УДК 517.54

О. К. Бахтін, І. В. Денега (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ МАКСИМУМУ ДОБУТКІВ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ОБЛАСТЕЙ, ЩО ВЗАЄМНО НЕ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

We establish effective upper estimates for the maximum products of the inner radii of mutually disjoint domains in the (n, m)-radial systems of points of the complex plane for all possible values of a certain parameter γ. We also obtain conditions under which the structure of points and domains is not important for our investigations.

Одержано ефективні оцінки зверху максимуму добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються, для (n, m)-променевих систем точок комплексної площини при всіх можливих значеннях деякого параметра γ. Встановлено умови, при яких структура точок і областей є неважливою.

Нехай $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{U}$ — відкритий одиничний круг із центром у початку координат в $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, а $r(B, a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ [1 – 20].

У геометричній теорії функцій велику роль відіграють специфічні способи вимірювання замкнених множин на комплексній площині. Один із таких способів запропонував Фекете в 1923 році. Згідно з теоремою Сеге, введений Фекете трансфінітний діаметр дорівнює логарифмічній ємності і виражається через енергію Вінера з логарифмічним ядром. В теорії потенціалу введено поняття ємності, енергії Вінера, трансфінітного діаметра і сталої Чебишова відносно довільного ядра і досить добре вивчено зв'язок між ними.

Для компакта E його логарифмічна ємність визначається рівностями

$$\operatorname{cap} E := \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}}\backslash E, \infty)},$$

якщо величина $r(\overline{\mathbb{C}}\backslash E, \infty)$ є скінченною, і $\operatorname{cap} E := 0$ — у протилежному випадку.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок

$$A_{n,m} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1, n},\ p = \overline{1, m}\right\}$$

будемо називати (n, m)-променевою, якщо при всіх $k = \overline{1, n}$ і $p = \overline{1, m}$ виконуються співвідношення

$$0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty,$$

$$\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k =: \theta_k(A_{n,m}),$$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.$$

У випадку $m = 1$ $(n, 1)$-променеву систему точок будемо називати n-променевою і використовуватимемо більш прості позначення:

$$a_{k,1} =: a_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad A_{n,1} =: A_n.$$

На множині (n, m)-променевих систем розглянемо такі величини:

$$\alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1}(A_{n,m}) - \theta_k(A_{n,m})\right],$$
$$k = \overline{1,n}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad \alpha_0 := \alpha_n.$$

Величини $\alpha_k(A_{n,m}),\ k = \overline{1,n}$, будемо називати кутовими параметрами системи $A_{n,m}$. Очевидно, що

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(A_{n,m}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Вважатимемо, що область D_0 належить класу Λ, якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}} \backslash \left\{\overline{D_0} \cup \overline{D_0^\star}\right\}$ — відкрита множина, яка має деякий перетин з одиничним колом, де $D_0^\star$ — область, симетрична D_0 відносно одиничного кола. Вважатимемо, що область D_0 належить класу Δ, якщо $0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $\overline{\mathbb{C}} \backslash \left\{\overline{D_0} \cup \overline{D_0^\star}\right\}$ — деяка відкрита множина, $D_0^\star$ — область, симетрична D_0 відносно одиничного кола. Зауважимо, що клас Λ є підкласом Δ.

Систему неперетинних областей $\{D_{k,p}\},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}$, будемо називати системою областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю D_0, якщо має місце співвідношення

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{p=1}^{m} D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash \left\{\overline{D_0} \cup \overline{D_0^\star}\right\}.$$

Очевидно, що $D_0,\ D_{k,p},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}$, — система областей, що взаємно не перетинаються.

Проблема 1. При всіх значеннях параметра $\gamma \in (0, nm]$ знайти оцінку максимуму добутку

$$I_{n,m}(\gamma) = r^\gamma\left(D_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right),$$

де $n, m \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ a_0 = 0,\ A_{n,m} = \{a_{k,p}\},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}$, — (n,m)-променева система точок, $\{D_{k,p}\},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}$, — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta,\ 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}$.

Справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $n, m \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\} \in \mathbb{C}/\{0\},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}$, та будь-якого фіксованого набору областей $D_0,\ \{D_{k,p}\},\ a_{k,p} \in D_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m},\ a_0 = 0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, де $\{D_{k,p}\}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, виконується нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma) \leq (nm)^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(D_{k,p}, a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}} \left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}. \qquad (1)$$

Доведення. Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E \subset \mathbb{C}$ [7]. Тоді мають місце співвідношення

$$r(D_0,0)=r\left(D_0^+,\infty\right)=\frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus D_0^+\right)}\leq\frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\overline{D}_{k,p}^{+}\right)},\tag{2}$$

де $D^+=\left\{z:\dfrac{1}{z}\in D\right\}$. Згідно з теоремою Пойа [6, с. 28], виконується нерівність

$$\mu E\leq\pi d^2(E),$$

де μE — лебегова міра компактної множини E. Тоді з (2) одержуємо

$$r(D_0,0)\leq\left[\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\mu\overline{D}_{k,p}^{+}\right]^{-\frac{1}{2}}.\tag{3}$$

Із теореми про мінімізацію площі [7, с. 34] випливає, що

$$\mu(D)\geq\pi r^2(D,a).$$

Із нерівності (3) отримуємо

$$r(D_0,0)\leq\frac{1}{\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r^2\left(D_{k,p}^{+},a_{k,p}^{+}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна, маємо

$$g_{D_{k,p}}(z,a_{k,p})=g_{D_{k,p}^{+}}\left(w^+,a_{k,p}^{+}\right),\quad w^+=\frac{1}{z}.$$

Таким чином,

$$g_{D_{k,p}^{+}}\left(w^+,a_{k,p}^{+}\right)=g_{D_{k,p}^{+}}\left(\frac{1}{z},\frac{1}{a_{k,p}}\right)=\ln\frac{1}{\left|\dfrac{1}{z}-a_{k,p}^{+}\right|}+\ln r\left(D_{k,p}^{+},a_{k,p}^{+}\right)+o(1),$$

звідки випливає, що

$$r\left(D_{k,p}^{+},a_{k,p}^{+}\right)=\frac{r(D_{k,p},a_{k,p})}{|a_{k,p}|^2},$$

і приходимо до нерівності

$$r(D_0,0)\leq\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2(D_{k,p},a_{k,p})}{|a_{k,p}|^4}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, отримуємо таку оцінку для функціонала $I_{n,m}(\gamma)$:

$$r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D_{k,p},a_{k,p})\leq\frac{\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D_{k,p},a_{k,p})}{\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\dfrac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}}.$$

Із нерівності Коші випливає співвідношення

$$\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\geq\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2(D_{k,p},a_{k,p})}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}.$$

Звідси

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{\gamma}{2}}\geq\left[nm\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r^2\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)}{|a_{k,p}|^4}\right]^{\frac{1}{nm}}\right]^{\frac{\gamma}{2}}=$$

$$=(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Отже,

$$I_{n,m}(\gamma)\leq\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r(D_{k,p},a_{k,p})}{(nm)^{\frac{\gamma}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r(D_{k,p},a_{k,p})\right)^{\frac{\gamma}{nm}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{-\frac{2\gamma}{nm}}}=$$

$$=(nm)^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{nm}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

Таким чином, ми отримали оцінку зверху (1) для функціонала $I_{n,m}(\gamma)$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $n,m\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ \gamma\in(0,nm]$. *Тоді для будь-якої фіксованої* (n,m)-*променевої системи точок* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}\in\mathbb{C}/\{0\},\ k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}$, *та будь-якого набору областей* $D_0,\ \{D_{k,p}\},\ a_{k,p}\in D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}},\ k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m},\ a_0=0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, *де* $\{D_{k,p}\}$ — *система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю* $D_0\in\Delta$, *виконується нерівність* (1).

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1 лише з урахуванням умови, що $I^0_{n,m}(\gamma)=I_{n,m}(\gamma)$ (оскільки області в теоремі 2 не є фіксованими), де $I^0_{n,m}(\gamma)$ — максимум функціонала $I_{n,m}(\gamma)$.

***Зауваження* 1.** Якщо $\gamma=nm$ і $\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\leq 1$, то при умовах теореми 2 має місце нерівність

$$r^{nm}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D_{k,p},a_{k,p})\leq(nm)^{-\frac{nm}{2}}.$$

У цьому випадку структура точок і областей є неважливою.

В роботі [1, с. 95] для фіксованого $R\in\mathbb{R}^+$, довільної (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\},\ k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}$, і системи областей, що взаємно не перетинаються, $\{D_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}},\ k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}$, доведено нерівність

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D_{k,p},a_{k,p}) \leq 2^{nm}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} M_R(A_{n,m}),$$

де $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^{n}\subset\mathbb{R}^{+}$ при заданому R — це коефіцієнти зміщення системи $A_{n,m}$ і $\mu_k(R)\leq$ $\leq m^{-2m}$,

$$M_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{k,p}|,$$

$\chi(t)=\dfrac{1}{2}\left(t+t^{-1}\right)$, $t\in\mathbb{R}^{+}$ — функція Жуковського.

Таким чином, із теореми 2 одержуємо такі твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, і довільного набору областей D_0, $\{D_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $a_0=0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, де $\{D_{k,p}\}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0\in\Delta$, виконується нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma)\leq\frac{4^{nm-\gamma}(M_R(A_{n,m}))^{1-\frac{\gamma}{nm}}}{nm^{nm-\frac{\gamma}{2}}}\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{2\gamma}{nm}}.$$

***Наслідок* 2.** *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\gamma\in(0,nm]$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, такої, що $M_R(A_{n,m})=1$, і довільного набору областей D_0, $\{D_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in D_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $a_0=0\in D_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, де $\{D_{k,p}\}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0\in\Delta$, виконується нерівність*

$$I_{n,m}(\gamma)\leq 4^{nm-\gamma}nm^{\frac{\gamma}{2}-nm}.$$

Якщо $m=1$, то з доведення теореми 1 випливає такий результат для n-променевої системи точок.

***Наслідок* 3.** *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\gamma\in(0,n]$. Тоді для будь-якої фіксованої n-променевої системи точок $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ та будь-якого набору областей D_k, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, де $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0\in\Delta$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\leq n^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\left(\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

***Зауваження* 2.** Якщо $\gamma=n$ і $\prod_{k=1}^{n}|a_k|\leq 1$, то при умовах наслідку 3 має місце нерівність

$$r^{n}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\leq n^{-\frac{n}{2}}.$$

У цьому випадку структура точок і областей є неважливою.

Використовуючи нерівність [1, с. 204]

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \le 2^n \mathcal{L}(A_n) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

де

$$\mathcal{L}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi \left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) |a_k|, \quad \chi(t) := \frac{1}{2}\big(t + t^{-1}\big),$$

доведену для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ і довільної системи областей, що взаємно не перетинаються, $\{D_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, одержуємо таке твердження.

***Наслідок* 4.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\gamma \in (0, n]$. Тоді для будь-якої фіксованої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такої, що $\mathcal{L}(A_n) = 1$, і будь-якого набору областей D_k, $a_k \in \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, де $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Delta$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \le 2^{n-\gamma} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

У випадку, коли $\alpha_k = \dfrac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$, має місце такий результат.

***Наслідок* 5.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\gamma \in (0,n]$. Тоді при всіх умовах наслідку* 4 *виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \le n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{4}{n} \right)^{n-\gamma}.$$

З доведення теореми 1 для випадку, коли точки a_k, $k = \overline{1,n}$, належать одиничному колу, випливає таке твердження.

***Наслідок* 6.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\gamma \in (0,n]$. Тоді для будь-якої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ одиничного кола та будь-якого набору областей D_k, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, де $\{D_k\}_{k=1}^{n}$ — система областей, що взаємно не перетинаються, з додатковою умовою симетрії, яка визначається областю $D_0 \in \Lambda$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \le n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

***Зауваження* 3.** Якщо $\gamma = n$, то при умовах наслідку 6 має місце нерівність

$$r^{n}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k) \le n^{-\frac{n}{2}}.$$

Проблема 2. При всіх значеннях параметра $\gamma \in \mathbb{R}^+$ знайти оцінку максимуму добутку

$$J_{n,m}(\gamma) = [r\,(B_0, 0)\, r\,(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\,(B_{k,p}, a_{k,p})\,,$$

де $n, m \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ A_{n,m} = \{a_{k,p}\},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m},$ — довільна (n,m)-променева система точок, $B_0,\ B_\infty,\ B_{k,p}$ — довільна система областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ при $k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m},\ a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$.

В монографії [1, c. 146] для функціонала $J_{n,m}(\gamma)$ було одержано результат лише при $\gamma = \dfrac{n^2}{4}$ і будь-яких (n,m)-рівнопроменевих системах точок.

Теорема 3. *Нехай $n, m \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \gamma > \dfrac{nm+2}{2}$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m},$ і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, $B_0,\ B_\infty,\ \{B_{k,p}\},\ a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m},$ $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}},\ \infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, виконується нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leq (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|.$$

Доведення. Використовуючи співвідношення (2) і (3), одержуємо нерівності

$$r(B_0, 0) \leq \left[r^2(B_\infty, \infty) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \frac{r^2(B_{k,p}, a_{k,p})}{|a_{k,p}|^4} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$r(B_\infty, \infty) \leq \left[r^2(B_0, 0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} r^2(B_{k,p}, a_{k,p}) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Із нерівності Коші, аналогічно доведенню теореми 1, маємо

$$\left(r^2(B_\infty, \infty) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \frac{r^2(B_{k,p}, a_{k,p})}{|a_{k,p}|^4} \right)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq (nm+1)^{\frac{1}{2}} \left[r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \frac{r(B_{k,p}, a_{k,p})}{|a_{k,p}|^2} \right]^{\frac{1}{nm+1}}.$$

Таким чином, з урахуванням наведених вище співвідношень

$$r(B_0, 0) \leq (nm+1)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[r(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \right]^{-\frac{1}{nm+1}} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}|^{\frac{2}{nm+1}}.$$

Аналогічно

$$r(B_\infty,\infty)\le(nm+1)^{-\frac{1}{2}}\left[r(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B_{k,p},a_{k,p})\right]^{-\frac{1}{nm+1}}.$$

Далі, використовуючи нескладні перетворення, маємо

$$r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)\le$$

$$\le(nm+1)^{-\frac{nm+1}{nm+2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B_{k,p},a_{k,p})\right]^{-\frac{2}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2}{nm+2}}.$$

Отже, остаточно отримуємо нерівність

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B_{k,p},a_{k,p})\le$$

$$\le(nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B_{k,p},a_{k,p})\right]^{1-\frac{2\gamma}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Далі, згідно з теоремою 2.3.1 (М. О. Лаврентьєва) [1],

$$r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)\le 1,$$

тоді

$$J_{n,m}(\gamma)\le\frac{(nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}}{\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right]^{\frac{2\gamma}{nm+2}-1}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}\le$$

$$\le\frac{(nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}}{\left(\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\right)^{\frac{2\gamma}{nm+2}-1}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Звідси

$$(J_{n,m}(\gamma))^{\frac{2\gamma}{nm+2}}\le(nm+1)^{-\gamma\frac{nm+1}{nm+2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|^{\frac{2\gamma}{nm+2}}.$$

Таким чином,

$$J_{n,m}(\gamma)\le(nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|.$$

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 4.** Якщо $\gamma = \dfrac{1}{2}(nm+2)$ і $\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}| \leq 1$, то при умовах теореми 3 має місце співвідношення

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^{\frac{1}{2}(nm+2)}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leq (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}.$$

У цьому випадку структура точок і областей є неважливою.

***Наслідок* 7.** *Нехай $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для довільної фіксованої (n,m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, такої, що $M_R(A_{n,m}) = 1$, і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, виконується нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leq (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}.$$

Якщо $m = 1$, то з доведення теореми 3 випливає такий результат для n-променевої системи точок.

***Наслідок* 8.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}/\{0,\infty\}$ та будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, виконується нерівність*

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}\prod_{k=1}^{n}|a_k|.$$

***Зауваження* 5.** Якщо $\gamma = \dfrac{n+2}{2}$ і $\prod_{k=1}^{n}|a_k| \leq 1$, то з наслідку 8 одержуємо нерівність

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^{\frac{n+2}{2}}\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

У цьому випадку структура точок і областей є неважливою.

***Наслідок* 9.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої системи різних точок $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ одиничного кола та будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, виконується нерівність*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

У 1984 р. Г. П. Бахтіна [8] розглянула задачу про максимум функціонала

$$\prod_{k=0}^{n} R^{\alpha_k}(B_k,a_k),$$

де $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — довільна система однозв'язних областей, що взаємно не перетинаються, таких, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \mathbb{U}$, $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $\alpha_k \geq 0$, $k = \overline{0,n}$, області $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симетричні відносно одиничного кола ($R(B,a)$ — конформний радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$), і отримала деякі окремі результати даної проблеми.

Із наслідку 9 при умові, що $B_0 \subset \mathbb{U}$, отримуємо такий результат.

***Наслідок* 10.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ *і* $B_0 \subset \mathbb{U}$. *Тоді для будь-якої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^n$ *одиничного кола та будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* B_k, $k = \overline{1,n}$, *симетричні відносно одиничного кола* $|a_k| = 1$, *виконується нерівність*

$$r^{2\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Справедливими також є такі твердження.

***Наслідок* 11.** *Нехай* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > \dfrac{nm+2}{2}$, $R > 0$. *Тоді для довільної фіксованої* (n,m)*-променевої системи точок* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такої, що* $M_R(A_{n,m}) = R$, *і довільного набору областей, що взаємно не перетинаються,* B_0, B_∞, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, *виконується нерівність*

$$J_{n,m}(\gamma) \leq (nm+1)^{-\frac{nm+1}{2}}\, R.$$

***Наслідок* 12.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > \dfrac{n+2}{2}$, $R > 0$. *Тоді для будь-якої фіксованої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, *та будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *виконується нерівність*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}\, R^n.$$

***Наслідок* 13.** *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma > \dfrac{n+2}{2}$, $R > 0$ *і* B_0 — *довільна область, що належить відкритому кругу* $|w| < R$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, *та будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *і, крім того, області* B_k, $k = \overline{1,n}$, *симетричні відносно кола* $|w| = R$, *виконується нерівність*

$$r^{2\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}\, R^{2\gamma}.$$

Наслідок 13 неважко отримати із теореми 3, якщо врахувати, що система B_0, B_0^+, B_k, $k = \overline{1,n}$, де B_0^+ — область, симетрична області B_0 відносно кола радіуса R, є системою неперетинних областей і $r\big(B_0^+, \infty\big) = \dfrac{r\left(B_0, 0\right)}{R^2}$. Таким чином,

$$\left[r(B_0, 0) r\left(B_0^+, \infty\right)\right]^\gamma = r^{2\gamma}(B_0, 0)\, R^{-2\gamma},$$

що й доводить наслідок 13.

Література

1. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и методы в комплексном анализе*, Праці Ін-ту математики НАН України (2008).
2. V. N. Dubinin, *Symmetrization method in geometric function theory of complex variables*, Russian Math. Surveys, № 1, 1 – 79 (1994).
3. V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel (2014).
4. A. K. Bakhtin, *Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains*, J. Math. Sci., **234**, № 1, 1 – 13 (2018).
5. A. K. Bakhtin, *Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles*, J. Math. Sci., **231**, № 1, 1 – 15 (2018).
6. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
7. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1966).
8. Г. П. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей*, Современные вопросы вещественного и комплексного анализа, Ин-т математики АН УССР, Киев (1984), с. 21 – 27.
9. А. Л. Таргонський, *Екстремальні задачі теорії однолистих функцій:* дис. . . . канд. фіз.-мат. наук, Київ (2006).
10. А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский, *Обобщенные* (n, d)*-лучевые системы точек и неравенства для неналегающих областей и открытых множеств*, Укр. мат. журн., **63**, № 7, 867 – 879 (2011).
11. I. V. Denega, A. L. Targonskii, *Separating transformation in a problem on extremal decomposition of the complex plane*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 1, 147 – 155 (2017).
12. A. L. Targonskii, *About one extremal problem for the projections of points on a unit circle*, J. Math. Sci., **241**, № 1, 90 – 100 (2019).
13. A. Targonskii, *An extremal problem for the nonoverlapping domains*, J. Math. Sci., **227**, № 1, 98 – 104 (2017).
14. А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей*, Укр. мат. журн., **71**, № 7, 979 – 985 (2019).
15. I. Denega, *Estimates of the inner radii of non-overlapping domains*, J. Math. Sci., **242**, № 6, 787 – 795 (2019).
16. П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов*, Изв. АН СССР, сер. мат., **32**, № 5, 1033 – 1043 (1968).
17. G. V. Kuzmina, *Problems on extremal decomposition of the Riemann sphere*, J. Math. Sci., **118**, № 1, 4880 – 4894 (2003).
18. I. V. Denega, *Generalization of some extremal problems on non-overlapping domains with free poles*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, **67**, № 1, 11 – 22 (2013).
19. I. V. Denega, Ya. V. Zabolotnii, *Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane*, Complex Var. and Elliptic Equat., **62**, № 11, 1611 – 1618 (2018).
20. A. L.Targonskii, I. I. Targonskaya, K. Vaschenko, *About one extremal problem for open sets and partially non-overlapping domains*, J. Math. Sci., **244**, № 1, 56 – 64 (2020).

Одержано 23.10.19