DOI: 10.37863/umzh.v72i7.1094

УДК 517.9

Ф. Ч. Зыонг (Ханой. пед. ин-т, Вьетнам)

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА

We present some results on the smoothness of the solution of the initial boundary-value problem for the parabolic system of partial differential equations

$$u_t - (-1)^m P(x,t,D_x)u = f(x,t) \quad \text{in} \quad \Omega_T := \Omega \times (0,T),$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \quad \text{on} \quad (\partial\Omega \backslash M) \times (0,T),$$

$$u(x,0) = 0,$$

in the domain Ω_T of dihedral type, where P is an elliptic operator with variable coefficients. The dependence of the regularity of solutions on the distribution of eigenvalues for the corresponding spectral problems is shown. The obtained results are useful for understanding the asymptotics of the weak solution near the singular edge of dihedral domains.

Наведено деякі результати щодо гладкості розв'язку початково-крайової задачі для параболічної системи рівнянь з частинними похідними

$$u_t - (-1)^m P(x,t,D_x)u = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T := \Omega \times (0,T),$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \quad \text{на} \quad (\partial\Omega \backslash M) \times (0,T),$$

$$u(x,0) = 0,$$

в області Ω_T діедрального типу, де P — еліптичний оператор із змінними коефіцієнтами. Показано залежність регулярності розв'язків від розподілу власних значень для відповідних спектральних задач. Отримані результати корисні для розуміння асимптотики слабкого розв'язку поблизу сингулярного краю діедральних областей.

1. Введение. Краевые задачи в негладких областях начали систематически рассматривать, начиная с работы В. А. Кондратьева [2], где изучались эллиптические уравнения в конической и угловой областях, а также регулярность и асимптотическое представление решения около конической точки. Для краевых эллиптических задач в областях с более общими особенностями (типа ребра или острого выступа) имеются известные результаты В. Г. Мазьи и Б. А. Пламеневского [4], В. Г. Мазьи и Дж. Россмана [5]. В этих исследованиях авторы показали связь между спектральными свойствами операторного пучка, связанного с краевыми задачами в различных областях с особенностями, и корректностью постановки краевой задачи.

Нестационарные задачи в конических областях были рассмотрены М. Х. Нгуен [6] с целью получения разрешимости и асимптотики обобщенного решения вблизи конических точек для гиперболических систем. В данной статье мы будем изучать начально-краевую задачу для сильно параболической системы в цилиндре с диэдром в качестве основания. При этом мы используем результаты о разрешимости и единственности, а также результаты относительно дифференцируемости по временной переменной, полученные в [7, 8], для доказательства регулярности обобщенного решения относительно как пространственных x, так и временных переменных. Мы также приводим *априорную* оценку в весовых пространствах Соболева для частного случая системы уравнений в частных производных второго порядка.

Опишем кратко строение статьи. В пункте 2 приведены обозначения, используемые в дальнейшем. Пункт 3 содержит постановку основной задачи. В пункте 4 изложены некоторые основные факты для эллиптических уравнений в диэдральных областях. И, наконец, в пункте 5 изучается регулярность обобщенного решения в случае параболических систем.

2. Необходимые обозначения. Будем следовать обозначениям, используемым в [4]. Под диэдром подразумеваем произведение

$$D = K \times \mathbb{R}^{n-2},$$

где K — угол, определенный в полярных координатах как

$$K = \big\{y = (y_1, y_2) \big| |\omega| < \alpha/2\big\}, \qquad \omega = \arctan\frac{y_2}{y_1}.$$

Стороны K обозначаются так: $\gamma^{\pm} := \{y \colon 2\omega = \pm\alpha\}$. Граница D теперь состоит из двух полуподпространств Γ_+ и Γ_-, где $\Gamma^{\pm} = \gamma^{\pm} \times \mathbb{R}^{n-2}$, а также из ребра $M := \{x = (y, z), y = = 0, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Для $x = (y_1, y_2, z) \in D$ обозначим через $\overline{x} = (0, 0, z)$ ближайшую к x точку на M.

В случае $n = 3$ мы принимаем следующие обозначения. $\mathbb{D}$ будет диэдром

$$\mathbb{D} = \big\{x = (x', x_3) \colon x' \in \mathbb{K},\ \ x_3 \in \mathbb{R}\big\},$$

где $\mathbb{K}$ — бесконечный угол, определенный как

$$\mathbb{K} = \big\{x' = (x_1, x_2) \in R^2 \colon 0 < r < \infty,\ \ 0 < \varphi < \theta\big\}$$

в полярных координатах (r, φ). При этом мы сохраняем предыдущие обозначения для границы $\mathbb{D}$. Граница $\mathbb{D}$ состоит из двух полуплоскостей Γ_+ и Γ_-, а также из ребра M.

Мы также будем иметь дело с ограниченными областями. Пусть G — компактное замыкание открытого подмножества $\mathcal{G}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, которое ограничено $(n-1)$-мерным многообразием ∂G. Пусть M — замкнутое подмножество ∂G, которое является гладким (C^∞) $(n-2)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$, и $\partial G \backslash M$ также является кусочно-гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, предположим, что в окрестности каждой точки на M множество G диффеоморфно n-мерному диэдру. Предположим, что $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ — компоненты связности $\partial G \backslash M$.

Пусть Ω — одна из областей D, G или $\mathbb{D}$. Для $T > 0$ обозначим через Ω_T цилиндр $\Omega \times (0, T)$. Аналогичным образом определяется M_T. Отметим, что в общем случае наши диэдральные области могут выглядеть совсем иначе, чем обычное представление о трехмерных двугранных углах.

Будем рассматривать дифференциальный оператор $P(x, t, D_x)$ вида

$$P(x, t, D_x) = \sum_{|p|,|q|=1}^{m} D^p\big(a_{pq}(x, t) D^q\big) + \sum_{|p|=1}^{m} D^p a_p(x, t) + a(x, t),$$

где $a_{pq}(x, t)$, $a_p(x, t)$, $a(x, t)$ — $(s \times s)$-матрицы, элементы которых являются функциями переменных (x, t), принадлежащими $C^\infty(\Omega_T)$. Для выполнения условия самосопряженности предположим, что $a_{pq} = (-1)^{|p|+|q|} a^{\star}_{qp}$. Символ $a^{\star}_{qp}$ обозначает комплексно-сопряженную матрицу к $a^{\top}_{qp}$.

Оператор P является сильно эллиптическим в том смысле, что существует такая постоянная $C > 0$, что для всех вещественных векторов ξ в $\mathbb{R}^n$ и всех $\eta \in \mathbb{C}^s$ неравенство

$$\sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}\xi^p\xi^q\eta\overline{\eta} \geq C|\xi|^{2m}|\eta|^2$$

выполняется при всех $(x,t) \in \Omega_T$.

Будем использовать обозначения $H^m(\Omega), H^{m,k}(\Omega_T)$ для обычных L_2-пространств Соболева в соответствующих областях Ω и Ω_T. Индекс m связан с порядком производных по переменной x, а индекс k — максимальный порядок дифференцирования по t. В дальнейшем мы также будем использовать пространство $\overset{\circ}{H}{}^{m,k}(\Omega_T)$, являющееся пополнением функций из $C^\infty(\Omega_T)$ и равных 0 вблизи $\partial\Omega \times (0,T)$ относительно нормы в $H^{m,k}(\Omega_T)$.

Для областей с особенностями нам понадобится еще несколько пространств. Обозначим через $V^{k,\ell}_\beta(\Omega_T)$ пространство, состоящее из функций $u(x,t)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V^{k,\ell}_\beta(\Omega_T)} = \left(\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{k} r^{2(\beta-k+|\alpha|)}|D^\alpha_x u|^2 + \sum_{s=0}^{\ell}|D^s_t u|^2 dx\,dt\right)^{1/2}.$$

Нам также понадобится пространство $V^k_\beta(\Omega_T)$, которое состоит из функций $u(x,t)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V^k_\beta(\Omega_T)} = \left(\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|+s=0}^{k} r^{2(\beta-k+|\alpha|+s)}|D^\alpha_x D^s_t u|^2 dx\,dt\right)^{1/2}.$$

Для эллиптических задач мы также будем использовать пространство $V^k_\beta(\Omega)$, состоящее из функций $u = u(x,\cdot)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V^k_\beta(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{k} r^{2(\beta-k+|\alpha|)}|D^\alpha_x u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

В приведенных выше формулах $r = |x - \overline{x}| = |y|$ для областей типа D, $r = |x'|$ для $\mathbb{D}$ и $r = r(x) = \mathrm{dist}(x, M)$ для ограниченной области G.

Для угловой области K также введем весовое пространство $E^l_\beta(K)$ по аналогии с $V^k_\beta(\Omega)$. По определению $E^k_\beta(K)$ является пополнением к $C^\infty_0(\overline{K}\backslash O)$ относительно нормы

$$\|u\|_{E^k_\beta(K)} = \left(\int\limits_K |y|^{2\beta}\sum_{|\alpha|=0}^{l}(|y|^{2(|\alpha|-l)}+1)|D^\alpha_y u(y)|^2 dy\right)^{1/2}.$$

Пространство $E^{l-1/2}_\beta(\gamma^\pm)$ определяется как пространство следов функций из $E^l_\beta(K)$ на границах $\gamma^\pm$.

Для ограниченной области G мы можем ввести пространство с непостоянным весом β. Пусть $\beta = \beta(z)$ — гладкая вещественная функция на M, которая используется в качестве весовой функции. Пространство $V^l_\beta(G)$ определяется следующим образом. Будем говорить, что функция $u = u(x,t)$ с носителем около $M \times (0,T)$ принадлежит $V^l_\beta(G)$ тогда и только тогда, когда

$$\|u\|_{V^l_\beta(G)} = \left(\sum_{\alpha=0}^{l} \int\limits_0^T \int\limits_G r^{2(\beta(z)-l+|\alpha|)} |D^\alpha_x u|^2 dx\right)^{1/2} < \infty,$$

где z — ближайшая к x точка на M, $r = \operatorname{dist}(x, M)$ — расстояние от x до ребра M.

3. Формулировка основной задачи. Пусть Ω обозначает одну из областей G, D или $\mathbb{D}$. Исследуем следующую начально-краевую задачу в цилиндре $\Omega \times (0,T)$:

$$u_t - (-1)^m P(x, D_x)u = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T),$$
$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \quad \text{на} \quad (\partial\Omega \backslash M) \times (0,T), \tag{1}$$
$$u(x,0) = 0,$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к боковой поверхности $(\partial\Omega\backslash M) \times (0,T)$.

Решение $u(x,t)$ задачи (1) понимается в обобщенном смысле. Функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^{m,k}(\Omega_T)$ называется *слабым решением*, если u удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_T} \Bigg[- u_t\overline{\eta} + \sum_{|p|,|q|=1}^{m} (-1)^{m-1+|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \eta} +$$
$$+ \sum_{|p|=1}^{m} (-1)^{m-1} a_p D^p u \overline{\eta} + (-1)^{m-1} a u \overline{\eta}\Bigg] dxdt = \int\limits_{\Omega_T} f\overline{\eta} dxdt$$

для произвольной пробной функции $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^{m,k}(\Omega_T)$, удовлетворяющей условию $\eta(x,T) = 0$. Отметим, что для достаточно гладкого решения u приведенное выше определение исходит из формального интегрирования по частям. В общем случае обобщенное решение может быть недифференцируемым достаточное количество раз, как это требуется в формуле оператора P. Поэтому полезно рассматривать регулярность решений в слабом смысле.

В [7, 8] были получены следующие результаты о разрешимости этой задачи и в случае, когда интервал для переменной t является бесконечным полуинтервалом $[0, \infty)$. Хотя в этих исследованиях мы рассматривали конкретную задачу в коническом цилиндре (основание которого является конической областью), утверждения 1 и 2 также остаются в силе для произвольной области, поскольку мы рассматриваем только слабое решение со слабыми частными производными порядков не превышающих m. Мы приведем эти утверждения для случая, когда $T < \infty$.

Сначала сформулируем результат об единственности и существовании решения.

Утверждение 1 (об единственности и существовании обобщенного решения, см. [7])**.** *Предположим, что коэффициенты оператора P и правая часть f удовлетворяют следующим условиям*:

i) *величины* $|D_t a_{pq}|$, $|D_t a_p|$, $|a_{pq}|$, $|a_p|$, $|a|$ *ограничены при* $1 \le p,\ q \le m$;

ii) $f \in L_2(\Omega_T)$.

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1) *в* $\overset{\circ}{H}{}^{m,k}(\Omega_T)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{H^{m,1}(\Omega_T)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Это утверждение может быть доказано с помощью метода аппроксимации Галеркина. Аналогичным образом можно получить результат о дифференцируемости обобщенного решения по переменной t.

Утверждение 2 (о регулярности обобщенного решения по t, см. [8]**).** *Предположим, что*:

i) $|D_t^k a_{pq}|$, $|D_t^{k-1} a_p|$, $|D_t^{k-1} a|$ *ограничены при* $k \leq h+1$,

ii) $D_t^k f \in L_2(\Omega_T)$, $D_t^k f(x,0) = 0$ *при* $k \leq h$.

Тогда (*обобщенное*) *решение задачи* (1) *в* $\overset{\circ}{H}{}^{m,k}(\Omega_T)$ *имеет все слабые производные по* t *вплоть до порядка* h, *удовлетворяющие неравенству*

$$\|D_t^\ell u\|_{H^{m,1}(\Omega_T)} \leq C \sum_{k=0}^{h} \|D_t^k f\|_{L_2(\Omega_T)} \quad \forall \ell \leq h, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

При доказательстве этих утверждений мы по существу использовали неравенство типа Гординга: существуют такие константы $\lambda > 0, \mu \geq 0$, что для всех функций $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$

$$\int\limits_G \sum_{|p|=|q|=0}^{m} (-1)^{m+|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p u} dx \geq \lambda \|u\|^2_{H^m(\Omega)} - \mu \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

4. Регулярность решения в эллиптическом случае. Для задач в конических областях методом, предложенным В. А. Кондратьевым в [2], можно доказать, что решение задачи (1) будет принадлежать пространству $V_m^{2m,0}$, если оно получено из большего пространства $H^{m,1}$.

В диэдральной области аналогичный результат для эллиптических уравнений может быть получен с помощью методов покрытия диэдра семейством маленьких областей, которые конгруэнтны между собой.

Сначала напомним эллиптические результаты в диэдральном случае для неограниченной области D. Пусть $P(D_y, D_z)$ — однородный эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами, $y = (y_1, y_2)$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$. Обозначим через $P_j^{\pm}(D_y, D_z)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, однородные эллиптические дифференциальные операторы порядков $m_j \leq$ $\leq 2m-1$ также с постоянными коэффициентами. Предположим, что система операторов $\{P_j^{\pm}\}_{j=1}^m$ является нормальной и накрывает оператор P.

Напомним понятие накрывающей системы граничных операторов для эллиптического оператора. Сначала рассмотрим случай в $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n), x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$. Пусть L, $B_1, \ldots, B_m$ — скалярные однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядков $2m$, $m_1, \ldots, m_m$. Допустим, что L — эллиптический оператор, и обозначим через $t_1, \ldots, t_m$ корни полинома $t \mapsto L(\xi', t\xi_n)$, расположенные в полуплоскости $\mathrm{Im}\, t > 0$. Система $\{B_1, \ldots, B_m\}$ *накрывает* оператор L в $\mathbb{R}^n_+$, если полиномы $t \mapsto B_q(\xi', t\xi_n)$, $q = 1, \ldots, m$, линейно независимы по модулю полинома $(t - t_1(\xi)) \times \ldots \times (t - t_m(\xi))$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой (класса C^∞) границей $\partial\Omega$. Допустим, что $\mathcal{L}(x, D_x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$ с C^∞ коэффициентами. Рассмотрим дифференциальные операторы $\mathcal{B}_1(x, D_x), \ldots, \mathcal{B}_m(x, D_x)$ порядков $m_1, \ldots, m_m$ с коэффициентами из класса

$C^\infty(\overline{\Omega})$. Пусть $x^0 \in \partial\Omega$. Введем декартовы координаты $y = (y', y_n)$ с началом в x^0 так, чтобы ось y_n была направлена вдоль внутренней нормали к $\partial\Omega$. Обозначим через $L(x^0, D_y)$, $B_1(x^0, D_y), \ldots, B_m(x^0, D_y)$ главные однородные части операторов $\mathcal{L}, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$. Мы говорим, что система операторов $\{\mathcal{B}_1(x, D_x), \ldots, \mathcal{B}_m(x, D_x)\}$ *накрывает* оператор $\mathcal{L}(x, D_x)$, если для любой точки $x^0 \in \partial\Omega$ система $\{B_1(x^0, D_y), \ldots, B_m(x^0, D_y)\}$ накрывает оператор $L(x^0, D_y)$ в полупространстве $\{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$.

Рассмотрим краевую задачу

$$P(D_y, D_z)u = f \quad \text{в} \quad D, \tag{2}$$
$$\partial P_j^\pm(D_y, D_z)u = g_j^\pm \quad \text{на} \quad \Gamma^\pm, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где символ ∂ обозначает оператор сужения на границу.

Введем краевую задачу

$$P(D_y, \theta) = f \quad \text{в} \quad K, \tag{3}$$
$$\partial P_j^\pm(D_y, \theta)u = g_j^\pm \quad \text{на} \quad \gamma^\pm,$$

где θ — произвольная точка единичной сферы S^{n-3}.

Обозначим $A(\theta) = \{P(D_y, \theta), \partial P_j^\pm(D_y, \theta)\}$. Из определений весовых пространств $E_\beta^l(K)$ и пространств следов на границе $E_\beta^{l-\frac{1}{2}}(\gamma^\pm)$ оператор $A(\theta)$ задачи (3) действует как непрерывное отображение

$$A(\theta)\colon E_\beta^{l+2m}(K) \to E_\beta^l(K) \times \prod_\pm \prod_{j=1}^m E_\beta^{l+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\gamma^\pm),$$

поскольку мы рассматриваем операторы $P(D_y, D_z)$, $P_j^\pm(D_y, D_z)$ с постоянными коэффициентами.

Запишем операторы $P(D_y, 0)$ и $P_j(D_y, 0)$ в полярных координатах (r, ω):

$$P(zD_y, 0) = r^{-2m}\mathbf{P}(\omega, D_\omega, rD_r),$$

$$P_j^\pm(D_y, 0) = r^{-m_j^\pm}\mathbf{P}_j^\pm(\omega, D_\omega, rD_r),$$

где $D_r := i^{-1}\partial/\partial r$ и $\mathbf{P}(\omega, D_\omega, \lambda), \mathbf{P}_j^\pm(\omega, D_\omega, \lambda)$ — полиномы комплексной переменной λ.

Обозначим через λ собственные значения краевой задачи с параметром λ:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\omega, D_\omega; \lambda)u = 0, \quad \text{если} \quad 2|\omega| < \alpha, \\ &\mathbf{P}_j^\pm(D_\omega; \lambda)u = 0, \quad \text{если} \quad 2\omega = \pm\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Построив специальное диадическое покрытие D, В. Г. Мазья и Б. А. Пламеневский пришли к следующему результату (см. теорему 4.1 в [4]).

Утверждение 3. *Предположим, что $u \in H_{\text{loc}}^{2m}(\overline{D}\backslash M)$ удовлетворяет задаче* (2) *с $g_j^\pm = 0$ при всех $j = 1, \ldots, m$. Тогда выполняется оценка*

$$\|u\|_{V_\beta^{l+2m}(D)} \le C\left(\|f\|_{V_\beta^l(D)} + \|u\|_{V^0_{\beta-l-2m}(D)}\right), \tag{5}$$

где $C = \text{const} > 0$.

В случае ограниченной области G введем несколько обозначений для дифференциальных операторов следующим образом.

Рассмотрим краевую задачу для эллиптического оператора $\mathcal{P}(x, D_x)$ с коэффициентами в $C^\infty(G)$ с $\operatorname{ord}\mathcal{P} = 2m$. Допустим, что в окрестности каждого множества Γ_q определены дифференциальные операторы $\mathcal{P}_j(x, D_x), j = 1, \ldots, m$. Предположим, что порядок оператора $\mathcal{P}_j$ не меняется и равен m_{jq} на Γ_q. Будем считать, что коэффициенты оператора $\mathcal{P}_j$ принадлежат C^∞ в окрестности Γ_q. Будем считать также, что оператор $\mathcal{P}$ эллиптический, а операторы $\{\mathcal{P}_j\}$ образуют нормальную систему и накрывают $\mathcal{P}$ на $\overline{\Gamma}_q, 1 \leq q \leq s$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(x, D_x)u = f \quad \text{в} \quad G, \\ &\partial\mathcal{P}_j(x, D_x)u = g_j \quad \text{на} \quad \partial G \backslash M \quad \text{для} \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть z — точка на ребре M. Обозначим через $\mathcal{P}_j^\pm$ предельные значения оператора $\mathcal{P}_j$ с каждой из сторон, на которые M локально делит многообразие ∂G. Для произвольной точки z определены два касательных полупространства $\Gamma^\pm(z)$ размерности $n-1$ к ∂G и двумерная плоскость $\pi(z)$, нормальная к M. Обозначим через $K(z)$ угловую область на плоскости $\pi(z)$, ограниченную двумя лучами $\gamma^\pm(z) = \Gamma^\pm(z) \bigcap \pi(z)$, а через $\alpha(z)$ величину (раствор) этого угла.

Пусть $\{U\}$ — достаточно мелкое покрытие области G координатными окрестностями. Если $U \bigcap M \neq \varnothing$, то мы применяем систему координат в каждой точке $x \in U$ как (y, z), где z — ближайшая к x точка многообразия M, $y = (y_1, y_2)$ — координаты x в $\pi(z)$.

Мы можем записать оператор задачи (6) в точке $z \in M$ в виде $\left\{\mathcal{P}(z, D_y, D_z), \partial\mathcal{P}_j^\pm\right\}$.

Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{P}}, \overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_j^\pm$ — главные однородные части полиномов $\mathcal{P}(z; \eta, \zeta)$, $\mathcal{P}_j^\pm(z; \eta, \zeta)$ переменных (η, ζ), (r, ω) — полярные координаты y в плоскости $\pi(z)$. Мы рассматриваем только такие $\overset{\circ}{P}$, $\overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_j^\pm$, которые можно представить в виде

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{P}}(z; D_y, 0) &= r^{-2m}\mathbf{P}(z; \omega, D_\omega, rDr), \\ \overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_j^\pm(z; D_y, 0) &= r^{-m_j^\pm}\mathbf{P}_j^\pm(z; \omega, D_\omega, rDr). \end{aligned}$$

Обозначим через $\lambda_k(z)$ собственные значения задачи

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(z; \omega, D_\omega, \lambda)u = 0, \quad \text{если} \quad 2|\omega| < \alpha(z), \\ &\mathbf{P}_j^\pm(z; D_\omega, \lambda)u = 0, \quad \text{если} \quad 2\omega = \pm\alpha(z). \end{aligned} \tag{7}$$

Далее, пусть $A(z, \theta) = \{\mathcal{P}(z; D_y, \theta), \overset{\circ}{\mathcal{P}}{}_j^\pm(z; D_y, \theta)\}$, где $\theta \in S^{n-3}$.

Утверждение 4 (улучшение локальной гладкости, см. теорему 10.2 в [4]). *Предположим, что β — вещественная функция из $C^\infty(M)$; φ, $\psi \in C_0^\infty(G)$ такие, что $\varphi\psi = \varphi$. Если $u \in V^0_{\beta-l-2m}(G_T) \in H^{2m}_{\mathrm{loc}}(G\backslash M)$ удовлетворяет задаче* (6), *где $\psi f \in V^l_\beta(G)$, то φu принадлежит $V^{l+2m}_\beta(G)$.*

Утверждение 4 и другие важные результаты о разрешимости краевой задачи в областях типа двугранного угла (см. теоремы 7.1 и 9.1 в [4]) можно получить путем установления изоморфизма оператора, связанного с V-нормой в угле K (см. теорему 6.1 и лемму 7.2 в [4] для общих L^p случаев). Затем с помощью этих результатов и локальных эллиптических оценок в угле K с применением неравенства Харди можно получить соответствующие результаты в областях типа D или G. Более краткое доказательство разрешимости в области K в весовых пространствах, основанных на $L_p, p = 2$, представлено в [3] (см. теорему 6.1.3 и лемму 6.1.10 в [3]).

Результаты М. С. Аграновича и М. И. Вишика [1] по эллиптическим задачам, зависящим от параметра, полезны для получения следующего утверждения. Этот результат утверждает возможность перейти от одного пространства Соболева с весом с индексом β к другому пространству с совершенно другим индексом β' в зависимости от отсутствия собственных значений между двумя заданными прямыми в комплексной плоскости.

Утверждение 5 (об изменении индекса β, см. [4]). *Пусть $\mathcal{U}$ — открытое подмножество $G, \mathcal{U} \bigcap M \neq \varnothing$, такое, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = \beta + 1 - 2m$ не содержит собственных значений задачи* (7), *а подпространства $\ker A(z,\theta)$, $\operatorname{coker} A(z,\theta)$ тривиальны для всех $\theta \in S^{n-3}, z \in M \bigcap \mathcal{U}$. Пусть $\lambda_+(z),\ \lambda_-(z)$ — собственные значения задачи* (7), *удовлетворяющие неравенству*

$$\operatorname{Im}\lambda_-(z) < \beta + 1 - 2m < \operatorname{Im}\lambda_+(z),$$

и в полосе $\operatorname{Im}\lambda_-(z) < \operatorname{Im}\lambda < \operatorname{Im}\lambda_+(z)$ отсутствуют точки спектра задачи (7). *Кроме того, пусть β_1, β_2 — гладкие вещественные функции на $M \bigcap \mathcal{U}$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\operatorname{Im}\lambda_-(z) < \beta_j(z) + 1 - 2m < \operatorname{Im}\lambda_+(z).$$

Если u — такое решение задачи (6), *что $\psi_{\mathcal{U}} u \in V^{2m}_{\beta_1}(G), \psi_{\mathcal{U}} f \in \bigcap\limits_{j=1}^{2} V^0_{\beta_j}(G)$, где $\psi_{\mathcal{U}} \in C_0^\infty(\mathcal{U})$, то для всех функций $\varphi_{\mathcal{U}} \in C_0^\infty(\mathcal{U})$ таких, что $\varphi_{\mathcal{U}}\psi_{\mathcal{U}} = \varphi_{\mathcal{U}}$, $\varphi_{\mathcal{U}} u$ принадлежит $V^{2m}_{\beta_2}(G)$.*

Аналогичный результат для диэдральной области D можно получить, если заменить $A(z,\theta)$ на $A(\theta)$ и рассмотреть собственные значения задачи (4) (см. теорему 7.2 в [4]).

5. Гладкость обобщенного решения в нестационарном случае. После установления основных результатов в эллиптическом случае мы можем сделать следующий шаг для эффективного изучения регулярности обобщенного решения задачи (1). В дальнейшем будем предполагать, что $a_{pq}(x,t), a_p(x,t), a(x,t)$ принадлежат классу $C^\infty(\Omega_T)$ с ограниченными частными производными всех порядков в Ω_T. Последнее условие всегда выполняется, если рассматриваются только ограниченные области Ω, или если нас интересует только поведение решения в окрестности множества особенностей M.

Прежде всего отметим, что из утверждения 1 следует включение $u(x,t) \in H^{m,0}(\Omega_T)$. Это означает, что при почти всех $t \in (0,T)$ функция u принадлежит $H^m(\Omega)$. Теперь из неравенства Харди, которое можно применить для функции u, обращающейся в нуль вблизи $\partial\Omega$, следует оценка

$$\int\limits_{\Omega} r^{-2m} |u(x,t)|^2 dx \le C\|u\|^2_{H^m(\Omega)}, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Из этого неравенства мы можем установить, что u принадлежит $V^0_{-m}(\Omega)$ по определению весовых пространств $V^\ell_\beta(\Omega)$. Этот результат вместе с теоремой 4.1 в [4] позволяет сформулировать следующую теорему о регулярности слабого решения задачи (1) в цилиндрической области, основанием которой является диэдральная область. Сначала рассмотрим вариант, когда $a_{pq}(x,t)$ не зависят от переменных x (т. е. для каждого $t \in [0,T]$ коэффициенты дифференциального оператора P постоянны).

Теорема 1. *Предположим, что функции $f,\ f_t \in L_2(D_T)$ таковы, что $D_t^h f(x,0) = 0$ для $h = 0,1$. Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи* (1) *в D_T такое, что $u(x,\cdot) \in H^{2m}_{\mathrm{loc}}(\overline{D}\backslash M)$ при всех $t \in (0,T)$. Тогда u принадлежит $V_m^{2m,0}(D_T)$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{V_m^{2m,1}(D_T)} \le C\Big[\|f\|_{L_2(D_T)} + \|D_t f\|_{L_2(D_T)}\Big],$$

где $C = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Применим утверждение 3 для случая $l = 0, \beta = m$ (см. теорему 4.1 в [4] для оценки в случае диэдральной области). Используя замену $F = -u_t + f(x,t)$, записываем оценку норм с $l = 0, |\gamma| = 2m:$

$$\int\limits_D |D^\gamma u(x,t)|^2 r^{2m} dx \le C \int\limits_D \Big(|F(x,t)|^2 r^{2m} + r^{-2m}\big|u(x,t)\big|^2\Big) dx. \tag{8}$$

Подставляя $F = -u_t + f(x,t)$, из неравенства Харди получаем

$$\int\limits_D |D^\gamma u(x,t)|^2 r^{2m} dx \le C \int\limits_D \left(|f(x,t)|^2 + |u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\right) dx. \tag{9}$$

Интегрируя (9) по t на $(0,T)$, приходим к неравенству

$$\int\limits_{D_T} |D^\gamma u(x,t)|^2 r^{2m} dx\,dt \le C \int\limits_{D_T} \left(|f(x,t)|^2 + |u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\right) dx\,dt. \tag{10}$$

Из утверждений 1 и 2 видно, что правая часть указанного неравенства ограничена величиной $C\Big(\|f\|^2_{L_2(D_T)} + \|f_t\|^2_{L_2(D_T)}\Big)$ с постоянной $C > 0$.

Теорема 1 доказана.

Для случая ограниченной области G мы получим аналогичный результат.

Теорема 2. *Предположим, что функции $f, f_t \in L_2(G_T)$ таковы, что $D_t^h f(x,0) = 0$ при $h = 0,1$. Пусть $\psi,\ \varphi$ — C^∞-функции на G с компактными носителями, $\psi = 1$ в окрестности носителя φ. Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи* (1) *такое, что $u(x,\cdot) \in H^{2m}_{\mathrm{loc}}(\overline{G}\backslash M)$ при всех $t \in (0,T)$. Тогда u принадлежит $V_m^{2m,0}(G_T)$ и справедлива оценка*

$$\|\phi u\|_{V_m^{2m,1}(G_T)} \le C\Big[\|\psi f\|_{L_2(G_T)} + \|\psi f_t\|_{L_2(G_T)}\Big], \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с применением утверждения 4 вместо утверждения 3.

Рассмотрим общий случай с непостоянными коэффициентами, когда a_{pq} зависят от пространственных переменных x. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t)$ — *обобщенное решение начально-краевой задачи* (1) *в* D_T *такое, что* $u(x,\cdot)$ *принадлежит* $H^{2m}_{\rm loc}(\overline{D}\backslash M)$ *при всех* $t\in(0,T)$. *Далее, предположим, что подпространства* $\ker A(\theta)$, $\operatorname{coker} A(\theta)$ *тривиальны для всех* $\theta\in S^{n-3}$. *Допустим, что* $D_t^k f$ *принадлежит* $L_2(D_T)$, $D_t^k f(x,0)=0$ *при* $k\le 2m$. *Кроме того, пусть* λ_+, λ_- — *собственные значения задачи* (4), *удовлетворяющие неравенству*

$$\operatorname{Im}\lambda_- < 1-2m \le -m < \operatorname{Im}\lambda_+,$$

и в полосе $\operatorname{Im}\lambda_- < \operatorname{Im}\lambda < \operatorname{Im}\lambda_+$ *отсутствуют точки спектра задачи* (4) *при всех* $t\in[0,T]$. *Тогда* $u(x,t)$ *принадлежит* $V^{2m}_0(D_T)$ *и выполняется неравенство*

$$\|u\|^2_{V_0^{2m}(D_T)} \le C\sum_{k=0}^{2m}\|D_t^k f\|^2_{L_2(D_T)}, \quad C=\mathrm{const}>0. \tag{11}$$

Доказательство. Сначала докажем оценку

$$\|D_t^s u\|^2_{V_0^{2m,0}(D_T)} \le C\sum_{k=0}^{2m}\|D_t^k f\|^2_{L_2(D_T)}, \qquad C=\mathrm{const}>0, \quad s\le 2m-1. \tag{12}$$

Из уравнения в задаче (1) следует, что $(-1)^m P_0(\overline{x},t,D_x)u = F(x,t)$, где

$$F = u_t + f + (-1)^{m-1}\big[P_0(\overline{x},t,D) - P(x,t,D)\big]u.$$

Из условий на коэффициенты $a_{pq}(x,t)$ имеем

$$|a_{pq}(x,t) - a_{pq}(\overline{x},t)| \le Cr, \qquad r=|y|=|x-\overline{x}|, \quad C=\mathrm{const}>0.$$

Из теоремы 1 и утверждений 2, 3 заключаем, что $F(x,t)$ принадлежит $V^{0,0}_{m-1}(D_T)$. Следовательно, $F(x,t)$ принадлежит $V^0_{m-1}(D)$ при почти всех $t\in[0,T]$.

С другой стороны, в полосе $1-2m\le\operatorname{Im}\lambda\le -m$ отсутствуют точки спектра (собственные значения) задачи (7) для каждого $t\in[0,T]$. Следовательно, по теореме 1 и утверждению 5 (см. также теоремы 7.1 и 7.2 в [4] для случая области D) u принадлежит $V^{2m}_{m-1}(D)$ и

$$\|u\|^2_{V^{2m}_{m-1}(D)} \le C\left(\|f\|^2_{L_2(D)} + \|u_t\|^2_{L_2(D)} + \|u\|^2_{V^{2m}_m(D)}\right), \quad C=\mathrm{const}>0. \tag{13}$$

Поскольку u принадлежит $V^{2m}_{m-1}(D)$, то F также принадлежит $V^0_{m-2}(D)$ при почти всех $t\in$ $\in[0,T]$. Применяя еще раз утверждение 5, получаем, что u принадлежит $V^{2m}_{m-2}(D)$ и выполняется неравенство

$$\|u\|^2_{V^{2m}_{m-2}(D)} \le C\left(\|f\|^2_{L_2(D)} + \|u_t\|^2_{L_2(D_T)} + \|u\|^2_{V^{2m}_m(D)}\right), \quad C=\mathrm{const}>0. \tag{14}$$

Повторяя проведенные выше рассуждения, убеждаемся, что u принадлежит $V^{2m}_0(D)$ и

$$\|u\|^2_{V^{2m}_0(D)} \le C\left(\|f\|^2_{L_2(D)} + \|u_t\|^2_{L_2(D)} + \|u\|^2_{V^{2m}_m(D)}\right), \quad C=\mathrm{const}>0. \tag{15}$$

Отсюда следует, что u принадлежит $V^{2m,0}_0(D_T)$ и

$$\|u\|^2_{V^{2m,0}_0(D_T)} \le C\left(\|f\|^2_{L_2(D_T)} + \|u_t\|^2_{L_2(D_T)} + \|u\|^2_{V^{2m,0}_m(D_T)}\right), \quad C=\mathrm{const}>0. \tag{16}$$

Используя утверждение 2 и теорему 1, получаем

$$\|u\|^2_{V_0^{2m,0}(D_T)} \leq C \left(\|f\|^2_{L_2(D_T)} + \|f_t\|^2_{L_2(D_T)} \right), \quad C = \text{const} > 0, \tag{17}$$

т. е. неравенство (12) доказано при $s = 0$.

Дальнейшие рассуждения проведем с помощью математической индукции. Предположим, что неравенство (12) выполняется при $s - 1$. Формально продифференцируем исходную систему (1) s раз по t и обозначим $v = D_t^s$. Следовательно, v (формально) является решением уравнения

$$(-1)^{m-1} P v = v_t + D_t^s f + (-1)^m \sum_{k=1}^{s} \binom{k}{s} P_{t^k} D_t^{s-k} u,$$

где

$$P_{t^k} := \sum_{|p|,|q|=1}^{m} D^p D_t^k a_{pq} D^q + \sum_{|p|=1}^{m} D_t^k a_p D^p + D_t^k a.$$

Исходя из гипотезы индукции, используя аргументы, аналогичные случаю $s = 0$, заключаем, что $D_t^s u$ принадлежит $V_0^{2m,0}(D_T)$ и (12) имеет место при всех $s \leq 2m - 1$.

Поскольку

$$\|u\|^2_{V_0^{2m}(D_T)} \leq \sum_{s=0}^{2m-1} \|D_t^s u\|^2_{V_0^{2m,0}(D_T)} + \|D_t^{2m} u\|^2_{L_2(D_T)},$$

из полученных выше результатов об ограниченности нормы $D_t^s u$ в весовом пространстве $V_0^{2m,0}(D_T)$ и его L_2-гладкости по переменной t получаем оценку (11).

Теорема 3 доказана.

Аналогичным образом получаем результат для ограниченной области G с ребром M. Мы приведем его ниже.

Теорема 4. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение начально-краевой задачи* (1) *в G_T такое, что $u(x,\cdot) \in H^{2m}_{\mathrm{loc}}(\overline{G} \backslash M)$ при всех $t \in (0,T)$. Пусть ψ, φ — бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями в G, для которых $\psi = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} \varphi$. Далее, предположим, что подпространства $\ker A(z,\theta)$, $\operatorname{coker} A(z,\theta)$ тривиальны для всех $\theta \in S^{n-3}$. Допустим, что $\psi D_t^k f \in L_2(G_T)$, $\psi D_t^k f(x,0) = 0$ при $k \leq 2m$. Кроме того, пусть $\lambda_+(z)$, $\lambda_-(z)$ — собственные значения задачи* (7), *удовлетворяющие неравенству*

$$\operatorname{Im} \lambda_-(z) < 1 - 2m \leq -m < \operatorname{Im} \lambda_+(z),$$

и в полосе $\operatorname{Im} \lambda_-(z) < \operatorname{Im} \lambda < \operatorname{Im} \lambda_+(z)$ отсутствуют точки спектра задачи (7). *Тогда $\varphi u(x,t)$ принадлежит $V_0^{2m}(G_T)$ и выполняется неравенство*

$$\|\varphi u\|^2_{V_0^{2m}(G_T)} \leq C \sum_{k=0}^{2m} \|\psi D_t^k f\|^2_{L_2(G_T)}, \quad C = \text{const} > 0. \tag{18}$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы для диэдральной области D.

Продемонстрируем общий результат на конкретном примере трехмерной задачи. В случае системы второго порядка мы можем вывести оценку норм в весовых пространствах следующим прямым и простым образом. Пусть $\mathbb{D}$ — диэдр

$$\mathbb{D} = \big\{ x = (x', x_3) \colon x' \in \mathbb{K}, \;\; x_3 \in \mathbb{R} \big\},$$

где $\mathbb{K}$ — бесконечный угол, определенный как

$$\mathbb{K} = \big\{ x' = (x_1, x_2) \in R^2 \colon 0 < r < \infty, \;\; 0 < \varphi < \theta \big\}$$

в полярных координатах (r, φ).

Рассмотрим следующую краевую задачу в $\mathbb{D}_T = \mathbb{D} \times [0, T]$:

$$L(D_x, D_t)u = u_t - \sum_{i,j=1}^{3} A_{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u = f(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{D}_T,$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{\pm}, \tag{19}$$

$$u(x,0) = 0,$$

где $A_{i,j}$ — постоянные $(s \times s)$-матрицы, $u = (u_1, \ldots, u_s)$, $f = (f_1, \ldots, f_s)$ — вектор-функция. Пусть B — функциональное пространство и $v(x,t) = \big(v_1(x,t), \ldots, v_s(x,t)\big)$ — вектор-функция. Мы говорим, что v принадлежит B^s, если каждая компонента v_j, $1 \leq j \leq s$, принадлежит B.

Запишем систему (19) в виде

$$\mathcal{L}u = -u_t + f(x,t),$$

где $\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{3} A_{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j}$. Положим $F(x,t) := -u_t + f(x,t)$. Используя результат о гладкости относительно t (утверждение 2), убеждаемся, что F принадлежит $L_2(\mathbb{D}_T)^s$ при условии, что $D_t^k f \in L_2((\mathbb{D}_T)^s, D_t^k f(x,0) = 0$ с $k = 0, 1$.

Теорема 5. *Пусть ψ и φ — функции C^∞ на $\overline{\mathbb{D}}$ с компактными носителями, $\psi = 1$ в окрестности носителя φ. Предположим, что $u(x,t)$ является* (*слабым*) *решением задачи* (19) *при предположении, что $\psi D_t^k f \in L_2(\mathbb{D}_T)^s$, $\psi D_t^k f(x,0) = 0$ при $k \leq 2$. Допустим, что $\psi \partial_{x_3}^j u \in V_0^1(\mathbb{D}_T)^s$ при $j = 0, 1$. Тогда φu принадлежит $V_0^{2,0}(\mathbb{D}_T)^s$ и оценка*

$$\|\varphi u\|_{V_0^{2,0}(\mathbb{D}_T)^s} \leq C \left(\sum_{j=0}^{1} \|\psi \partial_{x_3}^j u\|_{V_0^1(\mathbb{D}_T)^s} + \|\psi f\|_{L_2(\mathbb{D}_T)^s} \right), \quad C = \mathrm{const} > 0, \tag{20}$$

выполняется, если в полосе $0 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq 1$ не существует собственного значения задачи (4).

Доказательство. Пусть $L_0(\partial_{x'}, 0) := -\sum_{i,j=1}^{2} A_{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j}$. Тогда

$$L_0(\partial_{x'}, 0)(\varphi u) = F(\partial_t, \partial_{x'}, 0)(x,t) \equiv -(\varphi u_t) + \varphi f + \varphi L_1 \partial_{x_3} u + \big[L(\partial_t, \partial_{x'}, 0), \varphi\big] u,$$

где L_1 — дифференциальный оператор первого порядка. Через

$$\big[L_0(\partial_{x'}, 0), \varphi\big] := L_0(\partial_{x'}, 0)\varphi - \varphi L_0(\partial_{x'}, 0)$$

будем обозначать коммутатор $L_0(\partial_{x'}, 0)$ и φ.

Согласно нашим предположениям относительно u и f, функция $F(\cdot, x_3)$ принадлежит $V_0^0(\mathbb{K})^s$ при фиксированном x_3. Поэтому по теореме 6.1.4 [3] получаем, что $(\varphi u)(\cdot, x_3)$ принадлежит $V_0^2(\mathbb{K})^s$ при произвольном фиксированном x_3 и

$$\|(\varphi u)(\cdot, x_3)\|^2_{V_0^2(\mathbb{K})^s} \le C\|F(\cdot, x_3)\|^2_{V_0^1(\mathbb{K})^s}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от x_3 и t. Интегрируя обе части последнего неравенства по x_3 и используя тот факт, что $\psi\partial_{x_3}u$ принадлежит $V_0^1(\mathbb{D}_T)^s$, получаем оценку

$$\|\varphi u\|_{V_0^2(\mathbb{D})^s} \le C\left(\sum_{j=0}^{1}\|\psi\partial^j_{x_3}u\|_{V_0^1(\mathbb{D})^s} + \|\psi f\|_{L_2(\mathbb{D})^s}\right), \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Чтобы получить оценку (20), применим интегрирование по t на $[0, T]$.

Теорема 5 доказана.

В дальнейшем исследовании нам понадобится еще один вспомогательный результат, близкий к утверждению 3 о локальной оценке.

Лемма 1. *Предположим, что* $u \in H^{2m+l}_{\mathrm{loc}}(\overline{D}\backslash M)$ *удовлетворяет задаче* (2) *с* $g_j^{\pm} = 0$, $j = 1, \ldots, m$, *и* f *принадлежит* $V^l_\beta(D)$. *Кроме того, допустим, что* $u \equiv 0$ *при* $r > R = \mathrm{const} > 0$ *и* $u \in V^{2m+l-1}_{\beta-1}(D)$. *Тогда* u *принадлежит* $V^{2m+l}_\beta(D)$ *и выполняется оценка*

$$\|u\|_{V^{l+2m}_\beta(D)} \le C\Big(\|f\|_{V^l_\beta(D)} + \|u\|_{V^{2m+l-1}_{\beta-1}(D)}\Big), \quad C = \mathrm{const} > 0. \tag{21}$$

Доказательство. Из леммы 4.2 [4] следует, что

$$\int\limits_D |D^\gamma u(x)|^2 r^{2\beta}dx \le C\int\limits_D\left(\sum_{|\alpha|\le l}|D^\alpha f(x)|^2 r^{2(\beta+|\alpha|-l)} + r^{2(\beta-2m-l)}|u(x)|^2\right)dx \tag{22}$$

для всех γ таких, что $|\gamma| = 2m + l$. Из (22) получаем

$$\int\limits_D |D^\gamma u(x)|^2 r^{2\beta}dx \le C\left[\|f\|^2_{V^l_\beta(D)} + \int\limits_D r^{2(\beta-2m-l)}|u(x)|^2)dx\right] \le$$

$$\le C\left[\|f\|^2_{V^l_\beta(D)} + \|u\|^2_{V^{2m+l-1}_{\beta-1}(D)}\right]. \tag{23}$$

Поскольку

$$\|u\|^2_{V^{2m+l}_\beta(D)} = \sum_{|\gamma|=2m+l}\int\limits_D |D^\gamma u(x)|^2 r^{2\beta}dx + \|u\|^2_{V^{2m+l-1}_{\beta-1}(D)},$$

из (23) следует утверждение этой леммы.

Сформулируем теперь результат, который является обобщением теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть* $u(x, t)$ — *обобщенное решение начально-краевой задачи* (1) *в* D_T *такое, что* $u(x, \cdot)$ *принадлежит* $H^{2m+l}_{\mathrm{loc}}(\overline{D}\backslash M)$ *при всех* $t \in (0, T)$, $u \equiv 0$ *при* $r > R = \mathrm{const} > 0$. *Далее, предположим, что подпространства* $\ker A(\theta)$, $\mathrm{coker}\, A(\theta)$ *тривиальны для всех* $\theta \in S^{n-3}$. *Допустим, что* $D^k_t f \in V^l_0(D_T)$ *при* $k \le 2m$, $D^k_t f(x, 0) = 0$ *при* $k \le l + 2m - 1$. *Кроме того, пусть* $\lambda_+(z)$, $\lambda_-(z)$ — *собственные значения задачи* (4), *удовлетворяющие неравенству*

$$\mathrm{Im}\,\lambda_-(z) < 1 - 2m - l \le -m < \mathrm{Im}\,\lambda_+(z),$$

и в полосе $\operatorname{Im}\lambda_-(z) < \operatorname{Im}\lambda < \operatorname{Im}\lambda_+(z)$ *отсутствуют точки спектра задачи* (4) *для всех* $t \in [0,T]$. *Тогда* $u(x,t)$ *принадлежит* $V_0^{2m+l}(D_T)$ *и выполняется неравенство*

$$\|u\|^2_{V_0^{2m+l}(D_T)} \le C \sum_{k=0}^{2m} \|D_t^k f\|^2_{V_0^l(D_T)}, \quad C = \mathrm{const} > 0. \tag{24}$$

Доказательство следует методу, который использовался при доказательстве теоремы 3 в сочетании с методом двойной индукции. Изложим кратко этот подход.

Доказательство проведем индукцией по l. При $l = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 3. Пусть оно правильно при $l-1$.

Докажем оценку

$$\|D_t^s u\|^2_{V_0^{2m+l-s}(D_T)} \le C \sum_{k=0}^{2m} \|D_t^k f\|^2_{V_0^l(D_T)} \tag{25}$$

при $s = l, l-1, \ldots, 0$ с постоянной $C = \mathrm{const} > 0$.

Действительно, поскольку $D_t^k f \in V_0^l(D_T)$ при $k \le 2m$, то $D_t^k f \in L_2(D_T)$ при $k \le \le 2m + l - 1$. С другой стороны, $D_t^k f(x,0) = 0$ при $k \le l + 2m - 2$. Следовательно, $D_t^{l+1} u$ принадлежит $L_2(D_T)$ согласно утверждению 2. Используя аргументы, аналогичные таковым при доказательстве теоремы 3, получаем неравенство (25) при $s = l$.

Предположим, что (25) справедливо при $s = l, l-1, \ldots, j+1$. Положим $v = D_t^j u$. Тогда v удовлетворяет равенству

$$(-1)^{m-1} P v = F_j,$$

где

$$F_j = v_t + D_t^j f + (-1)^m \sum_{k=1}^{j} \binom{k}{j} P_{t^k} D_t^{j-k} u.$$

Согласно индуктивной гипотезе по l получаем

$$\sum_{k=1}^{j} \binom{k}{j} P_{t^k} D_t^{j-k} u \in V_0^{l-j}(D_T).$$

С другой стороны, в силу индуктивной гипотезы по s v_t принадлежит $V_0^{l-j}(D_T)$. Следовательно, F_j принадлежит $V_0^{l-j}(D_T)$. Поскольку имеется включение $V_0^{l-j}(D_T) \subseteq V_{-1}^{l-j-1}(D_T)$, то F_j принадлежит $V_{-1}^{l-j-1}(D_T)$.

Теперь, повторяя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3, убеждаемся, что v принадлежит $V_{-1}^{2m+l-j-1,0}(D_T)$. Из леммы 1 после интегрирования по t на $[0,T]$ следует, что $D_t^j u = v$ принадлежит $V_0^{2m+l-j,0}(D_T)$ и

$$\|D_t^j u\|^2_{V_0^{2m+l-j,0}(D_T)} \le C \sum_{k=0}^{2m} \|D_t^k f\|^2_{V_0^l(D_T)}, \quad C = \mathrm{const} > 0. \tag{26}$$

Имеем следующее очевидное неравенство из определения весовых пространств:

$$\|D_t^j u\|^2_{V_0^{2m+l-j}(D_T)} \leq \|D_t^{j+1} u\|^2_{V_0^{2m+l-j-1}(D_T)} + \|D_t^j u\|^2_{V_0^{2m+l-j,0}(D_T)}. \tag{27}$$

Согласно индуктивной гипотезе по s из (25) получаем

$$\|D_t^{j+1} u\|^2_{V_0^{2m+l-j-1}(D_T)} \leq C \sum_{k=0}^{2m} \|D_t^k f\|^2_{V_0^l(D_T)}, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Из последней оценки и (26), (27) следует, что

$$\|D_t^j u\|^2_{V_0^{2m+l-j}(D_T)} \leq C \sum_{k=0}^{2m} \|D_t^k f\|^2_{V_0^l(D_T)}, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

При $j = 0$ получаем утверждение теоремы.

Теорема 6 доказана.

Замечание. Условия $u(x, \cdot) \in H^{2m}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \backslash M)$ или $u \equiv 0$ при $r > R = \mathrm{const} > 0$ можно пропускать для операторов с C^∞ коэффициентами и для интегрируемых функций f, $D_t^k f$, поскольку вдали от края M для решения краевой задачи справедливы результаты о дифференцируемости решения для эллиптической задачи в гладких областях. Условие тривиальности для $\ker A(\theta)$ и $\mathrm{coker}\, A(\theta)$ связано с однозначной разрешимостью краевой задачи с параметром λ, поэтому это условие часто можно проверить в приложениях.

Литература

1. М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, Успехи мат. наук, **19**, вып. 3(117), 53 – 161 (1964).
2. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*, Тр. Моск. мат. о-ва, **16**, 209 – 292 (1967).
3. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Math. Surveys and Monogr., **52**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1997).
4. V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii, *L_p estimates of solutions of elliptic boundary value problems in domains with edges*, Trans. Moscow Math. Soc., № 1, 49 – 97 (1980).
5. V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Weighted L_p estimate of solutions to boundary value problems for second order elliptic systems in polyhedral domains*, Z. angew. Math. und Mech., **83**, № 7, 435 – 467 (2003).
6. N. M. Hung, *On the smoothness of solution of Dirichlet problem for hyperbolic systems in domains with conical or angular points*, Dokl. Akad. Nauk, **362**, № 2, 161 – 164 (1998).
7. N. M. Hung, P. T. Duong, *On the smoothness with respect to time variable of generalized solution with respect to time variable of the first initial boundary-value problem for strongly parabolic systems in the cylinder with non-smooth base*, Ukr. Math. J., **56**, № 1, 78 – 87 (2004).
8. N. M. Hung, P. T. Duong, *On the smoothness of generalized solution for parabolic systems in domain with conic point on boundary*, Ukr. Math. J., **56**, № 6, 857 – 864 (2004).

Получено 12.10.19