DOI: 10.37863/umzh.v72i5.1095

УДК 517.98 + 530.1

Ф. М. Мухамедов (Dep. Math. Sci., College Sci., The United Arab Emirates Univ., Al Ain, UAE),
М. М. Рахматуллаев, М. А. Расулова (Наманган. гос. ун-т, Узбекистан)

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ λ-МОДЕЛИ

For the λ-model on a Cayley tree of order $k \geq 2$, we describe a set of periodic and weakly periodic ground states that correspond to normal divisors of index 2 of the group representation of the Cayley tree.

Для λ-моделі на дереві Келі порядку $k \geq 2$ описано множину періодичних і слабко періодичних основних станів, що відповідають нормальним дільникам індексу 2 групового зображення дерева Келі.

1. Введение. Известно, что фазовая диаграмма гиббсовских мер для данного гамильтониана близка к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах периодическому основному состоянию соответствует периодическая мера Гиббса (см. [1, 3, 15, 21]). Поэтому естественно возникает задача описания периодических и слабо периодических основных состояний. Периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k = 2$ изучены в работах [10, 19]. В работе [15] изучена слабо периодическая мера Гиббса для модели Поттса. В работе [13] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния для нормального делителя индекса 2. Слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями описаны в работах [7, 8].

Модель Поттса в q-состоянии является одной из наиболее изученных моделей в статистической механике из-за широкого теоретического интереса и практического применения [1, 2]. Модель Поттса [5] была введена в качестве обобщения модели Изинга для более чем двух компонент и охватывает ряд проблем в статистической физике (см., например, [6]). В работе [14] для модели Поттса на дереве Кэли получены некоторые явные формулы для свободных энергий и энтропий. Кроме того, модель Поттса стала одной из важных моделей в статистической механике. Поэтому естественно рассматривать более общую модель, чем модель Поттса. Так, в работах [17, 18] была предложена так называемая λ-модель (т. е. модель с ближайшими соседями, где взаимодействия зависят от функции λ), которая включает модель Поттса как частный случай, т. е. λ-функция берется как $\lambda(x, y) = J\delta_{x,y}$, где δ — символ Кронекера. Эта λ-модель включает разные возможные взаимодействия, которые невозможно охватить с моделями Поттса. Например, модель Видома – Ровлинсона, в которой взаимодействие описывается функцией (см. [20])

$$\lambda(x, y) = J\delta_{xy} + \frac{\ln(\mu)}{\beta}|x - y|, \qquad x, y \in \{1, 2, 3\}, \quad \mu > 0, \quad \beta > 0.$$

Эта модель отличается от модели Поттса при $\mu \neq 1$, причем ее фазовая диаграмма богаче, чем модель Поттса. Этот пример показывает, что рассматриваемая в данной статье модель является более общей, чем модель Видома – Ровлинсона, и имеет большую структуру основных состояний [16].

В данной статье рассматривается λ-модель на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Целью этой работы является описание периодических и слабо периодических основных состояний для этой модели.

Полученные результаты, в частности, позволяют изучать структуру основных состояний для упомянутой модели Видома – Ровлинсона. Более того, мы можем изучать свободную энергию и фазовую диаграмму рассматриваемой λ-модели (см. [14]).

Следует отметить, что полученные результаты отличаются от результатов [16], поскольку в упомянутой работе только описаны 1- и 2-периодические основные состояния, а в данной статье мы находим более общие периодические и слабо периодические основные состояния для λ-модели на произвольном дереве Кэли.

2. Определение и известные факты. Пусть $\tau^k = (V, L),\ k \geq 1,$ — дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k.

Если $x, y \in V$ являются концевыми точками некоторого ребра $l \in L$, то x, y называются *ближайшими соседями*, и в этом случае мы будем писать $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y),\ x, y \in V$, на дереве Кэли вводится по формуле

$$d(x,y) = \min\left\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \ldots, x_{d-1},\ x_d = y \in V, \text{ где } \langle x_0, x_1\rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\right\}.$$

Пусть G_k — групповое представление дерева Кэли (см., например, [7 – 12, 15]), т. е. G_k является свободным произведением $k+1$ циклической группы второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ такими, что $a_i^2 = e,\ i = 1, 2, \ldots, k+1$, где $e \in G_k$ — единичный элемент.

Обозначим через $S(x)$ множество „прямых потомков" точки $x \in G_k$, а через $S_1(x)$ множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т. е. $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\}$ и $x_\downarrow = S_1(x) \setminus S(x)$.

Рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\},\ q \geq$ ≥ 2. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Определим G_k^*-периодическую конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $G_k^* \subset G_k$ конечного индекса, т. е. $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k$, $y \in G_k^*$. Для данной периодической конфигурации индекс подгруппы называется периодом конфигурации. Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, \ldots, H_r\}$ — фактор-группа, где G_k^* — нормальный делитель индекса $r \geq 1$. Конфигурацию $\{\sigma(x), x \in V\}$ назовем G_k^*-слабо периодической, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_\downarrow \in H_i,\ x \in H_j$, для всех $x \in G_k$, т. е. значение конфигурации в x зависит не от x, а от номера класса принадлежности x и $x_\downarrow$.

Гамильтониан λ-модели имеет вид

$$H(\sigma) = \sum_{\substack{\langle x,y\rangle \\ x,y \in V}} \lambda(\sigma(x), \sigma(y)), \tag{1}$$

$$\lambda(i,j) = \begin{cases} \overline{a}, & \text{если} \quad |i-j| = 2, \\ \overline{b}, & \text{если} \quad |i-j| = 1, \\ \overline{c}, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in R$.

***Замечание* 1.** Если $\overline{a} = \overline{b} = 0$ и $\overline{c} = J$, то λ-модель редуцируется к модели Поттса.

3. Основные состояния. В этом пункте мы изучим и опишем возможные основные состояния для λ-модели.

Для пары конфигураций σ и φ, совпадающих почти всюду, т. е. всюду, за исключением конечного числа точек, рассмотрим относительный гамильтониан $H(\sigma, \varphi)$ — различие между энергиями конфигурации σ, φ, т. е.

$$H(\sigma,\varphi) = \sum_{\substack{\langle x,y\rangle \\ x,y\in V}} (\lambda(\sigma(x),\sigma(y)) - \lambda(\varphi(x),\varphi(y))). \tag{2}$$

Пусть M — множество единичных шаров с вершинами в V. Назовем сужение конфигурации σ на шаре $b\in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\langle x,y\rangle \\ x,y\in b}} \lambda(\sigma(x),\sigma(y)). \tag{3}$$

Известна следующая лемма [7, 10].

Лемма 1. *Относительный гамильтониан* (2) *имеет вид*

$$H(\sigma,\varphi) = \sum_{b\in M} (U(\sigma_b) - U(\varphi_b)).$$

В этой работе мы рассмотрим случай $q = 3$, т. е. $|\Phi| = 3$. Через c_b обозначим центр единичного шара b и $B_t = \{x\in S_1(c_b) : \varphi_b(x) = t\}$ для всех $t\in\Phi$.

Пусть $\varphi_b(c_b) = d$, $|B_d| = i$, $|B_f| = n$, тогда $|B_g| = k+1-i-n$, где $d\neq f$, $d\neq g$, $f\neq g$, $d,f,g\in\Phi$. Легко доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Для каждой конфигурации φ_b справедливо следующее*:

$$U(\varphi_b) \in \big\{U_{i,n} : i = 0,1,\ldots,k+1,\ \ n = 0,1,\ldots,k+1-i\big\},$$

где

$$U_{i,n} = \frac{i\overline{a} + n\overline{b} + (k+1-i-n)\overline{c}}{2}. \tag{4}$$

Определение 1. *Конфигурация φ называется основным состоянием относительно гамильтониана H, если*

$$U(\varphi_b) = \min\big\{U_{i,n} : i = 0,1,\ldots,k+1,\ \ n = 0,1,\ldots,k+1-i\big\}$$

для любого $b\in M$.

Обозначим $C_{i,n} = \{\varphi_b : U(\varphi_b) = U_{i,n}\}$ и

$$A_{\xi,\eta} = \Big\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\in R^3 : U_{\xi,\eta} = \min\big\{U_{i,n} : i = 0,1,\ldots,k+1,\ \ n = 0,1,\ldots,k+1-i\big\}\Big\}. \tag{5}$$

В случае $k = 2$ легко видеть, что $U(\sigma_b)\in\{U_{0,0}, U_{0,1}, U_{0,2}, U_{0,3}, U_{1,0}, U_{1,1}, U_{1,2}, U_{2,0}, U_{2,1}, U_{3,0}\}$ для любого σ_b, где

$$U_{0,0} = \frac{3\overline{c}}{2},\qquad U_{0,1} = \frac{\overline{b}+2\overline{c}}{2},\qquad U_{0,2} = \frac{2\overline{b}+\overline{c}}{2},\qquad U_{0,3} = \frac{3\overline{b}}{2},\qquad U_{1,0} = \frac{\overline{a}+2\overline{c}}{2},$$

$$U_{1,1} = \frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{2},\qquad U_{1,2} = \frac{\overline{a}+2\overline{b}}{2},\qquad U_{2,0} = \frac{2\overline{a}+\overline{c}}{2},\qquad U_{2,1} = \frac{2\overline{a}+\overline{b}}{2},\qquad U_{3,0} = \frac{3\overline{a}}{2}.$$

С помощью (5) вычислим

$$A_{0,0} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{c} \le \overline{b} \le \overline{a}\right\} \cup \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{c} \le \overline{a} \le \overline{b}\right\},$$

$$A_{0,1} = A_{0,2} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{b} = \overline{c} \le \overline{a}\right\},$$

$$A_{0,3} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{b} \le \overline{c} \le \overline{a}\right\} \cup \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{b} \le \overline{a} \le \overline{c}\right\},$$

$$A_{1,0} = A_{2,0} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} = \overline{c} \le \overline{b}\right\},$$

$$A_{1,1} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} = \overline{b} = \overline{c}\right\}, \qquad A_{1,2} = A_{2,1} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} = \overline{b} \le \overline{c}\right\},$$

$$A_{3,0} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} \le \overline{b} \le \overline{c}\right\} \cup \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} \le \overline{c} \le \overline{b}\right\}$$

и $R^3 = \bigcup\limits_{i,n} A_{i,n}$.

При $k \ge 3$ аналогичным образом можно вычислить $A_{i,n},\ i = 0,1,2,\ldots,k+1,\ n = 0,1,\ldots,k+1-i$:

$$A_{0,0} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{c} \le \overline{b} \le \overline{a}\right\} \cup \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{c} \le \overline{a} \le \overline{b}\right\},$$

$$A_{0,1} = A_{0,2} = A_{0,3} = \ldots = A_{0,k} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{b} = \overline{c} \le \overline{a}\right\},$$

$$A_{0,k+1} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{b} \le \overline{c} \le \overline{a}\right\} \cup \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{b} \le \overline{a} \le \overline{c}\right\},$$

$$A_{1,0} = A_{2,0} = \ldots = A_{k,0} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} = \overline{c} \le \overline{b}\right\},$$

$$A_{1,1} = A_{1,2} = \ldots = A_{1,k-1} = A_{2,1} = \ldots = A_{2,k-2} = \ldots$$

$$\ldots = A_{k-1,1} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} = \overline{b} = \overline{c}\right\},$$

$$A_{1,k} = A_{2,k-1} = A_{3,k-2} = \ldots = A_{k,1} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} = \overline{b} \le \overline{c}\right\},$$

$$A_{k+1,0} = \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} \le \overline{b} \le \overline{c}\right\} \cup \left\{(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) \in R^3 : \overline{a} \le \overline{c} \le \overline{b}\right\}$$

и $R^3 = \bigcup\limits_{i,n} A_{i,n}$.

4. Периодические основные состояния. Этот пункт посвящен описанию периодических основных состояний для λ-модели.

Пусть $A \subset \{1,2,\ldots,k+1\},\ H_A = \left\{x \in G_k : \sum_{j\in A} w_j(x) - \text{четно}\right\},\ G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четно}\}$ где $w_j(x)$ — число a_j в слове x. Отметим, что H_A является нормальным делителем индекса 2 в G_k (см. [15]). Заметим, что при $A = \{1,2,\ldots,k+1\}$ нормальный делитель H_A совпадает с $G_k^{(2)}$.

Рассмотрим фактор-группу $G_k/H_A = \{H_0, H_1\}$, где $H_0 = H_A,\ H_1 = G_k \setminus H_A$.

H_A-периодические конфигурации имеют вид

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, & \text{если} \quad x \in H_0, \\ \sigma_2, & \text{если} \quad x \in H_1, \end{cases}$$

где $\sigma_i \in \Phi,\ i = 1,2$.

Теорема 1. *Пусть $k \ge 3$ и $|A| = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $|\sigma_1 - \sigma_2| = 0$, то соответствующие конфигурации σ на множестве $A_{0,0}$ являются периодическими основными состояниями*;

2) *если* $|\sigma_1-\sigma_2|=1$, *то соответствующие конфигурации* σ *на множестве* $A_{0,1}$ *являются периодическими основными состояниями*;

3) *если* $|\sigma_1-\sigma_2|=2$, *то соответствующие конфигурации* σ *на множестве* $A_{1,0}$ *являются периодическими основными состояниями.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Рассмотрим

$$\varphi(x)=\begin{cases} i, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ i, & \text{если} \quad x\in H_1,\end{cases}$$

где $i\in\Phi$. Тогда $\varphi_b\in C_{0,0}$, для любого $b\in M$. Следовательно, $U(\varphi_b)=U_{0,0}$ для любого $\varphi_b\in M$, т. е. соответствующие конфигурации φ на множестве $A_{0,0}$ являются периодическими основными состояниями.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим

$$\varphi(x)=\begin{cases} i, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ j, & \text{если} \quad x\in H_1,\end{cases}$$

где $|i-j|=1$ и $i,j\in\Phi$.

Возможны следующие случаи:

1) $c_b\in H_0$, тогда $\varphi_b(c_b)=i$, $|B_i|=k$, $|B_j|=1$, следовательно, $\varphi_b\in C_{0,1}$;

2) $c_b\in H_1$, тогда $\varphi_b(c_b)=j$, $|B_i|=1$, $|B_j|=k$, следовательно, $\varphi_b\in C_{0,1}$.

Из этих случаев следует, что $U(\varphi_b)=U_{0,1}$ для любого $\varphi_b\in M$. Следовательно, на множестве $A_{0,1}$ периодическая конфигурация $\varphi(x)$ является периодическим основным состоянием.

Докажем теперь третье утверждение. Рассмотрим

$$\varphi(x)=\begin{cases} i, & \text{если} \quad x\in H_0,\\ j, & \text{если} \quad x\in H_1,\end{cases}$$

где $|i-j|=2$ и $i,j\in\Phi$.

Возможны следующие случаи:

1) $c_b\in H_0$, тогда $\varphi_b(c_b)=i$, $|B_i|=k$, $|B_j|=1$, следовательно, $\varphi_b\in C_{1,0}$;

2) $c_b\in H_1$, тогда $\varphi_b(c_b)=j$, $|B_i|=1$, $|B_j|=k$, следовательно, $\varphi_b\in C_{1,0}$.

Из этих случаев следует, что $U(\varphi_b)=U_{1,0}$ для любого $\varphi_b\in M$. Следовательно, на множестве $A_{1,0}$ периодическая конфигурация $\varphi(x)$ является периодическим основным состоянием.

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 2.** Периодические основные состояния, указанные в пункте 1 теоремы 1, являются трансляционно-инвариантными.

5. Слабо периодические основные состояния. В этом пункте мы изучим слабо периодические основные состояния (которые не являются периодическими). Заметим, что слабо периодические основные состояния были введены в работе [7].

H_A-слабо периодические конфигурации имеют вид

$$\varphi(x)=\begin{cases} a_{00}, & \text{если} \quad x_\downarrow\in H_0, \quad x\in H_0,\\ a_{01}, & \text{если} \quad x_\downarrow\in H_0, \quad x\in H_1,\\ a_{10}, & \text{если} \quad x_\downarrow\in H_1, \quad x\in H_0,\\ a_{11}, & \text{если} \quad x_\downarrow\in H_1, \quad x\in H_1,\end{cases}$$

где $a_{ij}\in\Phi$, $i,j\in\{0,1\}$.

Далее, для удобства H_A-слабо периодическую конфигурацию $\varphi(x), x \in G_k$ запишем в виде $\varphi = (a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$.

Пусть $\varphi_1(x) = (n, n, n, m)$, $\varphi_2(x) = (n, n, m, n)$, $\varphi_3(x) = (n, m, n, n)$, $\varphi_4(x) = (m, n, n, n)$, $\varphi_5(x) = (n, n, m, m)$, $\varphi_6(x) = (n, m, m, n)$, где $n, m \in \Phi$, $\varphi_7(x) = (1, 2, 2, 3)$, $\varphi_8(x) = (2, 1, 3, 2)$, $\varphi_9(x) = (3, 2, 2, 1)$, $\varphi_{10}(x) = (2, 3, 1, 2)$.

Отметим, что слабо периодические основные состояния зависят от выбора нормального делителя.

***Замечание* 3.** Все конфигурации на множестве $A_{1,1}$ являются основными состояниями. Поэтому $\bar{A} = R^3 \backslash A_{1,1}$.

Теорема 2. *При* $k = 2$ *и* $|A| = 2$ *справедливы следующие утверждения*:

1.1) *если* $|n - m| = 1$, *то* H_A*-слабо периодические конфигурации* $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, *на множестве* $A_{0,1}$ *являются* H_A*-слабо периодическими основными состояниями, не являющимися периодическими или трансляционно-инвариантными*;

1.2) *если* $|n - m| = 2$, *то* H_A*-слабо периодические конфигурации* $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, *на множестве* $A_{1,0}$ *являются* H_A*-слабо периодическими основными состояниями, не являющимися периодическими или трансляционно-инвариантными*;

2) *любые* H_A*-слабо периодические конфигурации, кроме трансляционно-инвариантных, периодических и указанных в пп.* 1.1, 1.2, *на множестве* $\bar{A}$ *не являются* H_A*-слабо периодическими основными состояниями.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение 1.1. При $|n - m| = 1$ рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_1(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,2}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,0} \cap A_{0,1} \cap A_{0,2} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_1(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Остальные случаи утверждения 1.1 доказываются аналогично.

Докажем утверждение 1.2. При $|n - m| = 2$ рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_1(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 3$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{1,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{2,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 2$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{2,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{1,0}$.

Значит, на множестве $A_{0,0} \cap A_{1,0} \cap A_{2,0} = A_{1,0}$ конфигурация $\varphi_1(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Остальные случаи утверждения 1.2 доказываются аналогично.

Перейдем к доказательству утверждения 2. Рассмотрим H_A-слабо периодические конфигурации, кроме трансляционно-инвариантных, периодических и описанных в пп. 1.1, 1.2. Рассуждая аналогично, легко доказать, что они на множестве $\bar{A}$ не являются H_A-слабо периодическими основными состояниями.

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 4.** При $k = 2, |A| = k + 1$ нормальный делитель H_A совпадает с $G_k^{(2)}$. Полученные результаты в частном случае описывают результаты [22].

Теперь рассмотрим случаи $k \geq 3$, $|A| = 1$.

Теорема 3. *При $k \geq 3$ и $|A| = 1$ справедливы следующие утверждения*:

1.1) *если $|n - m| = 1$, то H_A-слабо периодические конфигурации $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, на множестве $A_{0,1}$ являются H_A-слабо периодическими основными состояниями, не являющимися периодическими или трансляционно-инвариантными*;

1.2) *если $|n - m| = 2$, то H_A-слабо периодические конфигурации $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, на множестве $A_{1,0}$ являются H_A-слабо периодическими основными состояниями, не являющимися периодическими или трансляционно-инвариантными*;

2) *любые H_A-слабо периодические конфигурации, кроме трансляционно-инвариантных, периодических и указанных в пп.* 1.1, 1.2, *на множестве $\bar{A}$ не являются H_A-слабо периодическими основными состояниями.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение 1.1. При $|n - m| = 1$ рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_1(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = k + 1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,k}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 2$, $|B_m| = k - 1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,0} \cap A_{0,1} \cap A_{0,k} \cap A_{0,2} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_1(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_2(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{2b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{2b}(c_b) = n$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{2b} \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{2b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{2b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{2b} \in C_{0,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{2b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{2b}(c_b) = m$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{2b} \in C_{0,k+1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{2b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{2b}(c_b) = n$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{2b} \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{2b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{2b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{2b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,0} \cap A_{0,1} \cap A_{0,k+1} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_2(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_3(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{3b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{3b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{3b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{3b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{3b}(c_b) = n$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{3b} \in C_{0,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{3b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{3b}(c_b) = m$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{3b} \in C_{0,k+1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{3b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{3b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{3b} \in C_{0,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{3b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{3b}(c_b) = n$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{3b} \in C_{0,0}$.

Значит, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,0} \cap A_{0,k+1} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_3(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_4(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{4b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{4b}(c_b) = m$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{4b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{4b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{4b}(c_b) = m$, $|B_n| = 2$, $|B_m| = k-1$, следовательно, $\varphi_{4b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{4b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{4b}(c_b) = n$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{4b} \in C_{0,k}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{4b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{4b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{4b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{4b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{4b}(c_b) = n$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{4b} \in C_{0,0}$.

Значит, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} \cap A_{0,k} \cap A_{0,0} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_4(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_5(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{5b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{5b}(c_b) = n$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{5b} \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{5b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{5b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{5b} \in C_{0,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{5b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{5b}(c_b) = m$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{5b} \in C_{0,k}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{5b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{5b}(c_b) = n$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{5b} \in C_{0,k}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{5b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{5b}(c_b) = m$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{5b} \in C_{0,1}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{5b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{5b}(c_b) = m$, $|B_n| = 0$, $|B_m| = k+1$, следовательно, $\varphi_{5b} \in C_{0,0}$.

Значит, на множестве $A_{0,0} \cap A_{0,1} \cap A_{0,k} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_5(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_6(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{6b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{6b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{6b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{6b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{6b}(c_b) = n$, $|B_n| = k-1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_{6b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{6b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{6b}(c_b) = m$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{6b} \in C_{0,k+1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{6b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{6b}(c_b) = m$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{6b} \in C_{0,k+1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{6b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{6b}(c_b) = n$, $|B_n| = k-1$, $|B_m| = 2$, следовательно, $\varphi_{6b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{6b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{6b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{6b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} \cap A_{0,k+1} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_6(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_7(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{7b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{7b}(c_b) = 1$, $|B_1| = k$, $|B_2| = 1$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{7b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{7b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{7b}(c_b) = 1$, $|B_1| = k-1$, $|B_2| = 2$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{7b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{7b}(c_{b\downarrow}) = 3$, тогда $\varphi_{7b}(c_b) = 2$, $|B_1| = k$, $|B_2| = 0$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{7b} \in C_{0,k+1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{7b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{7b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = 0$, $|B_3| = k$, следовательно, $\varphi_{7b} \in C_{0,k+1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{7b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{7b}(c_b) = 3$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = 2$, $|B_3| = k-1$, следовательно, $\varphi_{7b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{7b}(c_{b\downarrow}) = 3$, тогда $\varphi_{7b}(c_b) = 3$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = 1$, $|B_3| = k$, следовательно, $\varphi_{7b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} \cap A_{0,k+1} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_7(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_8(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{8b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{8b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = k$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{8b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{8b}(c_{b\downarrow}) = 3$, тогда $\varphi_{8b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = k-1$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{8b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{8b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{8b}(c_b) = 3$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = k+1$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{8b} \in C_{0,k+1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{8b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{8b}(c_b) = 1$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = k+1$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{8b} \in C_{0,k+1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{8b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{8b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = k-1$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{8b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{8b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{8b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = k$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{8b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} \cap A_{0,k+1} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_8(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_9(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{9b}(c_{b\downarrow}) = 3$, тогда $\varphi_{9b}(c_b) = 3$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = 1$, $|B_3| = k$, следовательно, $\varphi_{9b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{9b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{9b}(c_b) = 3$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = 2$, $|B_3| = k-1$, следовательно, $\varphi_{9b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{9b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{9b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = 0$, $|B_3| = k$, следовательно, $\varphi_{9b} \in C_{0,k+1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{9b}(c_{b\downarrow}) = 3$, тогда $\varphi_{9b}(c_b) = 2$, $|B_1| = k$, $|B_2| = 0$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{9b} \in C_{0,k+1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{9b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{9b}(c_b) = 1$, $|B_1| = k-1$, $|B_2| = 2$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{9b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{9b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{9b}(c_b) = 1$, $|B_1| = k$, $|B_2| = 1$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{9b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} \cap A_{0,k+1} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_9(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_{10}(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{10b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{10b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = k$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{10b} \in C_{0,1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{10b}(c_{b\downarrow}) = 1$, тогда $\varphi_{10b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = k-1$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{10b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{10b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{10b}(c_b) = 1$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = k+1$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{10b} \in C_{0,k+1}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{10b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{10b}(c_b) = 3$, $|B_1| = 0$, $|B_2| = k+1$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{10b} \in C_{0,k+1}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{10b}(c_{b\downarrow}) = 3$, тогда $\varphi_{10b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = k-1$, $|B_3| = 1$, следовательно, $\varphi_{10b} \in C_{0,2}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{10b}(c_{b\downarrow}) = 2$, тогда $\varphi_{10b}(c_b) = 2$, $|B_1| = 1$, $|B_2| = k$, $|B_3| = 0$, следовательно, $\varphi_{10b} \in C_{0,1}$.

Значит, на множестве $A_{0,1} \cap A_{0,2} \cap A_{0,k+1} = A_{0,1}$ конфигурация $\varphi_{10}(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Докажем утверждение 1.2. При $|n-m| = 2$ рассмотрим слабо периодическую конфигурацию $\varphi_1(x)$.

Пусть $c_b \in H_0$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = k+1$, $|B_m| = 0$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{0,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = k$, $|B_m| = 1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{1,0}$.

Пусть $c_b \in H_1$. Возможны следующие случаи:

a) $c_{b\downarrow} \in H_0$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = n$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{k,0}$;

b) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = n$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 2$, $|B_m| = k-1$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{2,0}$;

c) $c_{b\downarrow} \in H_1$ и $\varphi_{1b}(c_{b\downarrow}) = m$, тогда $\varphi_{1b}(c_b) = m$, $|B_n| = 1$, $|B_m| = k$, следовательно, $\varphi_{1b} \in C_{1,0}$.

Значит, на множестве $A_{0,0} \cap A_{1,0} \cap A_{k,0} \cap A_{2,0} = A_{1,0}$ конфигурация $\varphi_1(x)$ является слабо периодическим основным состоянием.

Остальные случаи утверждения 1.2 доказываются аналогично.

Перейдем к доказательству утверждения 2. Рассмотрим H_A-слабо периодические конфигурации, кроме трансляционно-инвариантных, периодических и описанных в пп. 1.1, 1.2. Рассуждая аналогично, легко доказать, что они на множестве $\bar{A}$ не являются H_A-слабо периодическими основными состояниями.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *При $k \geq 3$ и $|A| = k$ справедливы следующие утверждения*:

1.1) *если $|n-m| = 1$, то H_A-слабо периодические конфигурации $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$, на множестве $A_{0,1}$ являются H_A-слабо периодическими основными состояниями, не являющимися периодическими или трансляционно-инвариантными*;

1.2) *если $|n-m| = 2$, то H_A-слабо периодические конфигурации $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, на множестве $A_{1,0}$ являются H_A-слабо периодическими основными состояниями, не являющимися периодическими или трансляционно-инвариантными*;

2) *любые H_A-слабо периодические конфигурации, кроме трансляционно-инвариантных, периодических и указанных в пп.* 1.1, 1.2, *на множестве $\bar{A}$ не являются H_A-слабо периодическими основными состояниями.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору У. А. Розикову за полезные советы, которые способствовали улучшению статьи.

Литература

1. Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, Москва (1980).
2. H. O. Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, de Gruyter Stud. Math., **9** (1988).
3. R. A. Minlos, *Introduction to mathematical statistical physics*, Univ. Lect. Ser., **19** (2000).
4. U. A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*, World Sci. (2013).
5. R. B. Potts, *Some generalized order-disorder transformations*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 106 – 109 (1952).
6. F. Y. Wu, *The Potts model*, Rev. Modern Phys., **54**, 235 – 268 (1982).
7. У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **160**, № 3, 507 – 516 (2009).
8. M. M. Rahmatullaev, *Description of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree*, Appl. Math. and Inf. Sci., **4**, № 2, 237 – 241 (2010).
9. У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **156**, № 2, 292 – 302 (2008).
10. Г. И. Ботиров, У. А. Розиков, *Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод*, Теор. и мат. физика, **153**, № 1, 86 – 97 (2007).
11. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **111**, № 1, 109 – 117 (1997).
12. У. А. Розиков, *Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса*, Теор. и мат. физика, **112**, № 1, 170 – 176 (1997).
13. М. М. Рахматуллаев, *Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **176**, № 3, 477 – 493 (2013).
14. У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, *О свободных энергиях модели Поттса на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **190**, № 1, 112 – 123 (2017).
15. М. М. Рахматуллаев, *Слабо периодическая мера Гиббса для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли*, Сиб. мат. журн., **56**, № 5, 1163 – 1170 (2015).
16. Ф. М. Мухамедова, Ч. Пах, Х. Джамиль, *Основные состояния и фазовые переходы λ-модели на дереве Кэли*, Теор. и мат. физика, **194**, № 2, 304 – 319 (2018).
17. У. А. Розиков, *Описание предельных гиббсовских мер для λ-моделей на решетках Бете*, Сиб. мат. журн., **39**, № 2, 427 – 435 (1998).
18. F. M. Mukhamedov, *On factor associated with the unordered phase of λ-model on a Cayley tree*, Rep. Math. Phys., **53**, 1 – 18 (2004).
19. F. Mukhamedov, U. Rozikov, F. F. Mendes, *On contour arguments for the three state Potts model with competing interactions on a semi-infinite Cayley tree*, J. Math. Phys., **48**, Article 013301 (2007).
20. S. Kissel, C. Kulske, U. A. Rozikov, *Hard-core and soft-core Widom – Rowlinson models on Cayley trees*, J. Stat. Mech. (2019).
21. N. N. Ganikhodjaev, F. M. Mukhamedov, J. F. F. Mendes, *On the three state Potts model with competing interactions on the Bethe lattice*, J. Stat. Mech., **2006**, Article 8012 (2006).
22. M. M. Rahmatullaev, M. A. Rasulova, *Periodic and weakly periodic ground states for the Potts model with competing interactions on the Cayley tree*, Sib. Adv. Math. **26**, № 3, 215 – 229 (2016).

Получено 12.10.19