DOI: 10.37863/umzh.v72i6.1059

УДК 517.926.7

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
М. А. Елишевич (Киев. нац. ун-т стр-ва и архитектуры)

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ*

Conditions for existence are determined and bounded solutions of a system of linear inhomogeneous differential equations of the first order with rectangular matrices are constructed.

Визначено умови існування та побудовано обмежені розв'язки системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями.

Постановка задачи. В данной работе для системы

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in R, \tag{1}$$

где $A(t),\ B(t)$ — прямоугольные матрицы-функции размерности $m \times n,\ f(t)$ — вектор-функция размерности m, причем $A(t),\ B(t)$ и $f(t)$ действительные, ограниченные и имеющие ограниченные производные всех порядков при $t \in R$, рассматривается задача нахождения условий существования ее ограниченных решений и построения этих решений при их выполнении.

Основные определения. Будем использовать жордановы наборы векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора

$$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$$

и сопряженной матрицы $B^*(t)$ относительно оператора

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}B^*(t),$$

формально сопряженного к $L(t)$.

Определение 1 [1, с. 54]. *Элемент $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ имеет в точке $t \in R$ конечную жорданову цепочку векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины $p,\ p \geq 1$, если существуют векторы $\varphi^{(i)}(t),\ i = \overline{1,p}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

* Підтримано науково-дослідною та інноваційною програмою „Горизонт 2020” згідно з грантовою угодою Марії Склодовської-Кюрі № 873071.

Определение 2. *Элемент* $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *имеет в точке* $t \in R$ *циклическую жорданову цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, *если существуют векторы* $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{p}}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Определение 3. *Элемент* $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ *имеет в точке* $t \in R$ *вспомогательную цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, *если существуют векторы* $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{p}}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогично определим цепочки векторов на R. В дальнейшем будем предполагать, что доказываемые утверждения выполняются на R, если не оговорено иное. Свойства этих цепочек на конечном отрезке числовой оси изучены в [1, с. 54 – 57] (квадратные матрицы, конечные цепочки) и в [2, 3] (прямоугольные матрицы, конечные, циклические и вспомогательные цепочки).

В [4, с. 243 – 252] для системы (1) рассмотрен случай, когда $B(t)$ — единичная матрица, $A(t)$ — квадратная матрица. В данной работе рассматривается случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — прямоугольные матрицы и могут существовать конечные, циклические и вспомогательные цепочки, но $\operatorname{rank} B(t) = \mathrm{const}$, $\operatorname{rank} L(t) = \mathrm{const}$ при всех $t \in R$ (вследствие чего количества и длины указанных цепочек постоянны) и эти ранги не меняются при $t \to -\infty$ и $t \to \infty$.

Определение 4. *Линейный замкнутый нормально разрешимый оператор* U *является*:

n-*нормальным* [5, с. 27], *если* $\dim \ker U < \infty$,

d-*нормальным* [5, с. 31], *если* $\dim \ker U^* < \infty$,

нетеровым [6, с. 219], *если* $\dim \ker U < \infty$, $\dim \ker U^* < \infty$,

фредгольмовым [6, с. 219], *если* $\dim \ker U < \infty$, $\dim \ker U^* < \infty$, $\dim \ker U = \dim \ker U^*$.

Обозначим через 0_i нулевой вектор размерности i, через c_i произвольный постоянный вектор размерности i, $c_0 = 0_1$.

Определение 5 [7, с. 59]. *Система* (1) *имеет конечномерное пространство решений размерности* l, $0 \leq l \leq n$, *если существует такая матрица-функция* $X_l(t)$ *размерности* $n \times l$ *с линейно независимыми столбцами*, *что общее решение соответствующей* (1) *однородной системы имеет вид* $x(t) = X_l(t)c_l$ *и других решений эта система не имеет. В противном случае пространство решений бесконечномерное.*

Определение 6 [8, c. 236]. *Система*

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y \tag{2}$$

с фундаментальной матрицей $Y(t)$, *где* $C(t)$ — *квадратная матрица-функция порядка* l, *допускает экспоненциальную дихотомию решений на полуосях* $R_- = (-\infty; 0]$ *и* $R_+ = [0; \infty)$, *если существуют постоянные квадратные матрицы-проекторы* $P_i\,(P_i^2 = P_i)$ *порядка* l *и скалярные постоянные* $K_i \geq 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$, *такие, что выполняются неравенства*

$$\left\| Y(t)P_1Y^{-1}(s) \right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad s \leq t \leq 0, \tag{3}$$

$$\left\| Y(t)(E_l - P_1)Y^{-1}(s) \right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad t \leq s \leq 0, \tag{4}$$

$$\left\| Y(t)P_2Y^{-1}(s) \right\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t, \tag{5}$$

$$\left\| Y(t)(E_l - P_2)Y^{-1}(s) \right\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad 0 \leq t \leq s. \tag{6}$$

Для системы (2) и других систем, допускающих экспоненциальную дихотомию решений на полуосях R_- и R_+, которые рассматриваются далее, введем следующие обозначения дополнительно к тем, что были введены в определении 5: $U = P_1 + P_2 - E_l$ — постоянная квадратная матрица порядка l, $\varkappa = \dim\ker U = \dim\ker U^*$, $0 \leq \varkappa \leq l$, F и G — постоянные прямоугольные матрицы размерности $l \times \varkappa$, составленные из базисов $\ker U$ и $\ker U^*$ соответственно. Если $\varkappa = 0$, то положим $F = G = 0_l$.

Аналогично [4, c. 244] обозначим через $BC^\infty(R)$ множество всех скалярных, векторных, матричных функций, принадлежащих $C^\infty(R)$, ограниченных и имеющих ограниченные производные всех порядков на R. Таким образом, $A(t), B(t)$ и $f(t)$ принадлежат $BC^\infty(R)$.

Полученный результат. Сначала рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y + g(t), \tag{7}$$

где $g(t) \in BC^\infty(R)$ — вектор-функция размерности l, остальные обозначения те же, что и у соответствующей ей однородной системы (2).

Теорема 1. *Если система* (2) *допускает экспоненциальную дихотомию решений на полуосях* R_- *и* R_+, *то система* (7) *имеет принадлежащие* $BC^\infty(R)$ *решения в том и только том случае, когда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^* P_1 Y^{-1}(t) g(t) dt = 0. \tag{8}$$

Эти решения имеют вид

$$y(t) = Y(t)\big[P_2 F c_\varkappa + \tilde{y}(t)\big], \tag{9}$$

где

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} P_1 Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau - \int_{-t}^{0} (E_l - P_1)Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau + \\ \displaystyle +(E_l - P_1)U^{-}\left[\int_{-\infty}^{0} P_1 Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty}(E_l - P_2)Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau\right], \quad t \le 0, \\ \\ \displaystyle\int_{0}^{t} P_2 Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty} (E_l - P_2)Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau + \\ \displaystyle +P_2 U^{-}\left[\int_{-\infty}^{0} P_1 Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty}(E_l - P_2)Y^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau\right], \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{10}$$

— вектор-функция размерности l.

Доказательство. Поскольку система (2) допускает экспоненциальную дихотомию решений на полуосях R_- и R_+, то согласно [4, с. 243 – 252] для существования ограниченных решений системы (7) необходимо и достаточно выполнения условия (8). При его выполнении эти решения имеют вид (9), (10). Согласно [7, с. 60] $y(t)$ принадлежит $C^\infty(R)$. Ограниченность производных всех порядков $y(t)$ доказывается методом математической индукции.

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** Согласно [4, с. 248] в условии (8) матрицу P_1 можно заменить матрицей $(E_l - P_2)$. Аналогично в (9) матрицу P_2 можно заменить матрицей $(E_l - P_1)$.

Рассмотрим матрицы $A(t)$, $B(t)$ и векторы, введенные в определениях 1 – 3.

Пусть $\rho = \operatorname{rank} B(t) = \mathrm{const}$, $k = \dim\ker B(t) = n - \rho$, $l = \dim\ker B^*(t) = m - \rho$, $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,l}$, $z_i(t)$, $i = \overline{1,l}$, $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, — базисы в $\ker B(t)$, $\ker B^*(t)$, $\operatorname{coker} B(t)$ и $\operatorname{coker} B^*(t)$ соответственно.

Лемма 1. *Векторы $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, можно выбрать так, чтобы они принадлежали $BC^\infty(R)$.*

Доказательство. Используем методы работы [9]. Представим матрицу $B(t)$ в виде

$$B(t) = \begin{bmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{bmatrix},$$

где $B_{11}(t)$, $B_{12}(t)$, $B_{21}(t)$ и $B_{22}(t)$ — матрицы размерности $\rho \times \rho$, $\rho \times k$, $l \times \rho$ и $l \times k$ соответственно. Если $\rho > 0$, то, не умаляя общности, можно считать, что $\det B_{11}(t) \not\equiv 0$. Построим матрицу $P(t) \in BC^\infty(R)$ размерности $n \times k$:

$$P(t) = \det B_{11}(t) \begin{bmatrix} B_{11}^{-1}(t)B_{12}(t) \\ -E_k \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Согласно [10] $B(t)P(t) = 0$ при $\det B_{11}(t) \neq 0$. Поскольку $\det B_{11}(t) \not\equiv 0$, то существует не более чем счетное множество нулей функции $\det B_{11}(t)$ при $t \in R$. Но так как $B(t), P(t) \in$ $\in BC^\infty(R)$, то $B(t)P(t) \equiv 0$.

Из (11) следует, что $\operatorname{rank} P(t) < k$ может быть только при $\det B_{11}(t) = 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} P(t) = k$, за исключением не более чем счетного множества точек $t_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть u_i, $i = \overline{1,r}$, — базис в $\ker P(t_1)$. Дополним его векторами u_i, $i = \overline{r+1,k}$, до полного базиса. Построим матрицу $Q(t) \in BC^\infty(R)$:

$$Q(t) = \left[\frac{P(t)u_1}{\|P(t)u_1\|}, \ldots, \frac{P(t)u_k}{\|P(t)u_k\|}\right],$$

$B(t)Q(t) \equiv 0$, $\operatorname{rank} Q(t) = \operatorname{rank} P(t)$ $\forall t \neq t_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Заменим матрицу $P(t)$ матрицей $Q(t)$. Если $\operatorname{rank} Q(t_1) < k$, то выполняем с ней аналогичные преобразования, и т. д. Этот процесс конечный, поскольку $\operatorname{rank} Q(t_1) > \operatorname{rank} P(t_1)$.

Выполним такие же преобразования в точках t_i, $i = 2, 3, \ldots$. Если 0 является предельной точкой функции $\det B_{11}(t)$ при $t \to -\infty$, то выберем максимальное количество линейно независимых векторов u_i, $i = \overline{1, r}$, таких, что вектор 0_n является предельной точкой вектор-функций $P(t_1)u_i$, $i = \overline{1, r}$, при $t \to -\infty$, и выполним аналогичные преобразования. При необходимости такие же преобразования выполним и при $t \to \infty$. В итоге получим матрицу, столбцы которой можно взять за векторы $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, k}$.

Лемма 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Векторы* $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, l}$, *можно выбрать так, чтобы они принадлежали* $BC^{\infty}(R)$.

Не умаляя общности, будем полагать, что $\|\varphi_i(t)\| = 1$, $i = \overline{1, k}$, $\|\psi_i(t)\| = 1$, $i = \overline{1, l}$. Тогда векторы $z_i(t)$, $i = \overline{1, l}$, $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, можно выбрать так, чтобы они принадлежали $BC^{\infty}(R)$ и выполнялись равенства

$$\big(\varphi_i(t), \gamma_j(t)\big) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, k}, \tag{12}$$

$$\big(z_i(t), \psi_j(t)\big) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, l}. \tag{13}$$

Лемма 2. *Обобщенно-обратную матрицу* $B^{-}(t)$ *можно построить так, чтобы* $B^{-}(t)$ *принадлежала* $BC^{\infty}(R)$ *и выполнялись равенства*

$$B^{-}(t)z_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \tag{14}$$

$$\big[B^{-}(t)\big]^{*}\gamma_i(t) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \tag{15}$$

$$\big[B^{*}(t)\big]^{-} = \big[B^{-}(t)\big]^{*}. \tag{16}$$

Доказательство. Дополним векторы $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, и $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, l}$, векторами $q_i(t) \in$ $\in BC^{\infty}(R)$, $i = \overline{1, \rho}$, и $p_i(t) \in BC^{\infty}(R)$, $i = \overline{1, \rho}$, соответственно до полных базисов так, чтобы выполнялись равенства

$$\big(B(t)q_i(t), p_j(t)\big) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, \rho}.$$

Построим прямоугольные матрицы, принадлежащие $BC^{\infty}(R)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \big[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)\big], & \Psi(t) &= \big[\psi_1(t), \ldots, \psi_l(t)\big], \\ Z(t) &= \big[z_1(t), \ldots, z_l(t)\big], & \Gamma(t) &= \big[\gamma_1(t), \ldots, \gamma_k(t)\big], \\ P(t) &= \big[p_1(t), \ldots, p_\rho(t)\big], & Q(t) &= \big[q_1(t), \ldots, q_\rho(t)\big]. \end{aligned} \tag{17}$$

Тогда согласно [2]

$$B^-(t) = \big[E_n - \Phi(t)\Gamma^*(t)\big]Q(t)P^*(t)\big[E_m - Z(t)\Psi^*(t)\big] \tag{18}$$

и принадлежит $BC^\infty(R)$, равенства (14)–(16) выполняются.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если элемент* $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *имеет конечную или циклическую жорданову цепочку матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$, *состоящую из векторов* $\varphi^{(i)}(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1,p}$, *то элемент* $\bar\varphi^{(1)}(t) = a(t)\varphi^{(1)}(t)$, *где* $a(t) \in BC^\infty(R)$, $a(t) \neq 0$, — *скалярная функция*, *имеет аналогичную цепочку векторов.*

Доказательство. Искомая цепочка состоит из векторов

$$\bar\varphi^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{i} C_{p-j}^{i-j}\frac{d^{i-j}a(t)}{dt^{i-j}}\varphi^{(j)}(t), \qquad \bar\varphi^{(i)}(t) \in BC^\infty(R), \quad i = \overline{1,p}.$$

Для них выполняются равенства из определений 1 или 2 соответственно.

Лемма 3 доказана.

Построим прямоугольные матрицы

$$\Phi_{ij}^{(p)}(t) = \big[B^-(t)L(t)\big]^{p-1}\big[\varphi_i(t),\ldots,\varphi_j(t)\big], \qquad i \le j, \quad i,j = \overline{1,k}, \quad p = 1,2,\ldots. \tag{19}$$

Лемма 4. *Конечные и циклические жордановы цепочки матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *можно построить так, чтобы составляющие их векторы принадлежали* $BC^\infty(R)$.

Доказательство. Если $\operatorname{rank} L(t)\Phi_{1k}^{(1)}(t) < k$, то существуют циклические цепочки длины 1, состоящие из векторов $\breve\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,\breve r}$. Тогда $\operatorname{rank} L(t)\Phi_{1k}^{(1)}(t) = k - \breve r = \mathrm{const}$. Согласно лемме 1 существует базис $\ker L(t)\Phi_{1k}^{(1)}(t)$, состоящий из векторов $\breve\xi_i(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1,\breve r}$. Согласно [2] и лемме 3 $\breve\varphi_i(t) = \Phi_{1k}^{(1)}(t)\breve\xi_i(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1,\breve r}$.

Положим $\varphi_{k-\breve r+i}(t) = \breve\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,\breve r}$, а векторы $\varphi_i(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1,k-\breve r}$, определим заново и изменим матрицы (17)–(19).

Для того чтобы ненулевой вектор $\varphi(t)$, являющийся линейной комбинацией векторов $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,k-\breve r}$, имел цепочку длины больше 1, необходимо и достаточно выполнения равенства $\Psi^*(t)L(t)\varphi(t) = 0$. Поскольку $r_1 = \operatorname{rank}\Psi^*(t)L(t)\Phi_{1,k-\breve r}^{(1)}(t) = \mathrm{const}$, то согласно лемме 1 существует базис $\ker\Psi^*(t)L(t)\Phi_{1,k-\breve r}^{(1)}(t)$, состоящий из векторов $\xi_{1i}(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1,k-\breve r-r_1}$.

Положим $\varphi_{r_1+i}(t) = \varphi_{r_1+i}^{(1)}(t) = \Phi_{1,k-\breve r}^{(1)}(t)\xi_{1i}(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1,k-\breve r-r_1}$, а векторы $\varphi_i(t) = \varphi_i^{(1)}(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1,r_1}$, из которых состоят конечные цепочки длины 1, определим заново.

Из постоянства рангов матрицы $B(t)$ и оператора $L(t)$ следует, что векторы $L(t)\varphi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,r_1}$, линейно независимы при $t \to \pm\infty$, так что положим $z_i(t) = L(t)\varphi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,r_1}$, а векторы $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,l}$, $z_i(t)$, $i = \overline{r_1+1,l}$, $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, определим заново таким образом, чтобы выполнялись равенства (12), (13), и изменим матрицы (17)–(19).

Положим $\varphi_i^{(2)}(t) = B^-(t)L(t)\varphi_i^{(1)}(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{r_1+1,k-\breve r}$.

Далее аналогично: количество циклических цепочек длины 2 равно $\tilde{r}_2 = k - \breve{r} - r_1 - \operatorname{rank} L(t)\Phi^{(2)}_{r_1+1,k-\breve{r}}(t)$, они состоят из векторов $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t) = \Phi^{(1)}_{r_1+1,k-\breve{r}}(t)\tilde{\xi}_{2i}(t) \in BC^\infty(R)$, $\tilde{\varphi}_i^{(2)}(t) = \Phi^{(1)}_{r_1+1,k-\breve{r}}(t)\dfrac{d}{dt}\tilde{\xi}_{2i}(t) + \Phi^{(2)}_{r_1+1,k-\breve{r}}(t)\tilde{\xi}_{2i}(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1, \tilde{r}_2}$, где $\tilde{\xi}_{2i}(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1, \tilde{r}_2}$, — базис $\ker L(t)\Phi^{(2)}_{r_1+1,k-\breve{r}}(t)$, и т. д.

Лемма 4 доказана.

***Следствие* 2.** *Циклические жордановы цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ можно построить так, чтобы составляющие их векторы принадлежали $BC^\infty(R)$.*

Пусть мы построили следующие жордановы цепочки:

матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$:

r конечных, $r \geq 0$, длин s_i, $s_i > 0$, $i = \overline{1, r}$, состоящих из векторов $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$;

$\tilde{r}$ циклических, $\tilde{r} \geq 0$, длин $(\tilde{s}_i + 1)$, $\tilde{s}_i > 0$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

$\breve{r}$ циклических, $\breve{r} \geq 0$, длины 1, состоящих из векторов $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$;

матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$:

$\hat{r}$ циклических, $\hat{r} \geq 0$, длин $(\hat{s}_i + 1)$, $\hat{s}_i > 0$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

$\breve{r}$ циклических, $\breve{r} \geq 0$, длины 1, состоящих из векторов $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$.

В процессе их построения мы получили, что в (12), (13) $k = r + \tilde{r} + \breve{r}$, $\varphi_i(t) = \varphi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, $\varphi_{r+i}(t) = \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_{r+\tilde{r}+i}(t) = \breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $z_i(t) = L(t)\varphi_i^{(s_i)}(t)$, $i = \overline{1, r}$. С учетом этого изменим матрицы (17), (18). Тогда

$$\varphi_i^{(j)}(t) = \left[B^-(t)L(t)\right]^{j-1}\varphi_i^{(1)}(t), \quad j = \overline{2, s_i}, \quad i = \overline{1, r},$$

$$\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t) = \left[B^-(t)L(t)\right]^{j-1}\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t), \quad j = \overline{2, \tilde{s}_i + 1}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}},$$

$$\tilde{\psi}_i^{(j)}(t) = \left\{[B^*(t)]^- L^*(t)\right\}^{j-1}\tilde{\psi}_i^{(1)}(t), \quad j = \overline{2, \hat{s}_i + 1}, \quad i = \overline{1, \hat{r}}.$$

Лемма 5. *Существуют r конечных жордановых цепочек принадлежащих $BC^\infty(R)$ векторов матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин s_i, $i = \overline{1, r}$.*

Доказательство. Согласно [2] существуют векторы $\psi_i^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, $i = \overline{1, r}$, такие, что

$$\left(L(t)\varphi_i^{(s_i)}(t), \psi_j^{(1)}(t)\right) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, r}.$$

Следовательно, их можно выбрать так, что $\psi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, принадлежат $BC^\infty(R)$. Искомые цепочки состоят из векторов

$$\psi_i^{(j)}(t) = \left\{\left[B^*(t)\right]^- L^*(t)\right\}^{j-1}\psi_i^{(1)}(t) \in BC^\infty(R), \qquad j = \overline{2, s_i}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Лемма 5 доказана.

Аналогично [2] доказывается, что существуют вспомогательные цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$, состоящие из векторов $\hat{\varphi}_i^{(1)}(t) \in BC^\infty(R)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, вспомогательные цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$, состоящие из векторов $\hat{\psi}_i^{(j)}(t) \in BC^\infty(R)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, векторы $\check{\varphi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B(t) \bigcup \operatorname{Im} L(t)$, $\check{\varphi}_i(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, векторы $\check{\psi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B^*(t) \bigcup \operatorname{Im} L^*(t)$, $\check{\psi}_i(t) \in BC^\infty(R)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, такие, что элементы каждого из следующих множеств линейно независимы:

1) $\check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

2) $\check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$;

3) $\check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$;

4) $\check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$.

При этом в (12), (13) $l = r + \hat{r} + \check{r}$, $\rho = n - r - \tilde{r} - \check{r} = m - r - \hat{r} - \check{r}$, $\psi_i(t) = \psi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, $\psi_{r+i}(t) = \tilde{\psi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\psi_{r+\hat{r}+i}(t) = \check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\gamma_i(t) = L^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t)$, $i = \overline{1, r}$, $z_{r+i}(t) = L(t)\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\gamma_{r+i}(t) = L^*(t)\hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $z_{r+\hat{r}+i}(t) = \check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$, $\gamma_{r+\tilde{r}+i}(t) = \check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1, \check{r}}$. Отсюда с учетом (14), (15) следует, что пары множеств 1 и 4, 2 и 3 соответственно представляют собой биортогональные системы:

$$\big(\check{\varphi}_i(t), \check{\psi}_k(t)\big) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, \check{r}},$$

$$\Big(\check{\varphi}_i(t), \check{\psi}_k(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, \check{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j, \tilde{s}_i+1}, \qquad j, l = \overline{1, \tilde{s}_i}, \quad i, k = \overline{1, \tilde{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, \tilde{r}},$$

$$\Big(\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), \tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j, \hat{s}_i+1}, \qquad j, l = \overline{1, \hat{s}_i}, \quad i, k = \overline{1, \hat{r}},$$

$$\Big(B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_i+1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, \hat{r}},$$

$$\Big(\varphi_i^{(j)}(t), L^*(t)\psi_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\varphi_i^{(j)}(t), \psi_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j, s_i+1}, \qquad j, l = \overline{1, s_i}, \quad i, k = \overline{1, r};$$

все остальные скалярные произведения векторов из соответствующих пар множеств равны нулю.

Обозначим

$$s = \sum_{i=1}^{r} s_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{s}_i, \quad \hat{s} = \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{s}_i, \quad \alpha = n - \check{r} - \tilde{r} - \tilde{s} - s - \hat{s} = m - \check{r} - \hat{r} - \hat{s} - s - \tilde{s}.$$

Элементы множеств 1 и 3 дополним векторами $q_i(t) \in BC^\infty(R),\ i = \overline{1,\alpha}$, и $p_i(t) \in \in BC^\infty(R),\ i = \overline{1,\alpha}$, до полных базисов так, чтобы они были ортогональны всем элементам множеств 4 и 2 соответственно и выполнялись равенства

$$\big(B(t)q_i(t), p_j(t)\big) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,\alpha}.$$

Это возможно согласно [3]. Элементы каждого из следующих множеств линейно независимы:

5) $q_i(t),\ i = \overline{1,\alpha},\ \breve{\varphi}_i(t),\ i = \overline{1,\breve{r}},\ \tilde{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\tilde{s}_i+1},\ i = \overline{1,\tilde{r}},\ \varphi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,s_i},\ i = \overline{1,r},\ \hat{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\hat{s}_i},\ i = \overline{1,\hat{r}}$;

6) $B(t)q_i(t),\ i = \overline{1,\alpha},\ \breve{\varphi}_i(t),\ i = \overline{1,\breve{r}},\ L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\tilde{s}_i},\ i = \overline{1,\tilde{r}},\ L(t)\varphi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,s_i},\ i = \overline{1,r},\ B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t),\ i = \overline{1,\hat{r}},\ L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\hat{s}_i},\ i = \overline{1,\hat{r}}$;

7) $p_i(t),\ i = \overline{1,\alpha},\ \breve{\psi}_i(t),\ i = \overline{1,\breve{r}},\ \tilde{\psi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\hat{s}_i+1},\ i = \overline{1,\hat{r}},\ \psi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,s_i},\ i = \overline{1,r},\ \hat{\psi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\tilde{s}_i},\ i = \overline{1,\tilde{r}}$;

8) $B^*(t)p_i(t),\ i = \overline{1,\alpha},\ \breve{\psi}_i(t),\ i = \overline{1,\breve{r}},\ L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\hat{s}_i},\ i = \overline{1,\hat{r}},\ L^*(t)\psi_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,s_i},\ i = \overline{1,r},\ B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t),\ i = \overline{1,\tilde{r}},\ L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t),\ j = \overline{1,\tilde{s}_i},\ i = \overline{1,\tilde{r}}$.

Пары множеств 5 и 8, 6 и 7 соответственно представляют собой биортогональные системы.

Из элементов множеств 5 и 7 составим принадлежащие $BC^\infty(R)$ прямоугольные матрицы:

$$Q_0(t) = \big[q_1(t), \ldots, q_\alpha(t)\big],$$

$$\Phi_i(t) = \Big[\varphi_i^{(1)}(t), \ldots, \varphi_i^{(s_i)}(t)\Big], \quad i = \overline{1,r},$$

$$\tilde{\Phi}_{ij}(t) = \Big[\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \ldots, \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\Big], \qquad j = \tilde{s}_i, \tilde{s}_i+1, \quad i = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\hat{\Phi}_i(t) = \Big[\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t)\Big], \quad i = \overline{1,\hat{r}},$$

$$Q(t) = \Big[Q_0(t), \Phi_1(t), \ldots, \Phi_r(t), \tilde{\Phi}_{1,\tilde{s}_1+1}(t), \ldots, \tilde{\Phi}_{\tilde{r},\tilde{s}_{\tilde{r}}+1}(t), \hat{\Phi}_1(t), \ldots, \hat{\Phi}_{\hat{r}}(t), \breve{\varphi}_1(t), \ldots, \breve{\varphi}_{\breve{r}}(t)\Big], \tag{20}$$

$$P_0(t) = \big[p_1(t), \ldots, p_\alpha(t)\big],$$

$$\Psi_i(t) = \Big[\psi_i^{(s_i)}(t), \ldots, \psi_i^{(1)}(t)\Big], \quad i = \overline{1,r},$$

$$\tilde{\Psi}_{ij}(t) = \Big[\tilde{\psi}_i^{(j)}(t), \ldots, \tilde{\psi}_i^{(1)}(t)\Big], \qquad j = \hat{s}_i, \hat{s}_i+1, \quad i = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\hat{\Psi}_i(t) = \Big[\hat{\psi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t)\Big], \quad i = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$P(t) = \Big[P_0(t), \Psi_1(t), \ldots, \Psi_r(t), \hat{\Psi}_1(t), \ldots, \hat{\Psi}_{\tilde{r}}(t), \tilde{\Psi}_{1,\hat{s}_1+1}(t), \ldots, \tilde{\Psi}_{\hat{r},\hat{s}_{\hat{r}}+1}(t), \breve{\psi}_1(t), \ldots, \breve{\psi}_{\breve{r}}(t)\Big]^*. \tag{21}$$

Здесь $P(t)$ и $Q(t)$ — квадратные невырожденные матрицы порядков m и n соответственно.

Обозначим через $J_i = I_{s_i}$, $i = \overline{1,r}$, нильпотентный жорданов блок размерности s_i, $\tilde{J}_i = [E_{\tilde{s}_i}, 0_{\tilde{s}_i}]$, $\tilde{K}_i = [0_{\tilde{s}_i}, E_{\tilde{s}_i}]$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\hat{J}_i = [E_{\hat{s}_i}, 0_{\hat{s}_i}]^T$, $\hat{K}_i = [0_{\hat{s}_i}, E_{\hat{s}_i}]^T$, $i = \overline{1,\hat{r}}$.

Перейдем непосредственно к системе (1). Согласно [3] для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения условий

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_i} \frac{d^j}{dt^j} \Big(f(t), \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i - j+1)}(t) \Big) = 0, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \tag{22}$$

$$\Big(f(t), \breve{\psi}_i(t) \Big) = 0, \quad i = \overline{1,\breve{r}}. \tag{23}$$

При их выполнении ее общее решение имеет вид

$$x(t) = Q_0(t)X(t)\left[c_\alpha + \int\limits_0^t X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau \right] - \sum_{i=1}^{r} \Phi_i(t) \sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\big[\Psi_i^*(t)f(t)\big] -$$

$$- \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{\Phi}_{i\tilde{s}_i}(t) \sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1} \big(I_{\tilde{s}_i}^T\big)^j \frac{d^j}{dt^j}\Big[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\Big] - \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{\Phi}_i(t) \sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\Big[\tilde{\Psi}_{i\hat{s}_i}^*(t)f(t)\Big] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_i} \left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde{\beta}_i(t) \right] \tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i - j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{\beta}_i(t)\breve{\varphi}_i(t),$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$\frac{dy_0}{dt} = P_0^*(t)\big[L(t)Q_0(t)\big]y_0, \tag{24}$$

$\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty(R)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty(R)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, — произвольные скалярные функции.

Теорема 2. *Пусть $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ принадлежат $BC^\infty(R)$, для любого $t \in R$ существуют жордановы цепочки векторов*

матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$:

r конечных, $r \geq 0$, длин s_i, $s_i > 0$, $i = \overline{1,r}$;

$\tilde{r}$ циклических, $\tilde{r} \geq 0$, длин $(\tilde{s}_i + 1)$, $\tilde{s}_i > 0$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$;

$\breve{r}$ циклических, $\breve{r} \geq 0$, длины 1;

матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$:

$\hat{r}$ циклических, $\hat{r} \geq 0$, длин $(\hat{s}_i + 1)$, $\hat{s}_i > 0$, $i = \overline{1,\hat{r}}$;

$\breve{r}$ циклических, $\breve{r} \geq 0$, длины 1,

система (24) *допускает экспоненциальную дихотомию решений на полуосях R_- и R_+. Тогда система* (1) *имеет принадлежащее $BC^\infty(R)$ решение в том и только том случае, когда выполняются равенства* (22), (23),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^* P_1 X^{-1}(t)P_0^*(t)f(t)dt = 0. \tag{25}$$

Эти решения имеют вид

$$x(t) = Q_0(t)X(t)\big[P_2Fc_\varkappa + \tilde{x}(t)\big] - \sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\big[\Psi_i^*(t)f(t)\big] -$$

$$- \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\tilde{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1}\left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\hat{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat{r}}\hat{\Phi}_i(t)\sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^j \frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde{\Psi}_i^*(t)f(t)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tilde{r}}\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde{\beta}_i(t)\right]\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}}\check{\beta}_i(t)\check{\varphi}_i(t), \tag{26}$$

где

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} P_1X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau - \int_{t}^{0}\left(E_\alpha - P_1\right)X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau + \\ \displaystyle + \left(E_\alpha - P_1\right)U^- \left[\int_{-\infty}^{0} P_1X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau + \right. \\ \displaystyle \left. + \int_{0}^{\infty}\left(E_\alpha - P_2\right)X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau\right], \quad t \le 0, \\ \displaystyle\int_{0}^{t} P_2X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau - \int_{t}^{\infty}\left(E_\alpha - P_2\right)X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau + \\ \displaystyle + P_2U^- \left[\int{}_{-\infty}^{0} P_1X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau + \right. \\ \displaystyle \left. + \int_{0}^{\infty}\left(E_\alpha - P_2\right)X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau\right], \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{27}$$

— вектор-функция размерности $\alpha,\ \tilde{\beta}_i(t) \in BC^\infty(R),\ i = \overline{1,\tilde{r}},\ \check{\beta}_i(t) \in BC^\infty(R),\ i = \overline{1,\check{r}}.$

Доказательство. Выполним в системе (1) замену

$$x(t) = Q(t)y(t) \tag{28}$$

с матрицей $Q(t)$ (20) и умножим слева на матрицу $P(t)$ (21). Тогда, представив вектор $y(t)$ в виде

$$y(t) = \operatorname{col}\big[y_0(t), y_1(t), \ldots, y_r(t), \tilde{y}_1(t), \ldots, \tilde{y}_{\tilde{r}}(t), \hat{y}_1(t), \ldots, \hat{y}_{\hat{r}}(t), \check{y}_1(t), \ldots, \check{y}_{\check{r}}(t)\big], \tag{29}$$

где составляющие его векторы имеют размерности $y_0(t) - \alpha,\ y_i(t) - s_i,\ i = \overline{1,r},\ \tilde{y}_i(t) - -(\tilde{s}_i + 1),\ i = \overline{1,\tilde{r}},\ \hat{y}_i(t) - \hat{s}_i,\ i = \overline{1,\hat{r}},\ \check{y}_i(t) - 1,\ i = \overline{1,\check{r}}$ (скалярные функции), согласно [3] получим, что система (1) распадается на следующие независимые системы:

$$\frac{dy_0}{dt} = P_0^*(t)\big[L(t)Q_0(t)\big]y_0 + P_0^*(t)f(t), \tag{30}$$

$$J_i\frac{dy_i}{dt} = y_i + \Psi_i^*(t)f(t), \quad i = \overline{1,r}, \tag{31}$$

$$\tilde{J}_i \frac{d\tilde{y}_i}{dt} = \tilde{K}_i \tilde{y}_i + \hat{\Psi}_i^*(t) f(t), \quad i = \overline{1, \tilde{r}}, \tag{32}$$

$$\hat{J}_i \frac{d\hat{y}_i}{dt} = \hat{K}_i \hat{y}_i + \tilde{\Psi}_{i,\hat{s}_i+1}^*(t) f(t), \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{33}$$

$$0 = \breve{\psi}_i^*(t) f(t), \quad i = \overline{1, \breve{r}}. \tag{34}$$

Поскольку соответствующая (30) однородная система (24) допускает экспоненциальную дихотомию решений на полуосях R_- и R_+, то согласно теореме 1 для существования ее решений, принадлежащих $BC^\infty(R)$, необходимо и достаточно выполнения условия (25). При его выполнении эти решения имеют вид (27),

$$y_0(t) = X(t)\big[P_2 F c_\varkappa + \tilde{x}(t)\big]. \tag{35}$$

Системы (31) – (34) исследованы в [3].

Системы (31) имеют единственные решения

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{s_i-1} I_{s_i}^j \frac{d^j}{dt^j} \Psi_i^*(t) f(t), \quad i = \overline{1, r}. \tag{36}$$

Системы (32) имеют бесконечномерные пространства решений

$$\tilde{y}_i(t) = \mathrm{col}\left[0_1, -\sum_{j=0}^{\tilde{s}_i-1} \left(I_{\tilde{s}_i}^T\right)^j \frac{d^j}{dt^j} \hat{\Psi}_i^*(t) f(t)\right] + \mathrm{col}\left[\tilde{\beta}_i(t), \ldots, \frac{d^{\tilde{s}_i}}{dt^{\tilde{s}_i}} \tilde{\beta}_i(t)\right], \quad i = \overline{1, \tilde{r}}. \tag{37}$$

Для разрешимости систем (33) необходимо и достаточно выполнения равенств (22). При их выполнении они имеют единственные решения

$$\hat{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\hat{s}_i-1} I_{\hat{s}_i}^j \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\Psi}_{i,\hat{s}_i}^*(t) f(t), \quad i = \overline{1, \hat{r}}. \tag{38}$$

Равенства (34) не содержат координат вектора $y(t)$, они эквивалентны равенствам (23) и являются условиями разрешимости системы (1).

Функции $\breve{y}_i(t)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, в системы (30) – (34) не входят, поэтому положим

$$\breve{y}_i(t) = \breve{\beta}_i(t), \quad i = \overline{1, \breve{r}}. \tag{39}$$

Подставив (20), (29), (35) – (39) в (28), получим (26). При этом $x(t)$ принадлежит $BC^\infty(R)$.

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 3.** *Условие* (25) *представляет собой* $\varkappa$ *скалярных равенств, из них линейно независимых* $\mathrm{rank}(G^* P_1)$.

***Замечание* 2.** Если $\tilde{r} = \breve{r} = 0$, то $\dim\ker L(t) = \alpha$, оператор $L(t)$ является n-нормальным, в противном случае $\dim\ker L(t) = \infty$. Если $\hat{r} = \breve{r} = 0$, то $\dim\ker L^*(t) = \alpha$, оператор $L(t)$ является d-нормальным, в противном случае $\dim\ker L^*(t) = \infty$. Если же $\tilde{r} = \breve{r} = \hat{r} = \breve{r} = 0$, то оператор $L(t)$ является фредгольмовым.

***Следствие* 4.** *Если* $\tilde{r} = \breve{r} = 0$, *то пространство решений* (26), (27) *системы* (1) *конечномерно и имеет размерность, равную* $\operatorname{rank}(P_2F)$. *В противном случае оно бесконечномерно.*

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha = 1$, предположив, что условия (22), (23) выполняются. При этом

$$X(t) = \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau\right),$$

где $\lambda(t) = P_0^*(t)L(t)Q_0(t) = p_1^*(t)L(t)q_1(t)$ — скалярная функция. Система (24) допускает экспоненциальную дихотомию решений на полуосях R_- и R_+ тогда и только тогда, когда

$$\varliminf_{t\to-\infty} \big|\lambda(t)\big| > 0, \qquad \varliminf_{t\to\infty} \big|\lambda(t)\big| > 0.$$

Следовательно, существуют такие точки $t_1 \in R_-$ и $t_2 \in R_+$, что $\lambda(t) \neq 0$ при $t \in (-\infty; t_1] \bigcup \bigcup [t_2; \infty)$. Обозначим через $\Delta_1 \subset [t_1; 0]$, $\Delta_2 \subset [0; t_2]$ произвольные отрезки.

Если $\lambda(t) < 0$ при $t \leq t_1$, то в (3), (4) положим

$$P_1 = 1, \qquad \alpha_1 = -\sup_{t\leq t_1}\lambda(t), \qquad K_1 = \exp\left(\sup_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_1} \lambda(\tau)d\tau + \alpha_1 t_1\right).$$

Если $\lambda(t) > 0$ при $t \leq t_1$, то в (3), (4) положим

$$P_1 = 0, \qquad \alpha_1 = \inf_{t\leq t_1}\lambda(t), \qquad K_1 = \exp\left(\inf_{\Delta_1}\int\limits_{\Delta_1} \lambda(\tau)d\tau - \alpha_1 t_1\right).$$

Если $\lambda(t) < 0$ при $t \geq t_2$, то в (5), (6) положим

$$P_2 = 1, \qquad \alpha_2 = -\sup_{t\geq t_2}\lambda(t), \qquad K_2 = \exp\left(\sup_{\Delta_2}\int\limits_{\Delta_2} \lambda(\tau)d\tau - \alpha_2 t_2\right).$$

Если $\lambda(t) > 0$ при $t \geq t_2$, то в (5), (6) положим

$$P_2 = 0, \qquad \alpha_2 = \inf_{t\geq t_2}\lambda(t), \qquad K_2 = \exp\left(\inf_{\Delta_2}\int\limits_{\Delta_2} \lambda(\tau)d\tau + \alpha_2 t_2\right).$$

Если $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, то $U = U^- = -1$, $\varkappa = 0$, $F = G = 0$, условие (25) выполняется, система (1) имеет принадлежащие $BC^\infty(R)$ решения (26), (27):

$$x(t) = -q_1(t)\exp\left(\int\limits_0^t \lambda(z)dz\right)\int\limits_t^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)dz\right)p_1^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right]-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I_{\tilde s_i}^T\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\right]+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t). \qquad (40)$$

Если $P_1=0,\ P_2=1$, то $U=U^-=0,\ \varkappa=1,\ F=G=1$, условие (25) выполняется, система (1) имеет принадлежащие $BC^\infty(R)$ решения (26), (27):

$$x(t)=q_1(t)\exp\left(\int_0^t\lambda(z)dz\right)\left[c_1+\int_0^t\exp\left(-\int_0^\tau\lambda(z)dz\right)p_1^*(\tau)f(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right]-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I_{\tilde s_i}^T\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\right]+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t). \qquad (41)$$

Если $P_1=1,\ P_2=0$, то $U=U^-=0,\ \varkappa=1,\ F=G=1$, условие (25) имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\int_0^\tau\lambda(z)dz\right)p_1^*(\tau)f(\tau)d\tau=0. \qquad (42)$$

При его выполнении система (1) имеет принадлежащие $BC^\infty(R)$ решения (26), (27), совпадающие с (40), или, что согласно (42) то же самое,

$$x(t)=q_1(t)\exp\left(\int_0^t\lambda(z)dz\right)\int_{-\infty}^t\exp\left(-\int_0^\tau\lambda(z)dz\right)p_1^*(\tau)f(\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{i=1}^{r}\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{s_i-1}I_{s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right]-\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\tilde s_i-1}\left(I_{\tilde s_i}^T\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{\hat r}\hat\Phi_i(t)\sum_{j=0}^{\hat s_i-1}I_{\hat s_i}^j\frac{d^j}{dt^j}\left[\tilde\Psi_i^*(t)f(t)\right]+\sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{j=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^j}{dt^j}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-j+1)}(t)+\sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t). \qquad (43)$$

Если $P_1=1,\ P_2=1$, то $U=U^-=1,\ \varkappa=0,\ F=G=0$, условие (25) выполняется, система (1) имеет принадлежащие $BC^\infty(R)$ решения (26), (27), совпадающие с (43).

Пример. Пусть в (1) $m = n = 2$,

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t) \in BC^{\infty}(R)$, $i, j = 1, 2$, $f_i(t) \in BC^{\infty}(R)$, $i = 1, 2$, — действительные скалярные функции. Рассмотрим следующие случаи [2, 3]:

1) $a_{22}(t) \neq 0 \ \forall t \in R$,

$$\varliminf_{t \to -\infty} \left|a_{22}(t)\right| > 0, \qquad \varliminf_{t \to \infty} \left|a_{22}(t)\right| > 0.$$

Имеем $r = 1,\ s_1 = 1,\ \breve{r} = \check{r} = \tilde{r} = \hat{r} = 0,\ \alpha = 1$,

$$\varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$\lambda(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t),$$

условия (22), (23) отсутствуют.

Если $\lambda(t) < 0$ при $t \to -\infty$ и $\lambda(t) < 0$ при $t \to \infty$, то система (1) имеет единственное принадлежащее $BC^{\infty}(R)$ решение (43):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_0^t \lambda(z)dz\right) \int_{-\infty}^t \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(z)dz\right) \times$$
$$\times \big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Если $\lambda(t) < 0$ при $t \to -\infty$ и $\lambda(t) > 0$ при $t \to \infty$, то условие (42) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(z)dz\right)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau = 0.$$

При его выполнении система (1) имеет единственное принадлежащее $BC^{\infty}(R)$ решение (43), совпадающее с (44), или, что то же самое, (40):

$$x(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_0^t \lambda(z)dz\right) \int_t^{\infty} \exp\left(-\int_0^\tau \lambda(z)dz\right) \times$$
$$\times \big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Если $\lambda(t) > 0$ при $t \to -\infty$ и $\lambda(t) < 0$ при $t \to \infty$, то система (1) имеет конечномерное пространство принадлежащих $BC^\infty(R)$ решений (41) размерности 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t \lambda(z)dz\right) \times$$

$$\times \left[c_1 + \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_0^\tau \lambda(z)dz\right)\big(f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\big)d\tau\right] - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Если $\lambda(t) > 0$ при $t \to -\infty$ и $\lambda(t) > 0$ при $t \to \infty$, то система (1) имеет единственное принадлежащее $BC^\infty(R)$ решение (40), совпадающее с (45).

2) $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \neq 0,\ a_{21}(t) \neq 0\ \forall t \in R$,

$$\varliminf_{t\to-\infty} \big|a_{12}(t)\big| > 0, \qquad \varliminf_{t\to\infty} \big|a_{12}(t)\big| > 0, \qquad \varliminf_{t\to-\infty} \big|a_{21}(t)\big| > 0, \qquad \varliminf_{t\to\infty} \big|a_{21}(t)\big| > 0.$$

Имеем $r = 1,\ s_1 = 2,\ \check{r} = \check{r} = \tilde{r} = \hat{r} = 0,\ \alpha = 0$,

$$\varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \qquad \psi_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

условия (22), (23), (25) отсутствуют, система (1) имеет единственное принадлежащее $BC^\infty(R)$ решение (26):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\left[a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt}\left(a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\right)\right] \end{bmatrix}.$$

3) $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \neq 0,\ a_{21}(t) \equiv 0\ \forall t\ R$,

$$\varliminf_{t\to-\infty} \big|a_{12}(t)\big| > 0, \qquad \varliminf_{t\to\infty} \big|a_{12}(t)\big| > 0.$$

Имеем $\tilde{r} = 1,\ \tilde{s}_1 = 1,\ \check{r} = 1,\ \check{r} = r = \hat{r} = 0,\ \alpha = 0$,

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

условия (22), (25) отсутствуют, условие (23) имеет вид $f_2(t) \equiv 0.$ При его выполнении система (1) имеет бесконечномерное пространство принадлежащих $BC^{\infty}(R)$ решений (26):

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\beta}_1(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\beta}_1(t)\dfrac{d}{dt}a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\beta}_1(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \dfrac{d}{dt}\tilde{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

4) $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \equiv 0,\ a_{21}(t) \neq 0\ \forall t \in R,$

$$\varliminf_{t\to-\infty} \big|a_{21}(t)\big| > 0, \qquad \varliminf_{t\to\infty} \big|a_{21}(t)\big| > 0.$$

Имеем $\breve{r} = 1,\ \hat{r} = 1,\ \hat{s}_1 = 1,\ \tilde{r} = r = \check{r} = 0,\ \alpha = 0,$

$$\breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\psi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}a_{21}(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

условия (23), (25) отсутствуют, условие (22) имеет вид

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\frac{d}{dt}a_{21}(t) + \frac{d}{dt}f_2(t) \equiv 0.$$

Отсюда

$$f_1(t) = a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) + a_{21}^{-2}(t)f_2(t)\frac{d}{dt}a_{21}(t) - a_{21}^{-1}(t)\frac{d}{dt}f_2(t).$$

При его выполнении система (1) имеет бесконечномерное пространство принадлежащих $BC^{\infty}(R)$ решений (26):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

5) $a_{22}(t) \equiv 0,\ a_{12}(t) \equiv 0,\ a_{21}(t) \equiv 0\ \forall t \in R.$

Имеем $\breve{r} = 1,\ \check{r} = 1,\ \tilde{r} = r = \hat{r} = 0,\ \alpha = 1,$

$$\breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda(t) = a_{11}(t),$$

условие (22) отсутствует, условие (23) имеет вид

$$f_2(t) \equiv 0.$$

Далее будем предполагать, что оно выполняется.

Если $a_{11}(t) < 0$ при $t \to -\infty$ и $a_{11}(t) < 0$ при $t \to \infty$, то система (1) имеет бесконечномерное пространство принадлежащих $BC^\infty(R)$ решений (43):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)dz\right) \int\limits_{-\infty}^t \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)dz\right) f_1(\tau)d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Если $a_{11}(t) < 0$ при $t \to -\infty$ и $a_{11}(t) > 0$ при $t \to \infty$, то условие (42) имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)dz\right) f_1(\tau)d\tau = 0.$$

При его выполнении система (1) имеет бесконечномерное пространство принадлежащих $BC^\infty(R)$ решений (43), совпадающих с (46), или, что то же самое, (40):

$$x(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)dz\right) \int\limits_t^{\infty} \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)dz\right) f_1(\tau)d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Если $a_{11}(t) > 0$ при $t \to -\infty$ и $a_{11}(t) < 0$ при $t \to \infty$, то система (1) имеет бесконечномерное пространство принадлежащих $BC^\infty(R)$ решений (41):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left(\int\limits_0^t a_{11}(z)dz\right) \left[c_1 + \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_0^\tau a_{11}(z)dz\right) f_1(\tau)d\tau\right] + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Если $a_{11}(t) > 0$ при $t \to -\infty$ и $a_{11}(t) > 0$ при $t \to \infty$, то система (1) имеет бесконечномерное пространство принадлежащих $BC^\infty(R)$ решений (40), совпадающих с (47).

Литература

1. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
2. М. А. Елишевич, *Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование*, Журн. обчислюв. та прикл. математики, № 2 (108), 119 – 134 (2012).
3. М. А. Елишевич, *Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелінійні коливання, **16**, № 2, 173 – 190 (2013).
4. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin (2016).
5. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
6. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Физматлит, Москва (2007).
7. В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Наука, Новосибирск (2003).
8. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
9. Y. Sibuya, *Some global properties of matrixes of functions of one variable*, Math. Anal., **161**, № 1, 67 – 77 (1965).
10. W. Wasow, *On holomorphically similar matrices J*, Math. Anal. and Appl., № 4, 202 – 206 (1962).

Получено 04.09.19