванням (38)

$$\|Q_{\varepsilon,\hat{n}}(S_{k_i} \mathfrak{B} S_{-k_i})(\mathbf{g}_{k_i} - \mathbf{g}_{k_{i+1}})\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0. \tag{39}$$

На підставі леми 1 і (39) у випадку $\hat{n} - 1 + k_i > n_2$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|(S_{k_i} \mathfrak{B} S_{-k_i}) Q_{\varepsilon,\hat{n}}(\mathbf{g}_{k_i} - \mathbf{g}_{k_{i+1}})\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0.$$

Із цього співвідношення, послідовності (36) та означення оператора $Q_{\varepsilon,\tau}$ випливає рівність

$$\lim_{i \to \infty} \inf_{\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 1} \|S_{k_i} \mathfrak{B} S_{-k_i} \mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0.$$

Таким чином, з урахуванням (26) і (33)

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 1} \|\mathfrak{B}\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0,$$

що суперечить оборотності оператора $\mathfrak{B}$. Отже, припущення, що границя (31) не існує, є хибним.

Аналогічно можна показати існування границі (32).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай оператор $\mathfrak{B}$ має неперервний обернений $\mathfrak{B}^{-1}$. Тоді для кожного $\mathbf{f} \in$ $\in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ обмежені векторні величини, що визначаються рівностями*

$$x_n^+ = \lim_{k \to +\infty} \left(S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \mathbf{f}\right)_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$x_n^- = \lim_{k \to -\infty} \left(S_k \mathfrak{B}^{-1} S_{-k} \mathbf{f}\right)_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

є єдиними розв'язками рівнянь

$$(\mathfrak{C}\mathbf{x})_n = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{40}$$

і

$$(\mathfrak{D}\mathbf{x})_n = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{41}$$

відповідно.

Доведення. Зазначимо, що завдяки (34) і неперервності оператора $\mathfrak{B}^{-1}$ векторні величини x_n^+ і x_n^- є обмеженими.

Покажемо, що x_n^+ — розв'язок рівняння (40). Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{Z}$. Згідно з рівністю $\left(S_k\mathfrak{B}^{-1}S_{-k}\mathbf{f}\right)_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}} G_{n+k,l+k}f_l$, що випливає з (8) у випадку $E_n \equiv E$, (6) та тим, що $B_n = C$ для всіх $n \geq n_2$, справджуються співвідношення

$$(\mathfrak{C}\mathbf{x}^+)_n = x_n^+ - Cx_{n-1}^+ = \lim_{k\to+\infty}\left(S_k\mathfrak{B}^{-1}S_{-k}\mathbf{f}\right)_n - C\lim_{k\to+\infty}\left(S_k\mathfrak{B}^{-1}S_{-k}\mathbf{f}\right)_{n-1} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\sum_{l\in\mathbb{Z}} G_{n+k,l+k}f_l - \lim_{k\to+\infty} B_{n-1+k}\lim_{k\to+\infty}\sum_{l\in\mathbb{Z}} G_{n-1+k,l+k}f_l =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\lim_{k\to+\infty}\left(G_{n+k,l+k} - B_{n-1+k}G_{n-1+k,l+k}\right)f_l =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\lim_{k\to+\infty}\left(G_{n+k,l+k} - B_{n-1+k}G_{n-1+k,l+k}\right)f_l = \lim_{k\to+\infty}\left(G_{n+k,n+k} - B_{n-1+k}G_{n-1+k,n+k}\right)f_n +$$

$$+\sum_{l\neq n}\lim_{k\to+\infty}\left(G_{n+k,l+k} - B_{n-1+k}G_{n-1+k,l+k}\right)f_l = If_n + \sum_{l\neq n} Of_l = f_n,$$

де I і O — одиничний і нульовий елементи простору $L(E,E)$. У цих співвідношеннях також використано оцінку (7) для норми оператора $G_{n,m}$, завдяки якій граничний перехід під знаком суми є можливим. Отже, x_n^+ — обмежений розв'язок рівняння (40).

Покажемо, що цей розв'язок єдиний.

Припустимо, що рівняння (40) має відмінний від x_n^+ обмежений розв'язок x_n^{++}. Тоді $y_n^+ = x_n^+ - x_n^{++}$ — обмежений ненульовий розв'язок рівняння

$$y_n - Cy_{n-1} = 0 \tag{42}$$

і для деякого $n_0 \in \mathbb{Z}$

$$y_{n_0}^+ \neq 0. \tag{43}$$

Очевидно, що обмеженим розв'язком різницевого рівняння (42) також є y_{n-k}^+ для кожного $k \in \mathbb{Z}$. На підставі леми 1 $\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\tau\in\mathbb{Z}}\|Q_{\varepsilon,\tau}\mathfrak{C}\mathbf{y}^+ - \mathfrak{C}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{y}^+\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0$, і тому $\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\tau\in\mathbb{Z}}\|\mathfrak{C}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{y}^+\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0$, оскільки $\mathfrak{C}\mathbf{y}^+ = \mathbf{0}$, зокрема

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}}\|q(\varepsilon(n-k-n_0))y_{n-k}^+ - Cq(\varepsilon(n-1-k-n_0))y_{n-1-k}^+\|_E = 0. \tag{44}$$

Розглянемо довільні строго спадну $(\varepsilon_i)_{i\geq1}$ і строго зростаючу $(k_i)_{i\geq1}$ послідовності, для яких $\lim_{i\to\infty}\varepsilon_i = 0$, $\lim_{i\to\infty}k_i = +\infty$ і $n_2 < k_i - n_0 - \left[\varepsilon_i^{-1}\right] - 3$, $i \geq 1$, де $\left[\varepsilon_i^{-1}\right]$ — ціла частина числа ε_i^{-1}. Тоді

$$q(\varepsilon_i(n-k_i-n_0)) = 0 \quad \text{для всіх} \quad n \leq n_2+1$$

і, отже,

$$\left\|q(\varepsilon_i(n-k_i-n_0))y_{n-k_i}^+\right\|_E = 0 \quad \text{для всіх} \quad n \leq n_2+1.$$

Завдяки рівностям $B_n = C$, $n \geq n_2$,

$$q(\varepsilon_i(n-k_i-n_0))y^+_{n-k_i} - B_{n-1}q(\varepsilon_i(n-1-k_i-n_0))y^+_{n-1-k_i} =$$
$$= q(\varepsilon_i(n-k_i-n_0))y^+_{n-k_i} - Cq(\varepsilon_i(n-1-k_i-n_0))y^+_{n-1-k_i} \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (45)$$

Отже, на підставі (44) і (45)

$$\lim_{i\to\infty} \left\| \mathfrak{B} Q_{\varepsilon_i, k_i+n_0} S_{-k_i} \mathbf{y}^+ \right\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0.$$

Це співвідношення суперечить оборотності оператора $\mathfrak{B}$, оскільки з урахуванням (43)

$$\| Q_{\varepsilon_i, k_i+n_0} S_{-k_i} \mathbf{y}^+ \|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \geq \| y^+_{n_0} \|_E > 0, \quad i \geq 1.$$

Отже, припущення, що рівняння (40) має обмежений відмінний від x_n^+ розв'язок x_n^{++}, є хибним.

Аналогічно з використанням рівностей $B_n = D$, $n < n_1$, можна показати, що x_n^- — обмежений розв'язок рівняння (41) і до того ж єдиний.

Лему 3 доведено.

Наслідком лем 2 і 3 є таке твердження.

Теорема 4. *Нехай оператор $\mathfrak{B}$ має неперервний обернений. Тоді аналогічну властивість мають оператори $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$.*

Далі наведемо умови оборотності операторів $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$. Будемо використовувати спектри $\sigma(C)$ і $\sigma(D)$ операторів C і D відповідно та одиничне коло $T = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.

Правильною є така теорема.

Теорема 5. *Оператори $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$ мають неперервні обернені тоді і тільки тоді, коли $\sigma(C) \cap \cap T = \varnothing$ і $\sigma(D) \cap T = \varnothing$.*

Умови оборотності різницевих операторів, аналогічних $\mathfrak{C}$, і складніших операторів, при дослідженні яких неможливо використовувати експоненціальну дихотомію, отримано в [3 – 5].

***Зауваження* 3.** Для оборотності оператора $\mathfrak{B}$ недостатньо оборотності операторів $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$, що підтверджується таким прикладом.

***Приклад* 2.** Розглянемо оператори $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \colon l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, що визначаються рівностями

$$(\mathfrak{F}\mathbf{x})_n = x_n - \begin{cases} \dfrac{1}{2} x_{n-1}, & \text{якщо } n > 0, \\ 2x_{n-1}, & \text{якщо } n \leq 0, \end{cases} \quad (\mathfrak{G}\mathbf{x})_n = x_n - \frac{1}{2} x_{n-1} \text{ і } (\mathfrak{H}\mathbf{x})_n = x_n - 2x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператори $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{H}$ є оборотними, оскільки спектри операторів C і D, що відповідають $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{H}$, збігаються з множинами $\{1/2\}$ і $\{2\}$ відповідно і не мають спільних точок з T. Проте оператор $\mathfrak{F}$ не є оборотним, оскільки рівняння $\mathfrak{F}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ має ненульовий обмежений розв'язок $x_n = 2^{-|n|}$.

У подальшому будемо використовувати множини $\sigma^+(C) = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| < 1\}$, $\sigma^-(C) = = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| > 1\}$, $\sigma^+(D) = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| < 1\}$, $\sigma^-(D) = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| > > 1\}$, проектори P_C^+, P_C^-, P_D^+, P_D^- і підпростори $E_C^+ = P_C^+ E$, $E_C^- = P_C^- E$, $E_D^+ = P_D^+ E$, $E_D^- = P_D^- E$ простору E, що відповідають цим множинам. Крім того, будемо використовувати оператори $C^+ = P_C^+ C P_C^+$, $C^- = P_C^- C P_C^-$, $D^+ = P_D^+ D P_D^+$ і $D^- = P_D^- D P_D^-$, спектрами яких є множини $\sigma^+(C)$, $\sigma^-(C)$, $\sigma^+(D)$ і $\sigma^-(D)$ відповідно, а також спектральний радіус $r(A) = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(A)\}$ оператора $A \in L(E, E)$.

Корисною є така лема.

Лема 4. *Якщо $r(A) < 1$, то для кожного числа $q \in (r(A), 1)$ існує таке число $M \geq 1$, що $\|A^n\|_{L(E,E)} \leq M q^n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Твердження леми є наслідком формули Гельфанда $r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|_{L(E,E)}}$ [6].

Оскільки $\sigma^+(C) \cup \sigma^+(D) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, то $r(C^+) < 1$ і $r(D^+) < 1$, а оскільки $\sigma^-(C) \cup \sigma^-(D) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$, то оператори C^- і D^- мають неперервні обернені $(C^-)^{-1}$, $(D^-)^{-1}$ і згідно з теоремою Данфорда про відображення спектра [7] $r\left((C^-)^{-1}\right) < 1$ і $r\left((D^-)^{-1}\right) < 1$.

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 6. *Оператори $C^- : E_C^- \to E_C^-$ і $D^- : E_D^- \to E_D^-$ мають неперервні обернені $(C^-)^{-1}$ і $(D^-)^{-1}$ відповідно і $r(C^+) < 1$, $r(D^+) < 1$, $r((C^-)^{-1}) < 1$ і $r((D^-)^{-1}) < 1$.*

Важливою для подальшого є така теорема.

Теорема 7. *Нехай оператор $\mathfrak{B}$ має неперервний обернений. Тоді*

$$E_n^+ = E_C^+ \quad і \quad E_n^- = E_C^- \quad для\ всіх \quad n \geq n_2$$

і

$$E_n^+ = E_D^+ \quad і \quad E_n^- = E_D^- \quad для\ всіх \quad n \leq n_1 - 1.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $E_{n_2}^+ = E_C^+$. Згідно з умовою б) означення е-дихотомічності рівняння (1) $E_C^+ \subset E_{n_2}^+$. Припустимо, що $E_{n_2}^+ \neq E_C^+$ і $z = P_C^+ z + P_C^- z$ — елемент з $E_{n_2}^+$, для якого $P_C^- z \neq 0$. За означенням $E_{n_2}^+$ $\lim_{n\to+\infty} \|C^n(P_C^+ z + P_C^- z)\|_E = 0$. Оскільки $CE_C^+ \subset \subset E_C^+$ і $r(C^+) < 1$, то $\lim_{n\to+\infty} \left\|C^n P_C^+ z\right\|_E = \lim_{n\to+\infty} \|(C^+)^n P_C^+ z\|_E = 0$. Звідси випливає рівність $\lim_{n\to+\infty} \|C^n P_C^- z\|_E = 0$, що неможливо. Справді, згідно з умовою в) означення е-дихотомічності рівняння (1), включенням $E_C^- \subset E_{n_2}^-$ і зауваженням 2 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \|C^n P_C^- z\|_E = = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \|(C^-)^n P_C^- z\|_E \neq 0$. Отже, припущення, що $E_{n_2}^+ \neq E_C^+$, є хибним.

Аналогічно доводиться, що $E_n^+ = E_C^+$ для $n > n_2$.

Далі покажемо, що $E_{n_2}^- = E_C^-$. Згідно з умовою в) означення е-дихотомічності рівняння (1) та нерівністю $r\left((C^-)^{-1}\right) < 1$ справджується включення $E_C^- \subset E_{n_2}^-$. Припустимо, що $E_{n_2}^- \neq E_C^-$ і $z = P_C^+ z + P_C^- z$ — елемент простору $E_{n_2}^-$, для якого $P_C^+ z \neq 0$. За означенням $E_{n_2}^-$ розв'язки задачі

$$x_n = B_{n-1} x_{n-1}, \quad n \leq n_2, \quad x_{n_2} = a$$

при $a = P_C^+ z + P_C^- z$ і $a = P_C^- z$ прямують до 0 за експоненціальним законом (при $n \to \to -\infty$). Аналогічну властивість має розв'язок цієї задачі і при $a = P_C^+ z$, оскільки $P_C^+ z + P_C^- z$, $P_C^- z$ — вектори з простору $E_{n_2}^-$ і тому $(P_C^+ z + P_C^- z) - P_C^- z = P_C^+ z \in E_{n_2}^-$. Тоді на підставі зауваження 2 $\lim_{n\to+\infty} \|C^n P_C^+ z\|_E = +\infty$, що суперечить співвідношенням $CE_C^+ \subset E_C^+$, $C^n P_C^+ z = (C^+)^n P_C^+ z$, $n \in \mathbb{N}$ і $r(C^+) < 1$, з яких випливає, що $\lim_{n\to+\infty} \|C^n P_C^+ z\|_E = 0$. Отже, припущення, що $E_{n_2}^- \neq E_C^-$, є хибним.

Аналогічно доводиться, що $E_n^- = E_C^-$ для $n > n_2$.

Тепер покажемо, що $E_{n_1-1}^- = E_D^-$. З означення простору $E_{n_1-1}^-$, рівності $D^- E_D^- = E_D^-$ і оборотності оператора $D^- : E_D^- \to E_D^-$ (на підставі теореми 3) випливає, що $E_D^- \subset E_{n_1-1}^-$. Припустимо, що $E_{n_1-1}^- \neq E_D^-$ і вектор $z = P_D^+ z + P_D^- z$ з простору $E_{n_1-1}^-$ є таким, що $P_D^+ z \neq 0$. Згідно з тим, що простори E_D^+ і E_D^- інваріантні відносно оператора D, оператор $D^- : E_D^- \to E_D^-$ оборотний і задача

$$x_n = D x_{n-1}, \quad n \leq n_1 - 1, \quad x_{n_1} = a \tag{46}$$

при $a = z$ має розв'язок z_n, для якого $\lim_{n\to-\infty} \|z_n\|_E = 0$, випливає, що цей розв'язок можна записати у вигляді $z_n = P_D^+ z_n + P_D^- z_n$, причому $DP_D^+ z_n = P_D^+ D z_n$ і $DP_D^- z_n = P_D^- D z_n$.

Оскільки $P_D^- z \in E_D^- \subset E_{n_1-1}^-$ і $P_D^+ z = z - P_D^- z \in E_{n_1-1}^-$, то для розв'язків $P_D^- z_n$ і $P_D^+ z_n$ задачі (46) відповідно при $a = P_D^- z$ і $a = P_D^+ z$ згідно з означенням простору $E_{n_1-1}^-$ виконуються співвідношення $\lim_{n\to-\infty} \|P_D^- z_n\|_E = 0$ і

$$\lim_{n\to-\infty} \|P_D^+ z_n\|_E = 0. \tag{47}$$

З іншого боку, $P_D^+ z \neq 0$ і $P_D^+ z_n = D^+ P_D^+ z_{n-1},\ n \leq n_1$. Тому $P_D^+ z_n \neq 0,\ n \leq n_1$. Оскільки $r(D^+) < 1$, то на підставі леми 4 $\|P_D^+ z\|_E \leq M q^{|n-n_1+1|} \|P_D^+ z_n\|_E,\ n \leq n_1-1$, для деяких чисел $M > 0$ і $q \in (0,1)$. Це співвідношення суперечить (47) і свідчить про хибність припущення $E_{n_1-1}^- \neq E_D^-$.

Аналогічно доводиться, що $E_n^- = E_D^-$ для $n < n_1 - 1$.

Нарешті покажемо, що $E_{n_1-1}^+ = E_D^+$.

Згідно з оборотністю оператора $\mathfrak{B}$ і, отже, е-дихотомічністю рівняння (10), а також оборотністю оператора $\mathfrak{D}$ (завдяки теоремам 4 і 5) справджуються рівності

$$E = E_{n_1-1}^+ \oplus E_{n_1-1}^- = E_{n_1-1}^+ \oplus E_D^- = E_D^+ \oplus E_D^-. \tag{48}$$

Тут на підставі попередніх міркувань враховано, що $E_D^- = E_{n_1-1}^-$. Зазначимо, що з (48) не випливає рівність $E_{n_1-1}^+ = E_D^+$.

Припустимо, що $E_{n_1-1}^+ \neq E_D^+$. Тоді

$$E_{n_1-1}^+ \setminus E_D^+ \neq \varnothing \tag{49}$$

або

$$E_{n_1-1}^+ \subset E_D^+ \quad \text{і} \quad E_D^+ \setminus E_{n_1-1}^+ \neq \varnothing. \tag{50}$$

Розглянемо випадок виконання співвідношення (49). Зафіксуємо довільний ненульовий вектор

$$v \in E_{n_1-1}^+ \setminus E_D^+. \tag{51}$$

Завдяки (48) вектор v можна записати у вигляді $v = P_{n_1-1}^+ v + P_D^- v$, де $P_D^- v \neq 0$. Очевидно, що рівність $P_D^- v = 0$ неможлива внаслідок (51), оскільки тоді $v = P_D^+ v$.

З означень просторів $E_{n_1-1}^+$ і $E_{n_1-1}^-$ випливає, що для розв'язку v_n^+ задачі

$$x_n = B_{n-1} x_{n-1}, \quad n \geq n_1, \quad x_{n_1-1} = v$$

виконується співвідношення

$$\lim_{n\geq n_2,\ n\to+\infty} \|v_n^+\|_{E_{n_2}} = 0, \tag{52}$$

а для розв'язку $\tilde{v}_n$ задачі

$$x_n = B_{n-1} x_{n-1}, \quad n \geq n_1, \quad x_{n_1-1} = a \tag{53}$$

при $a = P_D^- v$ згідно з рівністю $E_{n_1-1}^- = E_D^-$ і зауваженням 2 для деяких чисел $M > 0$ і $Q > 1$ — співвідношення

$$\|\tilde{v}_n\|_{E_{n_2}} \geq MQ^{n-n_1+1}\|P_D^- v\|_{E_{n_1-1}}, \quad n \geq n_2. \tag{54}$$

Завдяки (52) і (54) для розв'язку $\tilde{\tilde{v}}_n$ задачі (53) при $a = P_{n_1-1}^+ v$ також буде виконуватися співвідношення

$$\left\|\tilde{\tilde{v}}_n\right\|_{E_{n_2}} \geq M_1(Q_1)^{n-n_1+1}\|P_D^+ v\|_{E_{n_1-1}}, \quad n \geq n_2,$$

для деяких чисел $M_1 > 0$ і $Q_1 > 1$, аналогічне (54). Останнє співвідношення суперечить означенню простору $E_{n_1-1}^+$. Отже, припущення, що $E_{n_1-1}^+ \neq E_D^+$ у випадку виконання (49), є хибним.

Далі розглянемо випадок виконання співвідношень (50).

Зафіксуємо довільний ненульовий вектор

$$v \in E_D^+ \setminus E_{n_1-1}^+. \tag{55}$$

Тоді

$$v \in E_D^+ \oplus E_D^- = E_{n_1-1} \tag{56}$$

і згідно з (55) та рівністю $E_D^- = E_{n_1-1}^-$

$$v \notin E_{n_1-1}^+ \oplus E_D^- = E_{n_1-1},$$

що суперечить (56). Отже, припущення, що виконуються співвідношення (50), є хибним.

Таким чином, припущення, що $E_{n_1-1}^+ \neq E_D^+$ у випадку (50), також хибне і, отже, $E_{n_1-1}^+ = E_D^+$.

Аналогічно доводиться, що $E_n^+ = E_D^+$ для $n < n_1 - 1$.

Теорему 7 доведено.

***2.3. Зображення обмежених розв'язків рівняння* (2).** Згідно з теоремою 2 обмежені розв'язки рівняння (2) мають вигляд (8), де операторна функція $G_{n,m}$ задовольняє (6), (7) і (9). З'ясуємо, як зображується функція $G_{n,m}$ з використанням розв'язків задач (4) і (5).

Вважаємо, що рівняння (1) е-дихотомічне. Позначимо через $y_{n,m}^+(z)$ і $y_{n,m}^-(z)$ розв'язки задач (4) і (5) відповідно. На підставі теореми 3

$$y_{n,m}^+(z) \in E_n^+, \quad n \geq m, \quad \text{і} \quad y_{n,m}^-(z) \in E_n^-, \quad n \leq m.$$

Ці розв'язки єдині завдяки е-дихотомічності рівняння (1) і задовольняють нерівності

$$\|y_{n,m}^+(z)\|_{E_n^+} \leq N_1(q_1)^{n-m}\|z\|_{E_m^+}, \quad n \geq m, \tag{57}$$

$$\|y_{n,m}^-(z)\|_{E_n^-} \leq N_2(q_2)^{m-n}\|z\|_{E_m^-}, \quad n \leq m, \tag{58}$$

де N_1, N_2, q_1 і q_2 — сталі, що й в умовах б) і в) означення е-дихотомічності рівняння (1). Для точок $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $n \geq m$, і $(p, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $p \leq m$, визначимо оператори $S_{n,m}^+ : E_m^+ \to E_n^+$ і $S_{p,m}^- : E_m^- \to E_p^-$ рівностями

$$S_{n,m}^+ z = y_{n,m}^+(z), \quad z \in E_m^+, \tag{59}$$

$$S_{p,m}^- z = y_{p,m}^-(z), \quad z \in E_m^-. \tag{60}$$

Ці оператори є лінійними завдяки лінійності рівняння (1) і неперервними завдяки (57), (58). Очевидно, що $S^+_{m,m} = P^+_m$, $S^-_{m,m} = P^-_m$ і на підставі (57), (58) виконуються співвідношення

$$\|S^+_{n,m}\|_{L(E^+_m, E^+_n)} \leq N_1 (q_1)^{n-m}, \quad n \geq m, \tag{61}$$

$$\|S^-_{p,m}\|_{L(E^-_m, E^-_p)} \leq N_2 (q_2)^{p-m}, \quad p \leq m. \tag{62}$$

Розглянемо операторну функцію

$$G_{n,m} = \begin{cases} S^+_{n,m}, & \text{якщо} \quad n \geq m, \\ -S^-_{n,m}, & \text{якщо} \quad n \leq m-1, \end{cases} \tag{63}$$

для якої згідно з означенням $S^+_{n,m}$ і $S^-_{n,m}$

$$G_{n,m} = A_{n-1} G_{n-1,m}, \quad \text{якщо} \quad n \neq m,$$

а також

$$G_{m,m} - A_{m-1} G_{m-1,m} = I_m.$$

Справді, завдяки (59), (60), (63) та рівності $S^-_{m-1,m} = \left(P^-_m A_{m-1} P^-_{m-1}\right)^{-1} S^-_{m,m}$, що отримується з (5) з урахуванням теореми 3,

$$G_{m,m} - A_{m-1} G_{m-1,m} = S^+_{m,m} + A_{m-1} S^-_{m-1,m} =$$
$$= P^+_m + A_{m-1} \left(P^-_m A_{m-1} P^-_{m-1}\right)^{-1} S^-_{m,m} = P^+_m + S^-_{m,m} = P^+_m + P^-_m = I_m.$$

Таким чином, операторна функція $G_{n,m}$ задовольняє (6). Також ця функція на підставі (61) і (62) задовольняє (7).

Отже, правильним є таке твердження.

Теорема 8. *Якщо рівняння* (1) *e-дихотомічне, то для кожного* $\mathbf{f} = (f_n) \in \mathfrak{M}$ *обмежений розв'язок рівняння* (2) *має вигляд* (8), *де* $G_{n,m}$ *визначається рівністю* (63).

3. Умови експоненціальної дихотомії розв'язків рівняння (10). Наведені допоміжні результати дають змогу отримати необхідні та достатні умови e-дихотомічності рівняння (10).

Справджується таке твердження.

Теорема 9. *Для e-дихотомічності рівняння* (10) *необхідно і достатньо виконання таких умов*:

1) *для кожного* $m \in \mathbb{Z}$ *банаховий простір* E *зображується у вигляді прямої суми замкнених підпросторів*

$$E = E^+_m \oplus E^-_m, \tag{64}$$

для яких

$$E^+_n = E^+_{n_2} \quad \textit{і} \quad E^-_n = E^-_{n_2} \quad \textit{для всіх} \;\; n \geq n_2 \tag{65}$$

та

$$E^+_n = E^+_{n_1-1} \quad \textit{і} \quad E^-_n = E^-_{n_1-1} \quad \textit{для всіх} \;\; n \leq n_1 - 1; \tag{66}$$

2) $CE_{n_2}^+ \subset E_{n_2}^+$, $CE_{n_2}^- = E_{n_2}^-$, *оператор* $P_{n_2}^- C P_{n_2}^- : E_{n_2}^- \to E_{n_2}^-$ *має неперервний обернений* $\left(P_{n_2}^- C P_{n_2}^-\right)^{-1}$ *і*

$$r\left(P_{n_2}^+ C P_{n_2}^+\right) < 1, \tag{67}$$

$$r\left(\left(P_{n_2}^- C P_{n_2}^-\right)^{-1}\right) < 1; \tag{68}$$

3) $DE_{n_1-1}^+ \subset E_{n_1-1}^+ \cap E_{n_1}^+$, $DE_{n_1-1}^- = E_{n_1-1}^- = E_{n_1}^-$, *оператор* $P_{n_1-1}^- D P_{n_1-1}^- : E_{n_1-1}^- \to \to E_{n_1-1}^-$ *має неперервний обернений* $\left(P_{n_1-1}^- D P_{n_1-1}^-\right)^{-1}$ *і*

$$r\left(P_{n_1-1}^+ D P_{n_1-1}^+\right) < 1, \tag{69}$$

$$r\left(\left(P_{n_1-1}^- D P_{n_1-1}^-\right)^{-1}\right) < 1; \tag{70}$$

4) $A_{n_1} E_{n_1}^+ \subset E_{n_1+1}^+$, $A_{n_1+1} E_{n_1+1}^+ \subset E_{n_1+2}^+$, $\ldots$, $A_{n_2-1} E_{n_2-1}^+ \subset E_{n_2}^+$;

5) $A_{n_1} E_{n_1}^- = E_{n_1+1}^-$, $A_{n_1+1} E_{n_1+1}^- = E_{n_1+2}^-, \ldots, A_{n_2-1} E_{n_2-1}^- = E_{n_2}^-$ *і оператори* $A_{n_1}|_{E_{n_1}^-} : E_{n_1}^- \to E_{n_1+1}^-$, $A_{n_1+1}|_{E_{n_1+1}^-} : E_{n_1+1}^- \to E_{n_1+2}^-, \ldots, A_{n_2-1}|_{E_{n_2-1}^-} : E_{n_2-1}^- \to E_{n_2}^-$ *мають неперервні обернені оператори.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай рівняння (10) е-дихотомічне.

За означенням е-дихотомічності рівняння для кожного $m \in \mathbb{Z}$ банаховий простір E зображується у вигляді (64), а завдяки теоремам 1 і 7 виконуються співвідношення (65) і (66). Отже, перша умова виконується.

Друга умова також виконується. Справді, згідно з теоремами 3 і 7 $CE_{n_2}^+ \subset E_{n_2}^+$ і $CE_{n_2}^- = = E_{n_2}^-$. За другою частиною твердження теореми 3 з урахуванням рівностей $P_{n_2+1}^- = P_{n_2}^- = P_C^-$ оператор $C^- = P_C^- C P_C^- = P_{n_2+1}^- C P_{n_2}^-$ має неперервний обернений $(C^-)^{-1} = = (P_{n_2+1}^- C P_{n_2}^-)^{-1} = (P_{n_2}^- C P_{n_2}^-)^{-1}$. Тоді за теоремою 6 виконуються співвідношення (67) і (68).

Аналогічно обґрунтовується виконання третьої умови. Дійсно, завдяки рівності $D = A_{n_1-1}$, інваріантності просторів $E_D^+ = E_{n_1-1}^+$ і $E_D^- = E_{n_1-1}^-$ відносно оператора D та оборотності оператора $D^- : E_D^- \to E_D^-$ (за теоремою 6) виконуються співвідношення $DE_{n_1-1}^+ \subset E_{n_1-1}^+$ і $DE_{n_1-1}^- = E_{n_1-1}^-$. За теоремою 3 $DE_{n_1-1}^+ \subset E_{n_1}^+$, $DE_{n_1-1}^- = E_{n_1}^-$ (тому $DE_{n_1-1}^+ \subset E_{n_1-1}^+ \cap E_{n_1}^+$) і оператор $D^- = P_{n_1-1}^- D P_{n_1-1}^- : E_{n_1-1}^- \to E_{n_1-1}^-$ має неперервний обернений $(D^-)^{-1} = = \left(P_{n_1-1}^- D P_{n_1-1}^-\right)^{-1}$. Тоді за теоремою 6 виконуються співвідношення (69) і (70).

Четверта і п'ята умови виконуються на підставі теореми 3.

Таким чином, е-дихотомічність рівняння (10) гарантує виконання п'яти умов, що містяться у формулюванні теореми.

Достатність. Нехай виконуються умови теореми.

Покажемо е-дихотомічність рівняння (10).

Умова а) е-дихотомічності різницевого рівняння (див. п. 1) для (10) виконується, оскільки завдяки (65) і (66)

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} \left(\|P_m^+\|_{L(E,E)} + \|P_m^-\|_{L(E,E)}\right) = \max_{m \in [n_1-1, n_2] \cap \mathbb{Z}} \left(\|P_m^+\|_{L(E,E)} + \|P_m^-\|_{L(E,E)}\right) < +\infty.$$

Умова б) е-дихотомічності різницевого рівняння для (10) також виконується. Справді, зафіксуємо довільні $m \in \mathbb{Z}$ і вектор $x_m \in E_m^+$.

Розглянемо задачу

$$y_n = B_{n-1}y_{n-1}, \quad n \geq m+1, \quad y_m = x_m \tag{71}$$

і операторну функцію $S^+_{n,m} : E^+_m \to E^+_n$, що визначається рівністю

$$S^+_{n,m} = \begin{cases} P^+_m, & \text{якщо} \quad n = m, \\ (C^+)^{n-m} P^+_m, & \text{якщо} \quad n_2 \leq m \leq n, \\ A_{n-1} \ldots A_m P^+_m, & \text{якщо} \quad n_1 \leq m < n \leq n_2, \\ (C^+)^{n-n_2} A_{n_2-1} \ldots A_m P^+_m, & \text{якщо} \quad n_1 \leq m < n_2 < n, \\ (D^+)^{|m-n|} P^+_m, & \text{якщо} \quad m \leq n \leq n_1 - 1, \\ A_{n-1} \ldots A_{n_1} (D^+)^{|m-n_1+1|} P^+_m, & \text{якщо} \quad m \leq n_1 - 1 < n \leq n_2, \\ (C^+)^{n-n_2} A_{n_2-1} \ldots A_{n_1} (D^+)^{|m-n_1+1|} P^+_m, & \text{якщо} \quad m \leq n_1 - 1, \ n_2 < n, \end{cases} \tag{72}$$

де $C^+ = P^+_C C P^+_C = P^+_{n_2} C P^+_{n_2}$ і $D^+ = P^+_D D P^+_D = P^+_{n_1-1} D P^+_{n_1-1}$.

З обмеженості операторної функції B_n, співвідношень (67), (69) і леми 4 випливає, що для деяких чисел $N_1 \geq 1$ і $q_1 \in (0,1)$ виконується співвідношення

$$\left\| S^+_{n,m} \right\|_{L(E_m, E_n)} \leq N_1 (q_1)^{n-m}, \quad n \geq m. \tag{73}$$

Можна показати (через громіздкість ми цього не робимо), що на підставі (12) і першої, другої, третьої та четвертої умов теореми розв'язок задачі (71) має вигляд

$$y_n = S^+_{n,m} x_m, \quad n \geq m.$$

Завдяки (73)

$$\|y_n\|_{E_n} \leq N_1 (q_1)^{n-m} \|x_m\|_{E_m}, \quad n \geq m.$$

Отже, умова б) е-дихотомічності різницевого рівняння для (10) виконується.

Аналогічно показується, що умова в) е-дихотомічності різницевого рівняння для (10) також виконується. Справді, зафіксуємо довільні $m \in \mathbb{Z}$ і вектор $x_m \in E^-_m$.

Розглянемо задачу

$$z_n = B_{n-1} z_{n-1}, \quad n \leq m-1, \quad z_m = x_m \tag{74}$$

і операторну функцію $S^-_{n,m} : E^-_m \to E^-_n$, що визначається рівністю

$$S^-_{n,m}=\begin{cases} P^-_m, & \text{якщо} \quad n=m,\\ \left((D^-)^{-1}\right)^{|n-m|}P^-_m, & \text{якщо} \quad n\le m\le n_1-1,\\ \left(A_n|_{E^-_n}\right)^{-1}\ldots\left(A_{m-1}|_{E^-_{m-1}}\right)^{-1}P^-_m, & \text{якщо} \quad n_1\le n<m\le n_2,\\ \left((D^-)^{-1}\right)^{|n-n_1|}\left(A_{n_1}|_{E^-_{n_1}}\right)^{-1}\ldots\left(A_{m-1}|_{E^-_{m-1}}\right)^{-1}P^-_m, & \text{якщо} \quad n\le n_1<m\le n_2,\\ \left((C^-)^{-1}\right)^{|m-n|}P^-_m, & \text{якщо} \quad n_2\le n\le m,\\ \left(A_n|_{E^-_n}\right)^{-1}\ldots\left(A_{n_2-1}|_{E^-_{n_2-1}}\right)^{-1}\left((C^-)^{-1}\right)^{|m-n_2|}P^-_m, & \text{якщо} \quad n_1\le n<n_2\le m,\\ \left((D^-)^{-1}\right)^{n-n_1}\left(A_{n_1}|_{E^-_{n_1}}\right)^{-1}\ldots & \\ \ldots\left(A_{n_2-1}|_{E^-_{n_2-1}}\right)^{-1}\left((C^-)^{-1}\right)^{|m-n_2|}P^-_m, & \text{якщо} \quad n<n_1,\ n_2\le m, \end{cases} \tag{75}$$

де $C^-=P^-_CCP^-_C=P^-_{n_2}CP^-_{n_2}$ і $D^-=P^-_DDP^-_D=P^-_{n_1-1}DP^-_{n_1-1}$.

Із співвідношень (68), (70) і леми 4 випливає, що для деяких чисел $N_2\ge 1$ і $q_2\in(0,1)$ виконується співвідношення

$$\left\|S^-_{n,m}\right\|_{L(E_m,E_n)}\le N_2(q_2)^{|n-m|},\quad n\le m. \tag{76}$$

Можна показати (через громіздкість ми цього також не робимо), що на підставі (12) і першої, другої, третьої та п’ятої умов теореми розв’язок задачі (74) має вигляд

$$z_n=S^-_{n,m}x_m,\quad n\le m.$$

Завдяки (76)

$$\|z_n\|_{E_n}\le N_2(q_2)^{|n-m|}\|x_m\|_{E_m},\quad n\le m.$$

Отже, умова в) е-дихотомічності різницевого рівняння для (10) також виконується.

Теорему 9 доведено.

***Приклад* 3.** Розглянемо різницеве рівняння (10) у випадку $B_n=\begin{cases} D, & \text{якщо} \quad n<0,\\ C, & \text{якщо} \quad n\ge 0,\end{cases}$ де C і D — лінійні неперервні оператори, що й у (12). Очевидно, що операторна функція B_n є окремим випадком функції, що визначається рівністю (12), і $n_1=n_2=0$.

Із теореми 9 випливає, що різницеве рівняння (10) з такою операторною функцією е-дихотомічне тоді і тільки тоді, коли:

1) банаховий простір E зображується у вигляді прямих сум замкнених підпросторів $E= =E^+_0\oplus E^-_0=E^+_{-1}\oplus E^-_{-1}$;

2) $CE^+_0\subset E^+_0$, $CE^-_0=E^-_0$, оператор $P^-_0CP^-_0: E^-_0\to E^-_0$ має неперервний обернений $\left(P^-_0CP^-_0\right)^{-1}$, $r\left(P^+_0CP^+_0\right)<1$ і $r\left(\left(P^-_0CP^-_0\right)^{-1}\right)<1$;

3) $DE^+_{-1}\subset E^+_{-1}\cap E^+_0$, $DE^-_{-1}=E^-_{-1}=E^-_0$, оператор $P^-_{-1}DP^-_{-1}: E^-_{-1}\to E^-_{-1}$ має неперервний обернений $\left(P^-_{-1}DP^-_{-1}\right)^{-1}$, $r\left(P^+_{-1}DP^+_{-1}\right)<1$ і $r\left(\left(P^-_{-1}DP^-_{-1}\right)^{-1}\right)<1$.

Очевидно, що наведені умови спрощуються, якщо E^-_{-1} і E^-_0 є нульовими просторами (тоді $E^+_{-1}=E^+_0=E$) або E^+_{-1} і E^+_0 є нульовими просторами (тоді $E^-_{-1}=E^-_0=E$).

4. Зображення оператора $\mathfrak{B}^{-1}$. Завдяки теоремі 8 справджується таке твердження.

Теорема 10. *Нехай оператор $\mathfrak{B}$ має неперервний обернений $\mathfrak{B}^{-1}$. Тоді оператор $\mathfrak{B}^{-1}$ зображується співвідношенням*

$$\left(\mathfrak{B}^{-1}\mathbf{f}\right)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_{n,m} f_m, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $G_{n,m}$ визначається рівностями (63), (72) *і* (75).

5. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Дослідженню задач про умови існування обмежених розв'язків різницевих рівнянь та про зображення і властивості таких розв'язків приділено багато уваги (див., наприклад, [8 – 19]). Для нелінійних рівнянь розв'язання цих задач не є тривіальними навіть у випадку $E = \mathbb{R}$, і лише в окремих випадках для них можна отримати завершені результати (див. [10, 12, 13]). У випадку лінійних неоднорідних різницевих рівнянь задачі про обмежені розв'язки тісно пов'язані з оборотністю операторів, породжених цими рівняннями. У зв'язку з цим навіть у випадку загального лінійного неоднорідного різницевого рівняння (2) з використанням експоненціальної дихотомії розв'язків відповідного однорідного різницевого рівняння (1) отримано необхідні та достатні умови існування й єдиності обмежених розв'язків рівняння для довільної обмеженої неоднорідної частини і знайдено загальний вигляд обмежених розв'язків цього рівняння [1].

Дослідження різницевих рівнянь (10) і (11) із кусково-сталим операторним коефіцієнтом B_n, яким приділено основну увагу в статті, здійснюється не простіше, ніж дослідження відповідних рівнянь (1) і (2), що підтверджується викладеними в пп. 2 і 3 результатами та статтею [1].

Леми 2, 3 та теореми 3, 4, 7 і 9 є новими.

Розглянуте в статті дослідження рівнянь (10), (11) є завершеним і наводиться уперше.

Рівняння (10) і (11) частково досліджувались у [20] (див. також [21]). У [20] у випадку скінченновимірного простору E для рівняння (11) з одним та двома стрибками коефіцієнта B_n (перший випадок розглянуто у прикладі 3) наведено необхідні та достатні умови існування і єдиності обмежених розв'язків та їхні зображення, а у випадку нескінченновимірного простору E для (11) з одним стрибком коефіцієнта B_n — достатні умови існування і єдиності обмежених розв'язків.

е-Дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями розглядалися в [22], а е-дихотомічні диференціальні та диференціально-функціональні рівняння — в [23 – 30].

Експоненціальній дихотомії на $\mathbb{Z}_+$ і $\mathbb{Z}_-$ розв'язків різницевих рівнянь у скінченновимірних і нескінченновимірних банахових просторах приділено увагу в [31, 32].

Література

1. В. Е. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1968).
3. В. Е. Слюсарчук, *Разностные уравнения в функциональных пространствах*, Дополнение II монографии Д. И. Мартынюка „Лекции по качественной теории разностных уравнений", Наук. думка, Киев (1972), с. 197 – 224.
4. В. Е. Слюсарчук, *Ограниченные и почти периодические решения разностных уравнений в банаховом пространстве*, Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений, Ин-т математики АН УССР, Киев (1975), с. 147 – 156.
5. В. Е. Слюсарчук, *Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве*, Докл. АН УССР, сер. А, № 6, 503 – 509 (1975).

6. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматгиз, Москва (1960).
7. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, Общая теория, т. I, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
8. S. V. Coffman, J. J. Schaffer, *Dichotomies for linear difference equations*, Math. Ann., **172**, 139 – 166 (1967).
9. А. Халанай, Д. Векслер, *Качественная теория импульсных систем*, Мир, Москва (1971).
10. А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев (1986).
11. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
12. В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність нелінійних різницевих операторів*, Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, Рівне (2006).
13. В. Ю. Слюсарчук, *Неявні недиференційовні функції в теорії операторів*, Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, Рівне (2008).
14. В. Е. Слюсарчук, *О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем*, Укр. мат. журн., **39**, № 2, 210 – 215 (1987).
15. В. Ю. Слюсарчук, *Зображення обмежених розв'язків лінійних дискретних рівнянь*, Нелінійні коливання, **22**, № 2, 262 – 279 (2019).
16. М. Ф. Городній, *Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **43**, № 1, 42 – 46 (1991).
17. А. Г. Баскаков, *Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов*, Мат. заметки, **67**, вып. 6, 816 – 827 (2000).
18. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами*, Нелінійні коливання, **15**, № 1, 122 – 126 (2012).
19. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі*, Нелінійні коливання, **18**, № 1, 112 – 119 (2015).
20. І. В. Гончар, *Обмежені та сумовні розв'язки різницевого рівняння зі стрибками операторного коефіцієнта*, Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Київ (2018).
21. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Нелінійні коливання, **20**, № 1, 66 – 73 (2017).
22. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями*, Нелінійні коливання, **14**, № 4, 536 – 555 (2011).
23. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
24. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, Москва (1970).
25. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).
26. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва (1970).
27. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).
28. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
29. Ю. С. Колесов, *Необходимые и достаточные условия экспоненциальной дихотомии решений линейных почти периодических уравнений с последействием*, Вестн. Ярослав. ун-та, вып. 5, 28 – 62 (1973).
30. В. Г. Курбатов, *О дихотомии решений уравнений нейтрального типа*, Исследования по устойчивости и теории колебаний, Ярослав. гос. ун-т (1977), с. 156 – 166.
31. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems (2th ed.)*, De Gruyter, Berlin; Boston (2016).
32. О. О. Покутний, *Розв'язки лінійного різницевого рівняння у просторі Банаха, обмежені на всій цілочисельній осі*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, № 1, 182 – 188 (2006).

Одержано 29.08.19