DOI: 10.37863/umzh.v72i6.1068

УДК 512.552.7

**Ж. Балог** (Ун-т Об'єднаних Арабських Еміратів, Аль-Айн),
**В. Лавер** (Ужгород. нац. ун-т)

# УНІТАРНІ ПІДГРУПИ КОМУТАТИВНИХ ГРУПОВИХ АЛГЕБР ХАРАКТЕРИСТИКИ 2*

Let $FG$ be the group algebra of a finite 2-group $G$ over a finite field $F$ of characteristic two and let $\circledast$ be an involution that arises from $G$. The $\circledast$-unitary subgroup of $FG$ denoted by $V_{\circledast}(FG)$ is defined as the set of all normalized units $u$ satisfying the property $u^{\circledast} = u^{-1}$. In this paper, we find the order of $V_{\circledast}(FG)$ for all involutions $\circledast$ that arise from $G$, where $G$ is a finite cyclic 2-group, and show that all $\circledast$-unitary subgroups of $FG$ are not isomorphic.

Нехай $FG$ — групова алгебра скінченної 2-групи $G$ над скінченним полем $F$ характеристики 2 і $\circledast$ — інволюція, що виникає із групи $G$. $\circledast$-Унітарна підгрупа $FG$, яка позначається $V_{\circledast}(FG)$, визначається як множина всіх нормалізованих одиниць $u$, які задовольняють властивість $u^{\circledast} = u^{-1}$. У даній статті знайдено порядок $V_{\circledast}(FG)$ для всіх інволюцій $\circledast$, які виникають із $G$, де $G$ — скінченна циклічна 2-група, і показано, що всі $\circledast$-унітарні підгрупи $FG$ неізоморфні.

**1. Вступ.** Нехай $FG$ — групова алгебра 2-групи $G$ над скінченним полем $F$ характеристики 2. Множина всіх одиниць $FG$, які за допомогою поповнюючого відображення відображаються в 1, формує групу. Ця група (позначається $V(FG)$) називається групою нормалізованих одиниць. Опис структури $V(FG)$ є центральною проблемою теорії групових алгебр, і вона досліджувалась у багатьох роботах. Огляд груп одиниць модулярних групових алгебр наведено у [3].

Нехай $\circledast$ — інволюція на $FG$. Елемент $u \in V(FG)$ називається $\circledast$-унітарним, якщо $u^{\circledast} = u^{-1}$. Множина всіх $\circledast$-унітарних елементів $V(FG)$ формує підгрупу $V(FG)$, яка позначається $V_{\circledast}(FG)$. Унітарна підгрупа, що відноситься до канонічної інволюції ($F$ — лінійне розширення інволюції на $G$, яке кожному елементу $G$ ставить у відповідність обернений елемент), відіграє важливу роль у дослідженні структури груп одиниць групових алгебр [7, 9, 10, 19, 20, 22].

Знаходження порядку $V_*(FG)$ є особливо складною задачею, якщо характеристика $F$ дорівнює двом. Це питання досліджувалось у кількох статтях. А. Бовді і А. Сакач у [8, 9] визначили структуру $*$-унітарних підгруп усіх абелевих $p$-груп і скінченних полів характеристики $p$. У [13] В. Бовді та А. Н. Грішков визначили інваріанти $\eta$-унітарних і симетричних нормалізованих одиниць $FG$, де $F$ — скінченне поле з двох елементів, $G$ — скінченна абелева 2-група і $\eta$ — інволютивна інволюція.

Відомі тільки окремі результати для випадку, коли група $G$ не є абелевою. В статті [11] визначено порядок $V_*(FG)$ для діедральної групи, групи кватерніонів та екстраспеціальних 2-груп, якщо $F$ — скінченне поле характеристики 2. Структуру $V_*(FG)$ для випадку, коли $F$ — поле із двох елементів і $G$ є групою порядку 16 або групою максимального класу, було знайдено у [4, 5] відповідно. У статті [10] описано всі групові алгебри, $*$-унітарні підгрупи яких є нормальними у $V(FG)$. Структури $V_*(FQ_8)$ та $V_*(FD_8)$ було знайдено у [14, 15], де $Q_8$ — група кватерніонів, $D_8$ — діедральна група порядку 8 і $F$ — скінченне поле характеристики 2.

* Виконано за підтримки UAEU Research Start-up Grant No. G00002968.

Для немодулярного випадку кількість результатів є обмеженою. У [21] було визначено порядок $V_*(F_{2^k}D_{2N})$, де $D_{2N}$ — діедральна група порядку $2N$.

А. Бовді і А. Сакач також визначили порядок $\circledast$-унітарних підгруп для випадку, коли характеристика поля $F$ непарна і $\circledast$ виникає з абелевої $p$-групи $G$ у [6]. Окрім того, у [12] було досліджено структуру унітарних підгруп для різних інволюцій, де $G$ — діедральна група. У [2] структуру $V_{\circledast}(FG)$ було описано для всіх неабелевих груп $G$ порядку 8, де $\circledast$ виникає із $G$.

У даній статті ми знаходимо порядок $V_{\circledast}(FG)$, де $\circledast$ — інволюція, що виникає зі скінченної циклічної 2-групи $G$. За допомогою отриманих результатів доведено таку теорему.

**Теорема 1.** *Нехай $F$ — скінченне поле характеристики 2. Тоді $\circledast$-унітарні підгрупи $FC_{2^n}$, $n > 2$, де $\circledast$ виникає з $C_{2^n}$, не є ізоморфними.*

**2. $\circledast$-Унітарні підгрупи $FC_{2^n}$.** Нехай $G$ — скінченна 2-група. Позначимо через $G[2^i]$ підгрупу $G$, генеровану елементами порядку $2^i$. Ми використовуємо позначення $G^{2^i}$ для підгрупи $\langle g^{2^i} \mid g \in G\rangle$. У даній статті $|S|$ позначає порядок скінченної множини $S$, $|g|$ — порядок $g \in G$, $C_n$ — циклічну групу порядку $n$ і $\operatorname{Aut} G$ — групу автоморфізмів групи $G$. Також далі у статті ми розглядаємо $F$, як скінченне поле характеристики 2, і там, де це потрібно, ми вказуємо порядок поля у нижньому індексі (тобто $F_{2^n}$ — поле із $2^n$ елементів).

Для подальшого викладу нам потрібні дві леми.

**Лема 1** ([8], теорема 2)**.** *Нехай $G$ — скінченна абелева 2-група і $F$ — скінченне поле характеристики 2. Тоді*

$$|V_*(FG)| = |G^2[2]||F|^{\frac{1}{2}(|G|+|G[2]|)-1}.$$

**Лема 2** ([16], твердження 16)**.** $\operatorname{Aut} C_n \cong (\mathbb{Z}_n)^\times$.

З леми 2 і теореми 2 [18, с. 43] отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** $\operatorname{Aut} C_{2^n} \cong C_{2^{n-2}} \times C_2$, $n > 2$.

У подальшому ми вважатимемо $n$ більшим, ніж 2.

Отже, елементи порядку 2 у $\operatorname{Aut} C_{2^n}$ формують підгрупу, яка є ізоморфною 4-групі Клейна. Нехай $\sigma_1$ — одиничний автоморфізм і

$$\sigma_2 : a \mapsto a^{-1}, \qquad \sigma_3 : a \mapsto a^{2^{n-1}-1}, \qquad \sigma_4 : a \mapsto a^{2^{n-1}+1}.$$

Інволюція $\sigma_2$ є канонічною інволюцією $FG$. Згідно з лемою 1 маємо $|V_*(FC_{2^n})| = 2|F|^{\frac{|C_{2^n}|}{2}}$.

Позначимо через $\circledast$ лінійне розширення інволюції $\circledast$ групи $G$ на $FG$, а через $G_{\circledast} = \{g \in G \mid g = g^{\circledast}\}$ множину $\circledast$-симетричних елементів $G$. Кожний $\circledast$-симетричний елемент $FG$ (тобто такий, що $x = x^{\circledast}$) можна записати у вигляді

$$\sum_{g \in G_{\circledast}} \alpha_g g + \sum_{g \notin G_{\circledast}} \beta_g (g + g^{\circledast}).$$

Щоб уникнути непорозумінь, далі там, де це потрібно, будемо уточнювати інволюцію, використовуючи позначення $\sigma_i$, $i \in \{3, 4\}$, замість $\circledast$.

Для того щоб навести формулу для порядку унітарної підгрупи для інволюції $\sigma_3$, нам потрібні деякі додаткові викладки.

Нехай $H$ — нормальна підгрупа $G$ і $I(H)$ — ідеал $FG$, генерований множиною $\{(1 + h) \mid h \in H\}$. $I(H)$ можна розглядати як $F$-модуль із базисними елементами $u(1 + h)$, де

$u \in R(G/H)$ і $h \neq 1$. Як висновок, маємо $|I(H)| = F^{\frac{|C_{2^n}|}{2}}$. Відомо, що $FG/I(H) \cong F(G/H)$, і ми позначатимемо через $\Psi$ відповідний природний гомоморфізм. Позначимо $\overline{G} = G/H$ і через $V_{\sigma_3}(F\overline{G})$ унітарну підгрупу фактор-алгебри $FG/I(H)$, де $\overline{x}^{\sigma_3}$ — індукована дія інволюції $\sigma_3$ на $\overline{x} \in FG/I(H)$. Очевидно, що множина

$$N_\Psi^{\sigma_3} = \{x \in V(FG) \mid \Psi(x) \in V_{\sigma_3}(F\overline{G})\}$$

утворює підгрупу в $V(FG)$. Більше того, множина $I(H)^+ = \{1 + x \mid x \in I(H)\}$ утворює нормальну підгрупу в $V(FG)$. Визначимо $S_H$ як групу, генеровану елементами $\{xx^{\sigma_3} \mid x \in \in N_\Psi^{\sigma_3}\}$. З огляду на те, що $xx^{\sigma_3} \in 1 + \ker(\Psi) = I(H)^+$, приходимо до висновку, що $S_H$ є підгрупою $I(H)^+$.

**Лема 3.** *Нехай $F$ — скінченне поле характеристики 2. Тоді порядок $V_{\sigma_3}(FC_{2^n})$ дорівнює $|F|^{2^{n-1}}$.*

***Доведення.*** Нехай $H = G_{\sigma_3} = \langle a^{2^{n-1}} \rangle$. Позначимо через $\widehat{H}$ суму всіх елементів $H$. Очевидно, що $xx^{\sigma_3} \in I(H)^+$ для всіх $x \in N_\Psi^{\sigma_3}$. Отже,

$$xx^{\sigma_3} = \sum_{g \in G_{\sigma_3}} \delta_g g + \sum_{g \notin G_{\sigma_3}} \alpha_g (g + g^{\sigma_3})\widehat{H} + \beta a^{2^{n-2}} \widehat{H} \tag{1}$$

для деяких $\alpha_g, \beta, \delta_g \in F$.

Доведемо, що $S_H$ генерується елементами $a^{2^{n-1}}$, $1 + \beta a^{2^{n-2}}\widehat{H}$ і $1 + \alpha_i\big(a^i + a^{2^{n-1}-i}\big)\widehat{H}$, де $i \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$.

Нехай $x_i = 1 + \alpha_i(a^i + a^{2^{n-1}+i})$. Тоді

$$x_i x_i^{\sigma_3} = \big(1 + \alpha_i a^i + \alpha_i a^{2^{n-1}+i}\big)\big(1 + \alpha_i a^{2^{n-1}-i} + \alpha_i a^{-i}\big) =$$
$$= 1 + \alpha_i\big(a^i + a^{2^{n-1}-i} + a^{2^{n-1}+i} + a^{-i}\big) = 1 + \alpha_i\big(a^i + a^{2^{n-1}-i}\big)\widehat{H}.$$

Оскільки $x_i x_i^{\sigma_3}$ належить до $I(H)^+$, а $x_i$ — до $N_\Psi^{\sigma_3}$, то $1 + \alpha_i\big(a^i + a^{2^{n-1}-i}\big)\widehat{H}$ належить $S_H$ для всіх $\alpha_i \in F$.

Очевидно, $y = 1 + \gamma\big(a^{2^{n-3}} + a^{-2^{n-3}}\big) \neq 1$ є $\sigma_3$-симетричним елементом, якщо $n > 3$, і $y = 1 + \gamma(a + a^3)$ також є $\sigma_3$-симетричним елементом, якщо $n = 3$. Можна за допомогою обчислень показати, що

$$yy^{\sigma_3} = y^2 = 1 + \gamma^2\big(a^{2^{n-2}} + a^{-2^{n-2}}\big) = 1 + \gamma^2 a^{2^{n-2}}\widehat{H}.$$

Загальновідомо, що група одиниць $F$, яка позначається через $U(F)$, є циклічною групою непарного порядку. Отже, $\eta(\alpha) = \alpha^2$ є антиавтоморфізмом $U(F)$, і ми можемо вибрати таке $\gamma \in F$, що $\gamma^2 = \beta$. Отже, $1 + \beta a^{2^{n-2}}\widehat{H}$ також належить $S_H$.

Легко бачити, що $a^{2^{n-1}}$ належить $S_H$. Дійсно, $a \cdot a^{\sigma_3} = a^{2^{n-1}}$.

Тепер покажемо, що $\gamma a^{2^{n-1}}$ не належить $S_H$ для всіх $\gamma \neq 1$. Кожен елемент $FG$ може бути записаний у вигляді $x_1 + x_2 a$, де $x_1, x_2 \in FC_{2^n}^2$. Шляхом нескладних обчислень отримуємо

$$(x_1 + x_2 a)(x_1 + x_2 a)^{\sigma_3} = x_1 x_1^* + x_2 x_2^* a^{2^{n-1}} + \big(x_1^* x_2 + x_1 x_2^* a^{2^{n-1}}\big)a,$$

де $*$ є канонічною інволюцією $FG$. Згідно з лемою 3 [1] $a^{2^{n-1}}$ не належить носієві $zz^*$ для всіх $z \in FG$ і слід $zz^*$ дорівнює поповнюючому відображенню $z$, тобто $x_1 x_1^* + x_2 x_2^* a^{2^{n-1}} = \gamma a^{2^{n-1}}$ тоді і тільки тоді, коли $\gamma = 1$.

Легко перевірити, що

$$\big(1+\alpha_i\big(a^i+a^{2^{n-1}-i}\big)\widehat{H}\big)\big(1+\beta_j(a^j+a^{2^{n-1}-j})\widehat{H}\big)=$$
$$=1+\big(\alpha_i\big(a^i+a^{2^{n-1}-i}\big)+\beta_j\big(a^{2^{n-1}+j}+a^{-j}\big)\big)\widehat{H}$$

і

$$\big(1+\alpha_i\big(a^i+a^{2^{n-1}-i}\big)\widehat{H}\big)\big(1+\beta a^{2^{n-2}}\widehat{H}\big)=$$
$$=1+\big(\alpha_i\big(a^i+a^{2^{n-1}-i}\big)+\beta a^{2^{n-2}}\big)\widehat{H}.$$

З того, що $S_H$ є елементарною абелевою групою, випливає, що $|S_H|=2|F|^{2^{n-2}}$.

На підставі того, що $|I(H)^+|=|I(H)|$, і теореми про гомоморфізми маємо

$$|V_{\sigma_3}(FC_{2^n})|=\frac{|I(H)||V_*(F\overline{G})|}{|S_H|}=|F|^{\frac{|C_{2^n}|}{2}}\frac{|V_*(F\overline{G})|}{|S_H|}.$$

Використовуючи лему 1, отримуємо

$$|V_{\sigma_3}(FC_{2^n})|=\frac{|F|^{2^{n-1}}\cdot 2|F|^{2^{n-2}}}{2|F|^{2^{n-2}}}=|F|^{2^{n-1}},$$

що і доводить лему.

Розглянемо випадок, коли $\circledast=\sigma_4$. Зауважимо, що індекси всіх коефіцієнтів у твердженні та доведенні наступної леми розглядаються як елементи $F_{2^n}$.

**Лема 4.** *Нехай $F$ — скінченне поле характеристики 2 і $x=\sum_{i=0}^{2^n-1}\alpha_i a^i,\ x\in V(FC_{2^n})$. Тоді*

$$xx^{\sigma_4}=\sum_{i=0}^{2^{n-2}-1}(\alpha_{2i}+\alpha_{2i+2^{n-1}})^2a^{4i}+$$
$$+\sum_{i=0}^{2^{n-2}-1}(\alpha_{2(i+2^{n-3})+1}+\alpha_{2(i+2^{n-3})+1+2^{n-1}})^2a^{4i+2}+$$
$$+\sum_{j=0}^{2^{n-2}-1}\sum_{i=0}^{2^{n-2}-1}(\alpha_{2i}+\alpha_{2i+2^{n-1}})(\alpha_{2j+1-2i+2^{n-1}}+\alpha_{2j+1-2i})\big(a^{2j+1}+a^{2j+1+2^{n-1}}\big).$$

***Доведення.*** Очевидно, що $x^{\sigma_4}=\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\alpha_{2i}a^{2i}+\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\alpha_{2i+1+2^{n-1}}a^{2i+1}$. Отже, коефіцієнт при $a^l$ у $xx^{\sigma_4}$, де $l\in\{1,3,\ldots,2^n-1\}$, дорівнює

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\alpha_{2i}\alpha_{l-2i+2^{n-1}}+\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\alpha_{2i+1}\alpha_{l-2i-1}.$$

Оскільки $l-2i-1$ — парне число, ми можемо перегрупувати другий доданок:

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1}\alpha_{2i+1}\alpha_{l-2i-1}=\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\alpha_{l-2k}\alpha_{2k},$$

де $2k=l-(2i+1)$. Отже,

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i}\alpha_{l-2i+2^{n-1}} + \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i+1}\alpha_{l-2i-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2k}(\alpha_{l-2k+2^{n-1}} + \alpha_{l-2k}).$$

Розглянемо коефіцієнт $\alpha_{2k+2^{n-1}} = \alpha_{2(k+2^{n-2})}$ для деякого $k$. Маємо

$$\alpha_{l-2(k+2^{n-2})+2^{n-1}} + \alpha_{l-2(k+2^{n-2})} = \alpha_{l-2k} + \alpha_{l-2k+2^{n-1}}.$$

З цього можемо зробити висновок, що коефіцієнти при $a^l$ і $a^{l+2^{n-1}}$ є рівними. Отже,

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2k}(\alpha_{l-2k+2^{n-1}} + \alpha_{l-2k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{n-2}-1} (\alpha_{2k} + \alpha_{2k+2^{n-1}})(\alpha_{l-2k+2^{n-1}} + \alpha_{l-2k}).$$

Розглянемо випадок, коли $l$ є парним. Тоді коефіцієнт при $a^l$ у $xx^{\sigma_4}$ дорівнює

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i}\alpha_{l-2i} + \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i+1}\alpha_{l-2i-1+2^{n-1}}. \tag{2}$$

Припустимо, що $l \equiv 4t \pmod{2^n}$ для деякого $t \in \{0, \ldots, 2^{n-2}\}$. Розглянемо першу суму в (2). Нехай $2i \equiv l - 2i \pmod{2^n}$. Тоді, якщо $l \equiv 4t \pmod{2^n}$, отримуємо $4i \equiv 4t \pmod{2^n}$ або $2i \equiv 2t \pmod{2^{n-1}}$. Отже, якщо $2i \equiv 2t \pmod{2^{n-1}}$, то $\alpha_{2i}\alpha_{l-2i}$ дорівнює або $\alpha_{2t}^2$, або $\alpha_{2t+2^{n-1}}^2$. Припустимо, що $2i \not\equiv l - 2i \pmod{2^n}$. Розглянемо $s \in \{0, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ таке, що $2s \equiv l - 2i \pmod{2^n}$. Тоді $l - 2s \equiv l - (l - 2i) \equiv 2i \pmod{2^n}$, тобто кожен доданок з'являється двічі, тож

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i}\alpha_{l-2i} = \alpha_{2t}^2 + \alpha_{2t+2^{n-1}}^2 = (\alpha_{2t} + \alpha_{2t+2^{n-1}})^2.$$

Розглянемо другу суму в (2). Припустимо, що існує $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ таке, що $2i + 1 \equiv$ $\equiv l - (2i+1) + 2^{n-1} \pmod{2^n}$. Беручи до уваги те, що $l \equiv 4t \pmod{2^n}$, маємо $2(2i+1) \equiv$ $\equiv 4t + 2^{n-1} \pmod{2^n}$. Отже, $2i + 1 \equiv 2t + 2^{n-2} \pmod{2^{n-1}}$, що є суперечністю. Це означає, що $2i + 1 \not\equiv l - (2i+1) + 2^{n-1} \pmod{2^n}$ для всіх $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.

Розглянемо $s \in \{0, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ таке, що $2s + 1 \equiv l - (2i+1) + 2^{n-1} \pmod{2^n}$. Тоді

$$l - (2s+1) + 2^{n-1} \equiv l - (l - (2i+1) + 2^{n-1}) + 2^{n-1} \equiv 2i + 1.$$

Отже, кожен доданок вигляду $\alpha_{2i+1}\alpha_{l-2i-1+2^{n-1}}$ з'являється двічі, тож ми робимо висновок, що

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i+1}\alpha_{j-2i-1+2^{n-1}} = 0.$$

Припустимо, що $l \equiv 4t+2 \pmod{2^n}$. Тоді з допомогою аналогічних міркувань отримуємо $\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i+1}\alpha_{l-2i-1+2^{n-1}} = \alpha^2_{2(t+2^{n-3})+1} + \alpha^2_{2(t+2^{n-3})+1+2^{n-1}}$ і $\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \alpha_{2i}\alpha_{l-2i} = 0$.

Підсумовуючи коефіцієнти для всіх $a^l$, $l \in \{0, \ldots, 2^n-1\}$, завершуємо доведення леми.

***Наслідок* 2.** *Нехай $F$ — скінченне поле характеристики 2 і $x = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i a^i \in V(FC_{2^n})$. Тоді*

$$xx^{\sigma_4} = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \beta_{2i}a^{2i} + \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \beta_{2i+1}a^{2i+1}$$

*і $\beta_{2i+1} = f_i(\beta_0, \beta_2, \ldots, \beta_{2^n-2})$ для деяких функцій $f_i$, де $0 \le i < 2^{n-1}$. Більш того, $\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \beta_{2i+1} = 0$.*

***Доведення.*** Беручи до уваги лему 4 і те, що $\eta(\delta) = \delta^2$ є автоморфізмом на $F$, робимо висновок, що коефіцієнт $\beta_k$ залежить лише від коефіцієнтів $\beta_0, \beta_2, \ldots, \beta_{2^n-2}$ для кожного непарного $k$.

Згідно з лемою 4, коефіцієнти при $a^{2j+1}$ і $a^{2j+1+2^{n-1}}$ збігаються для всіх $0 \le j < 2^{n-1}$, тож $\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \beta_{2i+1} = 0$.

**Лема 5.** *Нехай $F$ — скінченне поле характеристики 2. Тоді $V_{\sigma_4}(FC_{2^n})$ є елементарною абелевою групою порядку $|F|^{2^{n-1}}$.*

***Доведення.*** Відображення $\varphi(x) = xx^{\sigma_4}$ є гомоморфізмом на $V(FG)$. Позначимо через $S_{\sigma_4}$ образ цього гомоморфізму. Ядро $\varphi(x)$ збігається з унітарною підгрупою $V_{\sigma_4}(FG)$. Отже,

$$V(FG)/V_{\sigma_4}(FG) \cong S_{\sigma_4}.$$

Згідно з наслідком 2, кількість вільних коефіцієнтів у $xx^{\sigma_4}$ дорівнює $2^{n-1}-1$. Дійсно, $\beta_k$ не є незалежними змінними для непарних $k$, і оскільки $xx^{\sigma_4}$ — оборотний елемент, то $\sum_{i=0}^{2^n-1} \beta_i = 1$. Можна бачити, що $|S_{\sigma_4}| = |F|^{2^{n-1}-1}$. Отже,

$$|V_{\sigma_4}(FG)| = \frac{|V(FG)|}{|S_{\sigma_4}|} = \frac{|F|^{2^n-1}}{|F|^{2^{n-1}-1}} = |F|^{2^{n-1}}.$$

Покажемо, що $V_{\sigma_4}(FC_{2^n})$ є елементарною абелевою групою. Згідно з лемою 4, якщо $xx^{\sigma_4} = 1$, то $x$ є $\sigma_4$-симетричним елементом. Отже, $x^2 = 1$, що і доводить лему.

***Доведення теореми* 1.** Оскільки порядок $*$-унітарної підгрупи найбільший, вона не може бути ізоморфною до жодної $\circledast$-унітарної підгрупи.

Оскільки $(a^{2i})^{\sigma_3} = a^{-2i}$ і $(a^{2i+1})^{\sigma_3} = a^{2^{n-1}-2i-1}$, ми робимо висновок, що $V_{\sigma_3}(FC_{2^n}) \cap C_{2^n} = \langle a^2 \rangle$. Отже, експонента $V_{\sigma_3}(FC_{2^n})$ є не меншою ніж $2^{n-1}$. Беручи до уваги те, що $V_{\sigma_4}(FC_{2^n})$ є елементарною абелевою групою за лемою 5, робимо висновок, що унітарні підгрупи, утворені інволюціями $\sigma_3$ і $\sigma_4$, не є ізоморфними групами.

Зауважимо, що у загальному випадку, коли група $G$ є абелевою, теорема 1 не обов'язково має місце. Використовуючи GAP System [17], ми можемо переконатися, що деякі унітарні підгрупи $F(C_8 \times C_2)$, де $F$ — поле із двох елементів, є ізоморфними. В цьому випадку є шість автоморфізмів порядку $\le 2$:

$$\sigma_1 = \begin{cases} a & \mapsto a, \\ b & \mapsto b, \end{cases} \qquad \sigma_2 = \begin{cases} a & \mapsto a^3b, \\ b & \mapsto b, \end{cases} \qquad \sigma_3 = \begin{cases} a & \mapsto ab, \\ b & \mapsto b, \end{cases}$$

$$\sigma_4 = \begin{cases} a & \mapsto a, \\ b & \mapsto a^2 b, \end{cases} \qquad \sigma_5 = \begin{cases} a & \mapsto a^3, \\ b & \mapsto a^2 b, \end{cases} \qquad \sigma_6 = \begin{cases} a & \mapsto a^3, \\ b & \mapsto b. \end{cases}$$

Унітарні підгрупи, індуковані $\sigma_2$ і $\sigma_4$, є ізоморфними до 4-групи Клейна $C_2 \times C_2$.

## Література


1. Z. Balogh, A. Bovdi, *On units of group algebras of 2-groups of maximal class*, Commun. Algebra, **32**, № 8, 3227 – 3245 (2004).
2. Z. Balogh, L. Creedon, J. Gildea, *Involutions and unitary subgroups in group algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged), **79**, № 3-4, 391 – 400 (2013).
3. A. Bovdi, *The group of units of a group algebra of characteristic $p$*, Publ. Math. Debrecen, **52**, № 1-2, 193 – 244 (1998).
4. A. Bovdi, L. Erdei, *Unitary units in modular group algebras of groups of order 16*, Techn. Rep., Univ. Debrecen, L. Kossuth Univ., **4**, № 157, 1 – 16 (1996).
5. A. Bovdi, L. Erdei, *Unitary units in modular group algebras of 2-groups*, Commun. Algebra, **28**, № 2, 625 – 630 (2000).
6. A. Bovdi, A. Szakács, *Units of commutative group algebra with involution*, Publ. Math. Debrecen, **69**, № 3, 291 – 296 (2006).
7. A. A. Bovdi, *Unitarity of the multiplicative group of an integral group ring*, Mat. Sb. (N.S.), **119(161)**, № 3, 387 – 400 (1982).
8. A. A. Bovdi, A. A. Sakach, *The unitary subgroup of the multiplicative group of the modular group algebra of a nite Abelian $p$-group*, Mat. Zametki, **45**, № 6, 23 – 29 (1989).
9. A. A. Bovdi, A. Szakács, *A basis for the unitary subgroup of the group of units in a nite commutative group algebra*, Publ. Math. Debrecen, **46**, № 1-2, 97 – 120 (1995).
10. V. Bovdi, L. G. Kovács, *Unitary units in modular group algebras*, Manuscripta Math., **84**, № 1, 57 – 72 (1994).
11. V. Bovdi, A. L. Rosa, *On the order of the unitary subgroup of a modular group algebra*, Commun. Algebra, **28**, № 4, 1897 – 1905 (2000).
12. V. Bovdi, T. Rozgonyi, *Unitary units in modular group algebras*, Acta. Acad. Paed. Nyiregyháza, **84**, № 1, 57 – 72 (1994).
13. V. A. Bovdi, A. N. Grishkov, *Unitary and symmetric units of a commutative group algebra*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **62**, № 3, 641 – 654 (2019).
14. L. Creedon, J. Gildea, *Unitary units of the group algebra $F_{2^k}Q_s$*, Internat. J. Algebra and Comput., **19**, № 2, 283 – 286 (2009).
15. L. Creedon, J. Gildea, *The structure of the unit group of the group algebra $F_{2^k}Q_s$*, Canad. Math. Bull., **54**, № 2, 237 – 243 (2011).
16. D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract algebra*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ (2004).
17. The GAP Group, *GAP — Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.10.2 (2019).
18. K. Ireland, M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Grad. Texts Math., **84**, Springer-Verlag, New York (1990).
19. G. T. Lee, S. K. Sehgal, E. Spinelli, *Group rings whose unitary units are nilpotent*, J. Algebra, **410**, 343 – 354 (2014).
20. G. T. Lee, S. K. Sehgal, E. Spinelli, *Bounded Engel and solvable unitary units in group rings*, J. Algebra, **501**, 225 – 232 (2018).
21. N. Makhijani, R. Sharma, J. Srivastava, *On the order of unitary subgroup of the modular group algebra $F_{2^k}D_{2N}$*, J. Algebra and Appl., **14**, № 8, 1550129-1 – 1550129-10 (2015).
22. S. P. Novikov, *Algebraic construction and properties of Hermitian analogs of $K$-theory over rings with involution from the viewpoint of Hamiltonian formalism. Applications to di erential topology and the theory of characteristic classes*, I. II, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **34**, 253 – 288, 475 – 500 (1970).


Одержано 17.09.19